馬步玄機

高中組數學科第三名

省立彰化高中　　作　　者：朱安強、陳冠宇、吳泰輝、朱柏彥
指導教師：王聖輝、陳錦源

一、研究動機

象棋中的馬因走法特殊，能走滿棋盤上的每一點，在趙文敏教授所著「寓數學於遊戲(1)」中，有相關的證明，但是如果改變馬的走法，會不會走滿棋盤呢？若改變範圍的限制，有沒有不同的結果。

二、研究目的

（一）研究馬步不重覆可走完的棋盤大小。
（二）在無範圍限制的棋盤中，找出欲達任一點的走法限制條件（其中走法不限馬步且可重覆走的）。
（三）承（二）找出有限制的棋盤內，那些棋盤無法走完。
（四）承（二）證明可重覆走完的正方形棋盤。
（五）承（二）證明可重覆走完的最小長方形棋盤。
（六）承（二）討論當在不夠大的棋盤中，可走到的點會有那些分布情形。

三、研究過程

（一）討論馬步不重覆可走完的棋盤大小
1.先証明3×5、3×6、4×4的棋盤無法走完
2.分別討論寬＝3、4、5之情形
(1)寬=3時，先由電腦程式測出3×4、3×7、3×8、3×9、3×10之棋盤有符合我們需要的解。
長=4k+7、4k+8、4k+9、4k+10，其中$k\in N$之棋盤，可以3×4棋盤左邊之起點連接於3×7、3×8、3×9、3×10棋盤右邊之終點，即可得不重覆走滿之走法。
(2)寬=5時，依照寬=3之手法，先由電腦程式得出基本棋盤，再以4×5的棋盤擴張，即可得不重覆走完之走法。

(3)寬=4時，將長分為2N+3、2N+4兩類，再將棋盤分為四區，然後每次將棋盤增加兩行，即可得不重覆走完之走法。

3.寬=3k+4、3k+5、3k+6　長=N之棋盤

我們可以3×N之棋盤，連接於3×N、4×N、5×N的下面可得不重覆走完之走法。除了6×6之棋盤，因3×6無解，所以無法以此法推廣，可由電腦程式得知6×6之棋盤有解。

至此我們証明了，除了3×5、3×6、4×4之棋盤無解，其餘的棋盤皆有馬步不重覆走完之走法。

（二）當給定的棋盤無範圍限制時，我們考慮那些移動方法(a, b)可走到棋盤上的任一點。其中移動方法(a, b)包括(a, b)(-a, -b)(a, -b）)(-a, b)(b, a)(-b, -a)(b, -a)(-b, a)八種移動方向。

設移動(a, b)m_1次，(a, -b)m_2次，(b, a)m_3次，(b, -a)m_4次(-a, -b)m_5次，(-a, b)m_6次，(-b, -a)m_7次，(-b, a)m_8次，$n_1=m_1-m_5$，$n_2=m_2-m_6$，$n_3=m_3-m_7$，$n_4=m_4-m_8$以原點(0, 0)為起始點，移動i次時座標為(Xi, Yi)

$\therefore Xi = (n_1 + n_2)a + (n_3 + n_4)b \cdots$ ①

$Yi = (n_1 - n_2)b + (n_3 - n_4)a \cdots$ ②

1.當(a, b) = K>1時，而①②式要有整數解$\longleftrightarrow K \mid Xi$，$k \mid Yi$

取$Xi = a - 1 \to k \mid a-1$，又已知$k \mid a \to k = 1$與假設矛盾。

$\therefore$ (a, b) = k > 1時，此種 (Xi, Yi) 的點無法到達，故令 (a, b) =1

2.①+②$\to Xi + Yi = (n_1 + n_2 + n_3 - n_4)a + (n_1 - n_2 + n_3 + n_4)b$

令$n_1 + n_3 = \alpha$，$n_2 - n_4 = \beta$，則$Xi + Yi = (a + b)\alpha + (a-b)\beta$

當a，b皆為奇數時，由上式知Xi + Yi 必為偶數

即當Xi + Yi 為奇數的點無法到達。

3.証明：當(a, b) = 1，且(a, b)為一奇一偶，由原點出發可達任一點

Pf：先証明可走到(1, 0)，若可走到(1, 0)則任一點皆可走到

令$Xi = (n_1 + n_2)a + (n_3 + n_4)b = 1$

$Yi = m(n_1 - n_2)b + (n3 - n4)a = 0$

$\because$(a, b) = 1 $\therefore$存在ra + sb = 1設a為奇數，b為偶數，$\therefore$取r為奇數，s為偶數

令$n_1 + n_2 = r+bt$，$n_3 + n_4 = s - at$，滿足Xi =1

$n_1 - n_2 = ka$，$n_3 - n_4 = -kb$，滿足Yi=0，並取t偶數k奇數 $\to n_1 + n_2$，$n_1 - n_2$為奇數，$n_3 + n_4$，$n_3 - n_4$為偶數

$\therefore$可得存在符合上式的n_1、n_2、n_3、n_4的整數解。

因此在無限棋盤內，移動方法(a, b)，當a，b為一奇一偶且互質時，可從(0, 0)出發到達棋盤內任一點。

（三）當給定的棋盤有限制時，討論那些棋盤無法走完棋盤上任一點。

1.當棋盤每邊皆有2b -1 個格子點時

以左下角為原點，則中心點為(2b - 2, 2b - 2)

而從中心點作(a, b)移動後，必達棋盤外，

∴棋盤上任一點無法到達中心點，故邊長小於或等於此邊長的正方形棋盤無法走完，因此要走完整個棋盤，邊長至少為2b。

2.若可找到一個邊長為l、m的棋盤可走完，則邊長大於l、m的棋盤，我們皆可改變起始點，將圖形平移，証明可走完。

（四）由電腦程式得當正方形棋盤邊長為2b時，可走完整個棋盤。

對於這部份我們以數學歸納法的手法來証明。

1.⑴定義：當某點下一次移到棋盤外時，將棋盤外的點對棋盤的邊緣作對稱點，稱此點為出發點的內部對稱點。而以內部對稱點為出發點，則原本的出發點就為後來出發點的內部對稱。

⑵定義：先移動(a, b)再移動(a, -b)，可使X坐標加2a，改變方向可使X坐標減少2a，或Y坐增加或減少2a，稱此移動為f_{2a}。同理改變走法，可得使X坐標增加或減少2(b-a)，Y坐標增減2(b-a)，而稱此移動為$f_{2(b-a)}$。而f_{2a}在2b的正方形棋盤皆可移動，而當 b > 2a 時，$f_{2(b-a)}$在2b的正方形棋盤皆可移動。

⑶假設：當某點下一次移動會移至棋盤外時，在2b的正方形棋盤內存在一個走法，可達它的內部對稱點。

⑷若假設成立，因無限棋盤內存在一個可達任意點的走法，而在邊長為2b的棋盤內，要到任一點就有一個相對應的走法，即存在一個在2b×2b的棋盤中從一點到另一點的走法，因此若假設成立，即可証明可走完整個棋盤。

⑸因$f_{2(b-a)}$只能在b>2a時移動，因此對於上述假設用此法只能証明出當b>2a的情形。因為棋盤是四面對稱，所以我們只需考慮由底部移出去的點，其餘類推。而我們將它分為四類討論，令起始點為(x, k)，其中k<b，且0 ≦X ≦2b-1。

A：0≦ X ≦2b-a-1時移動(a, -b)；a ≦ X ≦2b-1時 移動(-a, -b)

B：0≦ X ≦b-1，a>k時移動(b, -a)；b ≦ X ≦2b-1，a>k時移動(-b, a)

C：2b-a ≦ X ≦2b-2時 移動(a, -b)；1 ≦ X ≦a-1時移動(-a, -b)

D：$b \leqq X \leqq 2b-2$，$a>k$時移動$(-a, -b)$；$1 \leqq X \leqq b-1$，$a>k$時移動$(-b, -a)$

A：觀察Y坐標的變化，可得相差$|b-2k|$，X坐標相差$|b|$。

(a)當$b \geqq 2k$時，試著以右式証明對稱法：$2an-bm=b-2k$—①在①式中，無論a，b為奇數或偶數，皆存在n的整數解，及m的奇數解。其中n代表移動n次f_{2a}，每次移動使Y坐標加2a，m代表依次移動m次(a, b) or (-a, b)。

先作n_1次的f_{2a}，其中n_1是滿足Y坐標大於b的最小自然數，再移動(a, -b)而後移動n_2次f_{2a}，其中n_2是滿足Y坐標大於b的最小自然數，再移動(-a, -b)，且繼續重覆上述移動，直到共移動$\frac{m+1}{2}$次(a, -b)，再作f_{2a}，直到共2n次即可到達內部對稱點。而對於上述移動，我們必須考慮是否$n>n_1+n_2+\cdots n_m$

當m=1時 $k+2an_1 \geqq b$，$\therefore n_1=\lceil \frac{b-k}{2a} \rceil$，

而$\because 2an-bm=b-2k, n=\lceil \frac{b-k}{2a} \rceil$　$\therefore n \geqq n1$

當m>1時 同理可得

$n_1+n_2+\cdots n_m = \lceil \frac{mb-k}{2a} \rceil = \lceil \frac{2an-b+2k-k}{2a} \rceil =$
$\lceil \frac{2n-b+k}{2a} \rceil \leqq n$

$\therefore n1 \geqq n_1+n_2+\cdots n_m$，即上述移動過程不會移到棋盤外。

(b)當$b<2k$時，起始點A(x, k)的內部對稱為$(x \pm a, b-k)$，其中$b-k<\frac{b}{2}$。由定義時知A亦為B的內部對稱點 $\because b-k<\frac{b}{2}$
$\therefore$B可到達A，即A也可到達B。

B：我們亦可仿照A之方法以右式來証明假設：$2(b-a)n-am=a-2k$—②在②式中亦存在n的整數解m的奇數解。其中n代表移動n次$f_{2(b-a)}$，每次移動使Y坐標加2(b-a)，m代表依次移動m次的(b,a) or (-b,a)。而移動過程仿(1)之移動法。故可得証可達其內部對稱點。

C：起始點(x,k)，其中$x<a.k<b$，移動(-a,-b)至(x-a,k-0)
∴其內部對稱點為(a-x,b-k)。

亦可以右式証明假設：$2an-2(b-a)m=2a-2x \rightarrow an-(b-a)m=a-x$—③

而③式亦存在整數解m，n，可仿照A之方法使X軸增加$2a-2x$則至(2a - x, k)，而從(2a - x, k)欲移動(-a, b - 2k)，亦可仿照A之移動使之移至(a -x, b - k)即為其內部對稱點。

D：將坐標軸轉換，以左上角為原點，右方定為Y軸正向，下方定為X軸正向，則可視為C之情形。

因此我們得出當b>2a時，我們可在棋盤內找到移動方法走到內部對稱點，再根據我們的假設，所以我們証出當b>2a時，在邊長為2b的棋盤內可走到棋盤的任一點。

2.(1)定理1.當走法(a, b)可走完2b ×2b的棋盤，其中b - a = t，則走法(a + t, b + t)亦可走完邊長為2k + 2t的正方形棋盤。

(Pf)定義：①將棋盤編號、拆開，來表示連通關係的過程稱為f_1

②標示關係圖形的方法稱為f_2

③將關係圖形斜向平移的方法稱為f_3

④將棋盤對中央縱軸翻轉的方法稱為f_4

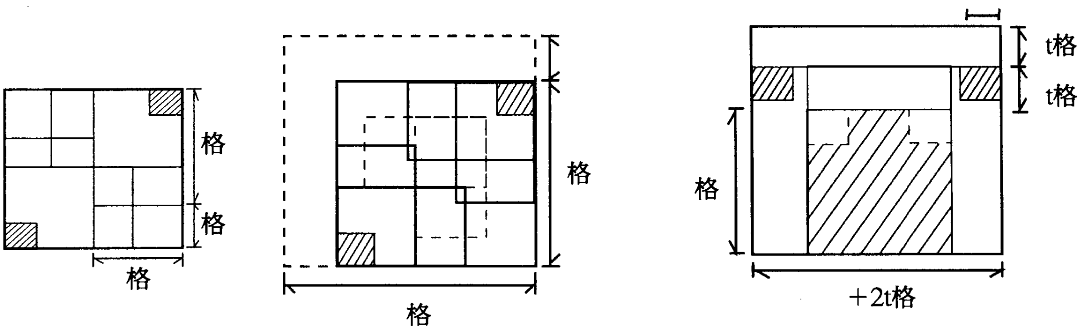
A：∵走法(a, b)可走滿邊長為2b的正方形棋盤，視此為基本棋盤作f1，形成連通圖形。

B：欲証走法(a + t, b + t)可走滿邊長為2b + 2t的棋盤：

(a)走法(a + t, b + t)比走法(a, b)多走了向右七格，向上七格，∴作f2之後，須再作f_3，如圖（一）、圖（二）

(b)走法(a + t, b + t)左移b - a格下移b - a格，所需的格子空間為a + t + 1×a + t + 1，所以除了圖（二）沒有重疊問題不必作f_3外，其餘部分均可作f_3。

(c)作f_4得到另兩組的關係圖形，∵圖（一）、圖（二）有相同的4組關係圖形，即作f_1後有相同的連通圖形，∵圖（三）斜線彼此連通，而其餘周圍各格子可走到斜線，故皆連通，得証。



圖（一）　圖（二）　圖（三）

(2)由1.已証出b>2a，可走完邊長為2b的正方形棋盤。而移動方法(1,t+1)(2,t+2)(3,t3)(4,t+4)......(t-1,t+(t-1)中，其中b - a = t，

∵對於上一列中每種移動方法皆符合 b＞２ a ，故這些已可証出。

再由定理1.可得出，(1+kt,(t+1)+kt)，(2+kt,(t+2)+kt)，(3+kt, (t+3)+kt)

…$((t-1+kt,(2t-1)+kt)$，其中 $k\in N$，可走滿。

故走法(a, b)可走滿邊長$2b$之正方形棋盤。

（五）証明當長方形棋盤為$a+b$，$2b$時可重覆走完。

1.由電腦測試，將正方形一邊固定為$2b$，另一邊逐次縮小，可得當邊長為$a+b$，$2b$時，可到達任一點。

2.我們可由將兩步合成一步的手法，証明當$b-a=1$時，可走完棋盤。

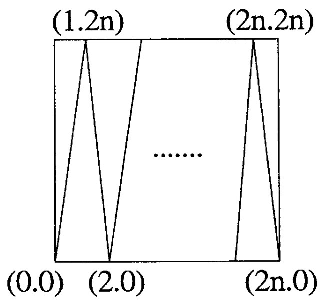
(1)走慮移動$(b, -a)$再移動$(-a, b)$，可使之移動$(b-a, b-a)$，因$b-a=1$，$\therefore$視為移動$(1, 1)$，而此移動除了四角落之外，其餘皆可作此移動。

(2)因可進行對角線移動，所以除了四角落之外，可將棋盤分為坐標相加為奇數，及坐標相加為偶數。而奇數與偶數可各自連通，而奇數的點移動一次後可達偶數點，所以奇數點與偶數點又可互相連通，而四角落的點移動一次也會到達奇數或偶數，所以棋盤上的每一點皆可連通，即$a+b$，$2b$的棋盤可走完。

3.當$a=1$時証明在較小的棋盤可走完周圍，再將圖形形平移。

(1)先縮小棋盤為每邊有$b+1$個格子點，$\because a=1$ $\therefore$令$b=2n$，$n\in N0$

(2)以左下角為原點，移動$(1, b)$再移動$(1, -b)$，依次移動，使得X軸上X坐標為偶數的點皆走完，頂邊X軸為奇數點皆可走完。



(3)改變方向，依次以$(2n, 0)$、$(2n, 2n)$、$(0, 2n)$為起始點，則可得走完棋盤周圍的走法。

(4)再改變起始點位置為$(1, 0)$、$(2, 0)$…$(2nt, 0)$則可圖形依次向右平移，最後可得可走完$a+b$，$2b$的棋盤。

4.我們試著以正方形的手法來証明長方形的棋盤。

(1)因在正方形之中的f_{2a}，$f_{2(b-a)}$無法在長方形的任何位置移動，所以無法直接適用於長方形。

(2)我們也將棋盤分為四類，但因棋盤不是四面對稱，所以討論的情形

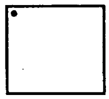
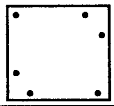
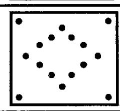
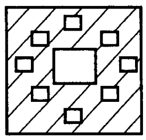
較多，目前只能解決第一類的情形。

(3)而正方形中2.的情形可推廣到長方形，因此目前我們只需解決對稱法的後三種情形。

（六）討論當棋盤邊長比2b小時，其分布有何規律。

1.我們用電腦程式測試出，其分布情形與$[\frac{b}{a}+1]=k$中的k值有密切關係。其邊長與k 之關係，由電腦測試可得出下表之關係

2.

	L的範圍	圖形特徵	圖例
①	1＜L＜b	其圖形分佈只有原點,其於的點皆無法到達	(3,8) 
②	L=b	可到達2b-1點	(5,18) 
	b+1＜L≦ka	如上	
③	ka＜L≦a+b		(7,22) 
④	L=a+b+1	周圍有些達不到且中間也有些達不到	(11,26) 
	a+b+1＜L＜(k+1)2	上述空格區逐次縮小	

表一

註：黑點表可走到的部分

四、結論

（一）因為馬步走法是(1, 2)，所以最小棋盤是3×4，比它小的棋盤當然不能走完，而 棋盤為3×5、3×6、4×4時亦無法以馬步不重覆走完，其餘的棋盤皆可不重覆走 完。

（二）証明出當移動方法(a, b)要在無限制的棋盤內走到任一點的條件是(a, b) = 1且a，b為一奇一偶。（可走覆走）

（三）當走法(a, b)可重覆走時，邊長小於2b的棋盤無法走完。

（四）走法(a, b)欲到達有限棋盤內任一點時，正方形棋盤邊長至少為2b。

（五）由電腦測出長方形邊長為a + b，2b時可走完棋盤，而已証出a = 1及b - a = 1情形。

（六）當棋盤邊長小於2b時，分布情形與k值有密切關係。（參見表一）

五、討論

（一）研究過程（一）主要利用較小的基本棋盤，然後再拼合擴張。

（二）研究過程（四）1.利用到對稱法解決$b \geqq 2a$之情形，至於$b<2a$之情形及長方形部份則需再討論更多種的情形。

（三）研究過程（四）2.主要利用數學歸納法的觀念再由對稱法的協助才得以解決，且此法亦可以推廣到長方形中。

（四）研究過程（五）2.主要利用將兩步合成一步，但$b-a=3$，5，7…因相距太大，伋不適合用來分類，而也曾試著將多步合成一步，但會佔太大的空間也仍需研究。

（五）研究過程（五）3.利用主到周圍再將圖形平移的觀念，對於$a=1$比較容易証明，但其它的走法雖然可由表一得到走到周圍的情形，但是對於這方面的証明，比較繁雜，不易証明。

（六）在趙文敏教授著寓數學於遊戲書中，証明了走法(1, 2)可在9×10的棋盤走完，但不太適合推廣至其它的走法。

（七）將來可考慮同時採用兩種以上的走法時，其分布情形為何。

（八）考慮其它種走法在那些棋盤可不重覆走完。

六、參考資料

1.科學教育月刊192期P. 45，P. 46

2.趙文敏：寓數學於遊戲第一輯第十五篇──九章出版社。

評語

將象棋中馬步的走法經由棋盤坐標化並利用小範圍的平面棋盤與其他棋盤拚合進行討論擴張情形，從而得到結論。運用教學方法並輔以電腦測試表達清楚是一件優良作品。