平行線問題之研究推廣

高中組數學科第一名

台北市立建國高級中學　　作　者：蔡忠潤、李國禎、鄧敦民、陳奕瑋
指導教師：曾政清

一、研究動機

在一年級的時候，師大的許志農教授演講時，曾提到有關平行線的相關性質。由於在那以前，我們的數學老師也曾經出過一題「在三條平行線上各取一點，作正三角形的方法研究。因此我們覺得很有興趣，並且有研究推廣的價值。所以我們就開始著手進行…。

二、研究目的

（一）平面上任給 n 條平行線，判斷是否能「在每條線上各取一點，使得其為正 n 邊形的頂點」。並研究本命題成立之充要條件及幾何作圖法。

（二）空間中任給 n 條不共平面之平行線，判斷是否能在每條線上各取一點，使得其為正 n 邊形的頂點。並研究本命題成立之充要條件。

（三）平面上任給 n 個同心圓，判斷是否能在每個圓上各取一點，使得其為正 n 邊形的頂點。並研究本命題成立之充要條件。

（四）平面上任給 n 條交於一定點的相異直線，判斷是否能在每條線上各取一點，使得其為正 n 邊形的頂點。並研究本命題成立之充要條件。

（五）平面上任給一個凸2 n 邊形，其中對邊平行且等長。判斷是否能在每條邊上各取一點，使得其為正2n邊形的頂點。並研究本命題成立之充要條件。

三、研究過程與結果

（一）平面上的 n 條平行線，判斷是否能在每條線上各取一點，使其為正 n 邊形的頂點。並研究本命題成立之充要條件及幾何作法。

1.首先生們知道在平面上，決定兩組 n 條平行線之間不同的地方，就是其距離比。若有兩組平行線，其距離比相等，而在第一組上可作正 n 邊形，則可經過縮放後，在第二組平行線上也作出正 n 邊形。

2.在已知 n 邊形上取直線時，不難發現相對位置只有兩種情形

(1) A_2在L_2上，A_n在L_3上

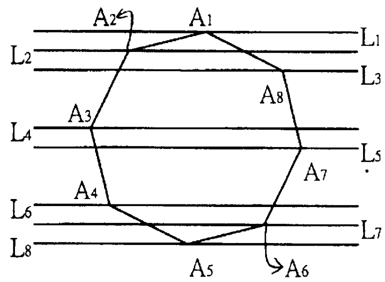
A_3在L_4上…

A_t在$L_{2(t-1)}$上$(t=2,\ 3,\ \cdots,\ [\frac{n+3}{2}])$

A_{n-s}在L_{2s+3}上$(s=0,\ 1,\ \cdots,\ [\frac{n-4}{2}])$

（例如n=11時，L_1至L_{11}上的頂點足碼

依次為1, 2, 9, 3, 8, 4, 7, 5, 6）



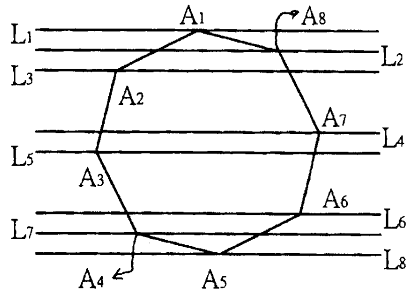
配置（一）

(2) A_1在L_1上，A_n在L_2上

A_2在L_3上…

A_t在L_{2t-1}上$(t=2,\ 3,\ \cdots,\ [\frac{n+3}{2}])$

A_{n-s}在$L_{2(s+1)}$上$(s=0,\ 1,\ \cdots,\ [\frac{n-4}{2}])$



配置（二）

但(2)之情況可將之翻轉過來，再旋轉便得到(1)的情況，故我們皆用(1)的配置情況來討論。

3.推廣到 n 的情形

(1)已知：座標平面上一正 n 邊形，其外接圓圓心在原點O，外接圓半徑為 r，今此正 n 邊形$A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$其頂點座標$A_1(r\ \cos\theta,\ r\ \sin\theta)$，且$A_1$之y座標為最大；$A_2$之y座標大於$A_n$之y座標（即討論之(1)配置），$L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n$分別為通過此正 n 邊形頂點之平行線，$L_1//L_2//\cdots//L_n//$X軸，且此 n 條平行線的順序由上到下依次為$L_1,\ L_2,\ \cdots,\ L_n$。設$d_k=d(L_k,\ L_{k+1})$

求：$d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n$之間的關係

解：$Ak(r\ \cos(\theta+\frac{2(k-1)}{k}\pi),\ r\ \sin(\theta+\frac{2(n-1)}{n}\pi))$。

再由討論3.得知：

$L_{2t}:y=r\ \sin(\theta+\frac{2t}{n}\pi)$ $\qquad L_{2s+1}:y=r\ \sin(\theta+\frac{2(n-s)}{n}\pi)$

$\therefore\ d_{2k+1}=-2r\ \sin\frac{2k+1}{n}\pi\ \cos(\theta+\frac{1}{n}\pi)\qquad (k=0,1,\cdots[\frac{n-1}{2}])$

$d_{2m}=-2r\ \sin\frac{2m}{n}\pi\ \cos(\theta+\pi)\qquad (m=1,2,\cdots[\frac{n}{2}])$

故得d關係為：$\begin{cases} d_1:d_3:\cdots:d_{2k+1}:\cdots=\sin\frac{1}{n}\pi:\sin\frac{3}{n}\pi:\cdots:\sin\frac{2k+1}{n}\pi:\cdots \\ d_2:d_4:\cdots:d_{2m}:\cdots=\sin\frac{2}{n}\pi:\sin\frac{4}{n}\pi:\cdots:\sin\frac{2m}{n}\pi:\cdots \end{cases}$

（且d1, d2 之間無關連，即只要符合上述式子即可。理由見下）

(2)已知：平面上有 n 條平行線，其相鄰兩條之間距離由上而下分別為

$d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{n-1}$。且滿足 $\begin{cases} d_1:d_3:\cdots:d_{2k+1}:\cdots=\sin\frac{1}{n}\pi:\sin\frac{3}{n}\pi:\cdots:\sin\frac{2k+1}{n}\pi:\cdots \\ d_2:d_4:\cdots:d_{2m}:\cdots=\sin\frac{2}{n}\pi:\sin\frac{4}{n}\pi:\cdots:\sin\frac{2m}{n}\pi:\cdots \end{cases}$

求作：一正 n 邊形，其頂點分別在此 n 條平行線上

作法：由（一）之結論可知：$\dfrac{d_1}{d_2}=\dfrac{\sin\frac{1}{n}\pi\cos(\theta+\frac{1}{n}\pi)}{\sin\frac{2}{n}\pi\cos(\theta+\pi)}$

$$\therefore \frac{d_1\sin\frac{2\pi}{n}}{d_2\sin\frac{\pi}{n}}=\frac{\cos(\theta+\pi-\frac{n-1}{n}\pi)}{\sin(\theta+\pi)}=\cos\frac{n-1}{n}\pi+\sin\frac{n-1}{n}\pi\tan(\theta+\pi)$$

$$故\tan(\theta+\pi)=\frac{1}{\sin\frac{n-1}{n}\pi}\left[\frac{d_1\sin\frac{2\pi}{n}}{d_2\sin\frac{\pi}{n}}-\cos\frac{n-1}{n}\pi\right]$$

$$\Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left((1+\frac{2d_2}{d_1})\cot\frac{\pi}{n}\right)$$

在正 n 邊形上利用 θ 角作出 n 條平行線，再縮放至原平行線上即可得！也由此得知其為充要條件。

（且 $\forall d_1,d_2\in R, d_1,d_2\neq 0$，皆存在 $\theta\in[0,\pi]$，所以 d_1,d_2 無關連。

4.討論：

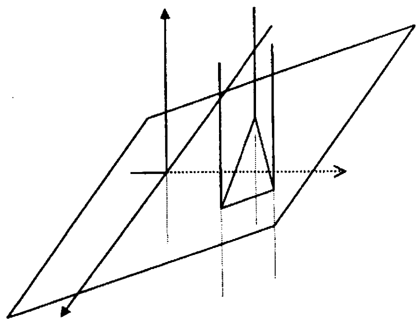
並非所有的正 n 邊形皆可用尺規作圖作出，所以若給定角 $\frac{2\pi}{n}$，（或是給定一組已符合命題之平行線及單位長，則可以之間距離比例，如 $d_2:d_4=\sin\frac{2}{n}\pi:\sin\frac{4}{n}\pi\Rightarrow d_2:d_4=1:2\cos\frac{2}{n}\pi$ 來求得角 $\frac{2\pi}{n}$），如此便可用尺規作圖出各個三角函數值，進而將正 n 邊形作出。

（二）空間中任給 n 條不共平面之平行線，判斷是否能在每條線上各取一點，使其為正 n 邊形的頂點。並研究本命題成立之充要條件

先討論至少在什麼情況下，可作出正 n 邊形。先在空間中作出一個正 n 邊形，然後作出一組平行線，使其每條各通過一個頂點。欲分辨此 n 條平行線，可以以一個與這些平行線垂直的平面去截此組平行線，便可在此平面

得到n個點（成為一n邊形），故只需討論這個n邊形即可。為了方便，以後稱如此被截出來之n邊形為「截n邊形」。換句話說：一個截n邊形決定一組平行線：不同的截n邊形決定不同的平行線。

我們在空間直角座標系上討論。可以不妨假設這組平行z軸，在這組平行線上的正n邊形，設其所在平面為E，而設E和xy平面之交線為x軸，在x軸任意給定一點為原點，如此便可再定出y軸。因為此n邊形是在空間中的，不好定出坐標，於是我們可以在平面E上定出此n邊形之坐標，然後再轉換成空間中之坐標，而加以討論。如此便可簡便地解決問題。



1.在平面E上定出直角坐標：

取原x軸為x軸，原原點為原點，過原點垂宜x軸之直線為y軸，單位長不變。今設平面E上y軸正向與原空間坐標之y軸正向的夾角為θ。

2.將平面E上之直角坐標和空間坐標轉換：

假設點P在E上，且以E之直角坐標表為(a,b)，以空間坐標表為(x,y,z)。

在空間，$\vec{x}=(1, 0, 0)$，

$\vec{y}=(0, 1, 0)$，$\vec{z}=(0, 0, 1)$

$\therefore$P之空間坐標表$\overrightarrow{OP}=x\vec{x}+y\vec{y}+z\vec{z}$

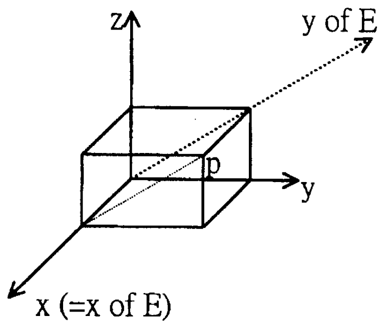
在平面E上，令$\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(0,1)$

$\therefore$P之平面E坐標表$\overrightarrow{OP}=a\vec{a}+b\vec{b}$

顯然可知$\vec{a}=\vec{x}$，又$\vec{b}=\cos\theta\,\vec{y}+\sin\theta\,\vec{z}$

比較$a\vec{a}+b\vec{b}=x\vec{x}+y\vec{y}+z\vec{z}$

$\Rightarrow x\vec{x}+y\vec{y}+z\vec{z}=a\vec{x}+b\cos\theta\,\vec{y}+b\sin\theta\,\vec{z}$



可得$x=a$，$y=b\cos\theta$，$z=b\sin\theta$，此即這兩種坐標之轉換。

由上述可知平面E之一坐標為(a,b)，投影至xy平面後之坐標為$(a,b\cos\theta)$令$\cos\theta=k$，則我們稱把(a,b)變成(a,kb)之變換定義為「伸縮變換」。

<伸縮變換之廣義定義>：

定義：$S=\{(x,y)\mid x\in R,y\in R\}$　$f:S\to S$

若$A=(x,y)$，則$B=(mx,ny)\Leftrightarrow f_{m,n}(A)=B$（其中$m,n\in R$）並定義(m,n)為「伸

縮常數數對」。

我們先證明一些解決問題時所要用到的引理：

＜引理2-1＞：

平面上任給△ABC和△DEF，則必可找到m,n,θ ($m,n \in R$，$0 \leqq \theta < 2\pi$)，使得△ABC繞原點O旋轉θ後所得之$\triangle A_1B_1C_1$，$f_{m,n}(A_1)=A_2$，$f_{m,n}(B_1)=B_2$，$f_{m,n}(C_1)=C_2$，$\triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle DEF$

<proof>：

因為在此只討論三角形之形狀，與位置無關，所以根據前面伸縮變換的性質，在不失其一般性之下，我們可以假設：

$A=(0,0)$，$B=(1,0)$，$C=(a,b)$，$D=(0,0)$，$E=(1,0)$，$F=(x,y)$ ($b \neq 0$，$y \neq 0$)則 $A_1=(0,0)$，$B_1=(\cos\theta, \sin\theta)$，$C_1=(a\cos\theta-b\sin\theta, a\sin\theta+b\cos\theta)$。

所以$A_2=f_{m,n}(A_1)=(0,0)$，$B_2=f_{m,n}(B_1)=(m\cos\theta, n\sin\theta)$，$C_2=f_{m,n}(C_1)=(m(a\cos\theta-b\sin\theta), n(a\cos\theta+b\sin\theta))$。

因為$\triangle A_2B_2C_2 \cong \triangle DEF$，且$A_2=D$，故知必可將$\triangle A_2B_2C_2$旋轉後與△DEF重合。又$\overline{A_2B_2}=\overline{DE}=1$，故$m^2\cos^2\theta+n^2\sin^2\theta=1$，令$\overrightarrow{A_2B_2}$和X軸正向夾角為$\phi$，故知$B_2$, C_2繞A_2轉ϕ後，必重合於E，F。即

$$\begin{cases} m\cos\theta\cos\phi+n\sin\theta\sin\phi=1 \\ -m\cos\theta\sin\phi+n\sin\theta\cos\phi=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi=m\cos\theta \\ \sin\phi=n\sin\theta \end{cases}，且$$

$$\begin{cases} x=\cos\phi \bullet m(a\cos\theta-b\sin\theta)+\sin\phi \bullet n(a\sin\theta+b\cos\theta) \\ y=-\sin\phi \bullet m(a\cos\theta-b\sin\theta)+\cos\phi \bullet n(a\sin\theta+b\cos\theta) \end{cases}$$

以 $\cos\phi=m\cos\theta$，$\sin\phi=n\sin\theta$代入整理得

$$\begin{cases} x=a+b\cos\theta\sin\theta(n^2-m^2) \quad \cdots\cdots (1) \\ y=bmn \quad \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

又 $m^2\cos^2\theta+n^2\sin^2\theta=1 \quad \cdots\cdots (3)$

故引理 2-1 等價之命題為：

「試證」$\forall x,y,a,b \in R$，$(b,y \neq 0)$，皆可找到一組$m,n \in R$，$0 \leqq \theta < 2\pi$使得 (1)，(2)，(3)式皆成立。」

由(1)可得 $n^2-m^2 = \dfrac{x-a}{b\cos\theta\sin\theta} \cdots\cdots (4)$　　而(3)為 $m^2\cos^2\theta+n^2\sin^2\theta=1$

所以$\begin{cases} m^2=1-\dfrac{x-a}{b}\bullet\tan\theta \\ n^2=1-\dfrac{x-a}{b}\bullet\cot\theta \end{cases}$，代入(2)可得

$y^2=b^2m^2n^2=b^2(1-\frac{x-a}{b}\tan\theta)(1+\frac{x-a}{b}\cot\theta)=(b-(x-a)\tan\theta)(b+(x-a)\bullet\frac{1}{\tan\theta})$

$\therefore \tan\theta \bullet y^2=(b-(x-a)\tan\theta)(b\ \tan\theta+(x-a))$

得$b(x-a)\tan^2\theta+((x-a)^2-b^2+y^2)\tan\theta-b(x-a)=0$

即$\tan^2\theta+\left(\frac{(x-a)^2-b^2+y^2}{b(x-a)}\right)\tan\theta-1=0$………(5)

令$g(z)=z^2+\left(\frac{(x-a)^2-b^2+y^2}{b(x-a)}\right)z-1$

因為$g(0)=-1<0$，$g(\frac{b}{x-a})=\frac{b^2}{(x-a)^2}+\frac{(x-a)^2-b^2+y^2}{(x-a)^2}-1=\frac{y^2}{(x-a)^2}\geqq 0$

所以由勘根定理得知，必存在實數z介於0和$\frac{b}{x-a}$之間，使$g(z)=0$故此時取$\tan\theta=z$，則必滿足第(5)式。

(i)若$\frac{b}{x-a}>0$，則$0<\tan\theta\leqq\frac{b}{x-a}$，所以$\frac{x-a}{b}\tan\theta\leqq 1$。

故$1-\frac{x-a}{b}\tan\theta\geqq 0$，可取$m=\pm\sqrt{1-\frac{x-a}{b}\tan\theta}$，

而$n^2=1+\frac{x-a}{b}\cot\theta\geqq 1>0$，可取$n=\pm\sqrt{1+\frac{x-a}{b}\cot\theta}$

(ii)若$\frac{b}{x-a}<0$，則$0>\tan\theta\geqq\frac{b}{x-a}$，後面的正負情況與(i)同。

由(i)，(ii)解出m, n，再代入 y=bmm 來判別正負。

(iii)若 $x-a=0$，我們易知只要取$\theta=0$，$m=1$，$n=\frac{y}{b}$即可。

故我們證出一任意三角形，必可經由適當的旋轉再伸縮變換，而變成另一個任意的三角形。

<引理2-2>

(i) 平行四邊形ABCD，證明其經伸縮變換後，必仍為平行四邊形。

(ii)給定任意一平行四邊形，亦可使其旋轉適當角度後，再以適當之伸縮常數(m,n)，將之經伸縮變換後，與平行四邊形ABCD全等。

<引理2-3>

已知平面上△ABC與△DEF，$f_{m,n}(A)=D$，$f_{m,n}(B)=E$，$f_{m,n}(C)=F$，則必存在$-1\leqq k\leqq 1$，使△ABC繞O轉一適當角度ϕ後，得$\triangle A_1B_1C_1$，$A_2=f_{1,k}(A_1)$，$B_2=f_{1,k}(B_1)$，$C_2=f_{1,k}(C_1)$，使$\triangle A_2B_2C_2\sim\triangle DEF$。

<proof>：

當$\left|\dfrac{n}{m}\right|\leqq 1$時，由性質2-3、2-4知，取$\phi=0$，$k=\dfrac{n}{m}$即可。

當$\left|\dfrac{n}{m}\right|\geqq 1$時，$k=\dfrac{\pi}{2}$，$k=\dfrac{m}{n}$即可。

引理2-3說明了如果不討論圖形之大小，而只討論其形狀，任一伸縮常數數對為(m,n)之伸縮變換，必可用以(1,k)，$-1\leqq k\leqq 1$，為伸縮常數數對之伸縮變換取代，而不必討論m,n的大小關係。

結論：

其命題之充要條件為截n邊形為「伸縮n邊形」。

其中伸縮n邊形為一正n邊形經由以(1,k)為伸縮數數對之伸縮變換後，所形成之n邊形。

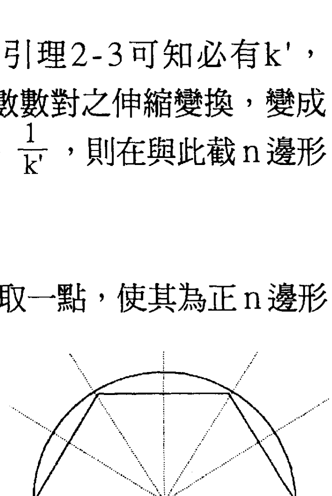
<proof>：

若已知一組平行線上之正n邊形，由方法二坐標轉換之說明可知，截n邊形必為伸縮n邊形。

反之，若已知一截n邊形為伸縮n邊形，則由引理2-3可知必有k'，$|k'|\geqq 1$，使得此伸縮n邊形可經由以(1,k')為伸縮常數數對之伸縮變換，變成正n邊形。再由方法二坐標轉換之說明可知，取$\theta=\cos^{-1}\dfrac{1}{k'}$，則在與此截n邊形交角為$\theta$之平面上，必存在此正n邊形。

（三）平面上任給n個同心圓，判斷是否能在每個圓上各取一點，使其為正n邊形的頂點。並研究本命題成立之充要條件

1.同心圓其頂點的配置由下圖可知，其配置就如平行線的配置相似：設同心圓的頂點順時鐘排列分別是$A_1,A_2,A_3\cdots A_{n-2},A_{n-1},A_n$，這些頂點在由小至大的同心圓上，其順序必為（設$A_1$在最小圓上）：$A_1,A_2,A_n,A_3,A_{n-1},A_4,A_{n-2}\cdots\cdots$ 或 $A_1,A_n,A_2,A_{n-1},A_3,A_{n-2}A_4\cdots\cdots$



2.

(1)已知：同心圓最短之三半徑1:m:n，且$1\leqq m\leqq n(n\neq 1)$，$m,n\in R$

求證：若能在三個圓上各取一點，使其成正N邊形之相鄰三頂點，則：

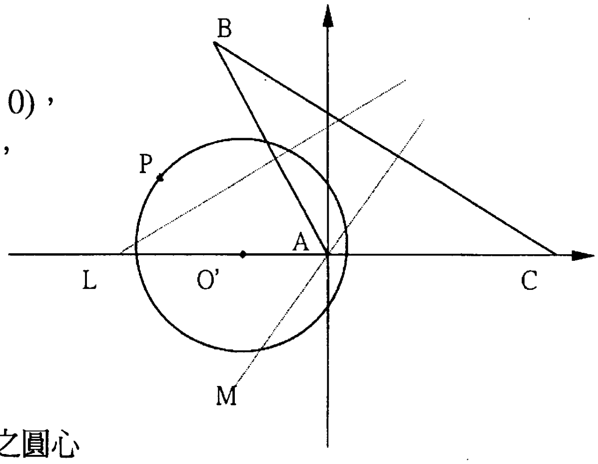
$$\begin{cases} 1<n\leqq 1+\sqrt{2-2\cos\theta} \Rightarrow 1\leqq m\leqq n \\ 1+\sqrt{2-2\cos\theta}<n \Rightarrow n-\sqrt{2-2\cos\theta}\leqq m\leqq n \end{cases}$$ （θ為正N邊形之內角）

$\Leftrightarrow n-m\leqq\sqrt{2-2\cos\theta}$

證明：

充分性：

令正N邊形相鄰三頂點$A(0, 0)$，$B(n^2-1)\cos\theta, (n^2-1)\sin\theta)$，$C((n^2-1), 0)$今假設A在 $r=1$ 之圓上，B在 $r=m$ 之圓上，C在 $r=n$ 之圓上，則圓 $O':(x+1)^2+y^2=n^2$ 為 $\overline{PA}:\overline{PC}=1:n$ 之P 點軌跡（阿波羅圓），P 為同心圓之圓心



(i)$\overline{BC}$ 之中垂線M：$x\sin\theta=y(1+\cos\theta)$ 和圓 O' 恆有交點，故在交點處 $\overline{PB}=\overline{PC}=n$，又已知$m\leqq n$ $\therefore Max\{m\}=n$

(ii)$\overline{AB}$之中垂線L：$2x\cos\theta+2y\sin\theta=n^2-1$

且 O' 至 L 的距離$=\dfrac{\left|-1\times 2\cos\theta+0\times\sin\theta-n^2+1\right|}{\sqrt{(2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}}=\dfrac{n^2+2\cos\theta-1}{2}$

所以當 $n\leqq 1+\sqrt{2-2\cos\theta}$時，圓 O' 和 L 恆有交點，故在交點處 $\overline{PB}=\overline{PA}=1$ $\therefore Min\{m\}=1$

(iii)當$n>\sqrt{2-2\cos\theta}$欲證： $P(-1+n\cos\alpha, n\sin\alpha)$

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}\geqq n-\sqrt{2-2\cos\theta}$$

$$\Leftrightarrow \overline{PB}^2\geqq\overline{PA}^2(n-\sqrt{2-2\cos\theta})^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{((n^4-n^2+2)+2(n^2-1)\cos\theta)-2n((n^2-1)\cos\theta+1)\cos\alpha-2n(n^2-1)\sin\theta\sin\alpha}{(n^2+1)-2n\cos\alpha}$$

$\geqq n^2-2\sqrt{2-2\cos\theta}\,n+(2-2\cos\theta)$

$\Leftrightarrow(\sqrt{2-2\cos\theta}\,n^2-2(1-\cos\theta)n+\sqrt{2-2\cos\theta}$

$+((1-\cos\theta)n^2-2\sqrt{2-2\cos\theta}\,n+(1-\cos\theta))\cos\alpha-(n^2\sin\theta-\sin\theta)\sin\alpha\geqq 0$

而此式可由三角疊合公式得出，故得證！

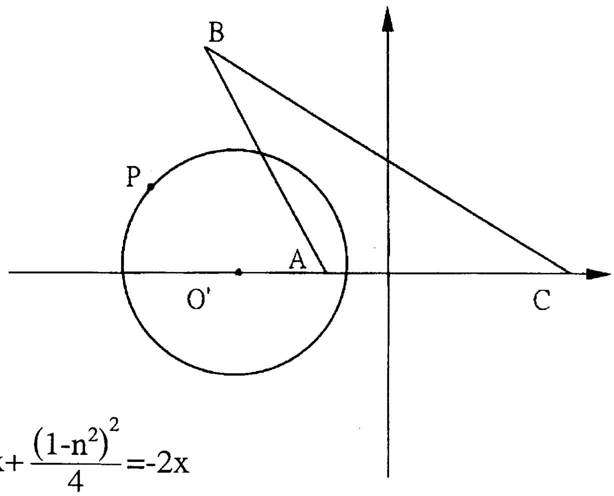
必要性：

今令正N邊形相鄰三頂點$A\left(\frac{1-n^2}{2},0\right)$，$B\left(\frac{1-n^2}{2}+(n^2-1)\cos\theta,(n^2-1)\sin\theta\right)$

$C\left(\frac{n^2-1}{2},0\right)$，則圓O'：

$\left(x+\frac{1+n^2}{2}\right)+y^2=n^2$

為之P點軌跡（阿波羅圓）



圓O'：$x^2+y^2=n^2-(1+n^2)x-\frac{(1-n^2)^2}{4}$

$\overline{PA}^2=\left(x-\frac{1-n^2}{2}\right)^2+y=(x^2+y^2)+(n^2-1)x+\frac{(1-n^2)^2}{4}=-2x$

$\overline{PB}^2=\left(x-\frac{1-n^2}{2}-(n^2-1)\cos\theta\right)^2+(y-(n^2-1)\sin\theta)^2$

$\Rightarrow\frac{\overline{PA}^2}{\overline{PB}^2}=1+(n^2-1)\cos\theta+\frac{2(n^2-1)\sin\theta\times y-(n^2-1)^2(1-\cos\theta)}{2x}$

令 $\frac{2(n^2-1)\sin\theta\times y-(n^2-1)^2(1-\cos\theta)}{2x}=k$

$\Rightarrow 2\left(k^2+(n^2-1)^2\sin^2\theta\right)x^2+2(n^2-1)^2\left(k(1-\cos\theta)+(n^2+1)\sin^2\theta\right)x$

$+(n^2-1)^4(1-\cos\theta)=0$ — ①

D≧0 （即①和圓O'有焦點）

$(\cos^2\theta-1)\left[k^2+2(\cos\theta-1)(n^2+1)k+\left((n^2+1)^2\cos^2\theta-2(n^2-1)^2\cos\theta+(n^4-6n^2+1)\right)\right]\geqq 0$

$$k^2+2(\cos\theta-1)(n^2+1)k+\left[(n^2+1)^2\cos^2\theta-2(n^2-1)^2\cos\theta+(n^4-6n^2+1)\right]\leq 0$$

$\therefore (1-\cos\theta)(n^2+1)-2n\sqrt{2-2\cos\theta}\leq k\leq(1-\cos\theta)(n^2+1)+2n\sqrt{2-2\cos\theta}$

而$n-\sqrt{2-2\cos\theta}\leq m\leq n$

$n^2+2-2\cos\theta-2n\sqrt{2-2\cos\theta}\leq m^2\leq n^2$

易知 m 在$\dfrac{\overline{PB}^2}{\overline{PA}^2}$範圍內

$\therefore$ m 在範圍內恆有解，得證！

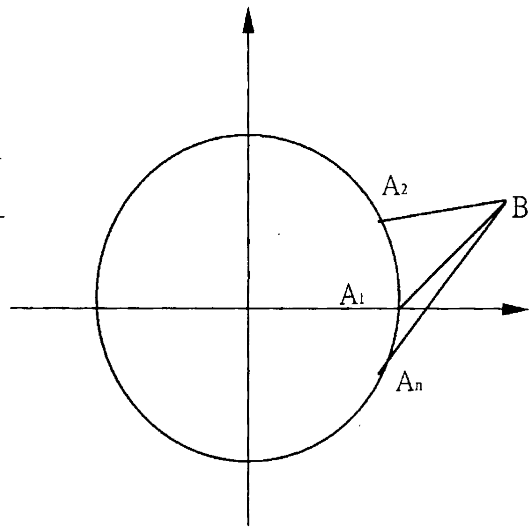
(2)

圓O為正n邊形之外接圓，各頂點分別為$A_1(a,0)$, $A_2(a\cos\frac{2\pi}{n}, a\sin\frac{2\pi}{n})$……$A_n(a\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}, a\sin\frac{2(n-1)\pi}{n})$，而同心圓之圓心為B(x,y)，已知 $\overline{BA_1}=1$，$\overline{BA_2}=m$，$\overline{BA_n}=n$，欲用1, m, n表示$\overline{BA_3}$, $\overline{BA_4}$ ………$\overline{BA_{n-1}}$

$(x-a)^2+y^2=1$ — φ

$(x-a\cos\theta)^2+(y-a\sin\theta)^2=m^2$ — κ

$(x-a\cos\theta)^2+(y+a\sin\theta)^2=n^2$ — λ



$\lambda-\kappa$ $2y\times 2a\sin\theta=n^2-m^2$

$$y=\frac{n^2-m^2}{4a\sin\theta}$$

$\kappa-\varphi$ $2ax(1-\cos\theta)-2ay\sin\theta=m^2-1$

$$2ax(1-\cos\theta)=m^2-1+\frac{n^2-m^2}{2}$$

$$x=\frac{n^2+m^2-2}{4a(1-\cos\theta)}=\frac{t}{4a}$$

將x,y帶入φ $(\frac{t}{4a}-a)^2+(\frac{s}{4a})^2=1$

$(t-4a^2)^2+(s)^2=16a^2$

$16a^4-8ta^2+t^2+s^2=16a^2$

$16a^4-8(t+2)a^2+(t^2+s^2)=0$

$D=(8(t+2))^2-4\times16\times(t^2+s^2)$

$=64(4t+4-s^2)$

而到了這裡已完全沒有未知數的存在，故其他同心圓的半徑可經計算得出。

（四）平面上任給 n 條交於一定點的相異直線，判斷是否能在每條線上各取一點，使其為正 n 邊形的頂點。並研究本命題成立之充要條件。

<引理4-1>：

（參考「幾何學辭典」p.404~406，X部貞市郎著，九章出版社）

已知：

平面上一定直線L及一定點A，

一定三角形ABC，其中B在L上

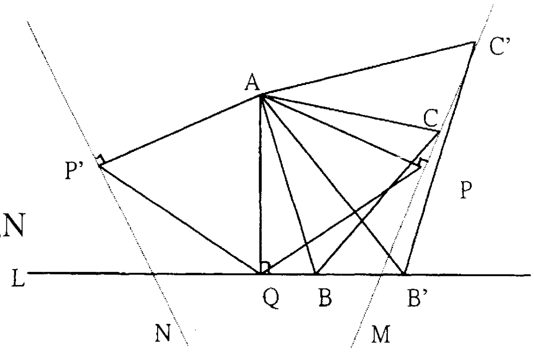
B'為直線L上的動點，

$\triangle AB'C' \sim \triangle ABC$

作$\overline{AQ} \perp L$於Q，並作$\triangle AQP \sim \triangle ABC$，

$\triangle AQP' \sim \triangle ABC$（兩邊），再作直線M,N

分別過P，P' 與$\overline{AP}$，$\overline{AP'}$垂直，



性質：

1.$\forall B' \in L$，C在M或N上

2.軌跡的稠密性，即$\forall C' \in \{M \cup N\}$ ，$\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$，皆存在$B' \in L$:

3.軌跡速度：當B'點以速率T移動時，C'也會隨著以速率T'移動，

則 $T : T' = \overline{AB} : \overline{AC}$

甲.當 $n \geq 4$，n 為自然數時，我們將圖形放在座標平面上討論：

(1)只要 n 給定，對於所有的正n邊形，任相鄰兩頂點和其重心所構成的三角形（以後稱之「特徵三角形」），其形狀是固狀的；對於不同的 n，特徵三角形的形狀也不一樣。而只要特徵三角形的位置和大小固定了，此正 n 邊形也就跟著固定了。所以我們可以根據這個性質來解決此問題。

(2)給定 n 條共點直線，由於角放縮時不會改變其大小，故可在任一條直線上任取一點A，設其為正 n 邊形的其中一個頂點。再設A點的鄰點B點，為另外一條直線上的動點。由於特徵三角形的形狀已知，故我們可求出特徵三角形的軌跡，進而求出正 n 邊形其餘 n-2 個頂點的軌跡。再考慮「共點直線」及正n 邊形的頂點相對配置，如此便能求出共點直線夾角的關係。

(3)定義：「STEP A to O」表以O為參考點，A的相對座標。

「agl(L,M)」表以射線M為起點，射線L與M的有向夾角。

由於引理中的軌跡有兩條，所以我們將此問題分成兩大部分來考慮：

今有一正n邊形$ABP_1P_2 \cdots P_{n-2}$，設A為某一「共點直線」上之定點。

B為另一「共點直線」上之動點，將此直線定為X軸，

「共點直線」的交點為原點O'。

設直線L_k通過原點與P_k，

$\theta_k=\mathrm{agl}(\overrightarrow{O'P_k}, \overrightarrow{O'B})$，$\alpha=\mathrm{agl}(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B})$

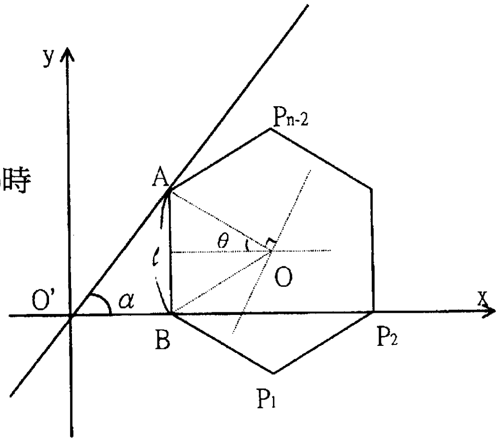
AB=1，O為正n邊形之中心，$\theta=\dfrac{\pi}{n}$

$\overline{AB}:\overline{AO}=1:\dfrac{1}{2\sin\theta}$，所以$B(\dfrac{l}{\tan\alpha}+t,0)$時

（t為實數），由引理4-1知：

$O(\dfrac{l}{\tan\alpha}+\dfrac{l}{2\tan\alpha}+\dfrac{t}{2},\dfrac{l}{2}+\dfrac{t}{2\tan\alpha})$，

STEP B to O=$(\dfrac{t}{2}-\dfrac{l}{2\tan\alpha},-\dfrac{l}{2}-\dfrac{t}{2\tan\alpha})$，



旋轉得　STEP P_k to O=

$$(\frac{1}{2\sin\theta}(t\bullet\sin(2k+1)\theta-l\bullet\cos(2k+1)\theta),\ \frac{-1}{2\sin\theta}(t\bullet\cos(2k+1)\theta+l\bullet\sin(2k+1)\theta)$$

$$\therefore\cot\theta_k=\frac{t\bullet\sin(k+l)\theta\bullet\cos k\theta+l\bullet\sin(k+l)\theta\bullet\sin k\theta+l\bullet\sin k\theta\bullet\cot\alpha}{t\bullet\sin(k+1)\theta\bullet\sin_k\theta-l\bullet\cos(k+l)\theta\bullet\sin k\theta}$$

$$t=\frac{l\bullet\sin k\theta\bullet\cos(\theta_k-(k+1)\theta)+l\bullet\sin k\theta\bullet\cot\alpha\bullet\sin\theta_k}{-\sin(k+1)\theta\bullet\sin(\theta_k-k\theta)}$$

t值對於每點皆相同。所以當l=1時，故：

$$\frac{\cos(\theta_1-\frac{2\pi}{n})+\cot\alpha\bullet\sin k\theta_1}{2\cos(\frac{\pi}{n})\bullet\sin k(\theta_1-\frac{\pi}{n})}=\frac{\sin\frac{k\pi}{n}\bullet\cos(\theta_k-\frac{(k+1)\pi}{n})+\sin\frac{\pi}{n}\bullet\cot\alpha\bullet\sin k\theta_k}{\sin\frac{(k+l)\pi}{n}\bullet\sin(\theta_k-\frac{k\pi}{n})}$$

$\forall k=2, 3, \cdots, n-2$

同理，我們考慮另一邊的軌跡的時候，也是用同樣的手法來解決，得到：

$$t=\frac{-\sin(k+1)\theta\bullet\cos(\theta_k-k\theta)+\sin\theta\bullet\cot\alpha\bullet\sin\theta_k}{\sin k\theta\bullet\sin(\theta_k-(k+1)\theta)}$$

t值對於每點皆相同。所以當l=1時，故：

$$\frac{-2\cos\frac{\pi}{n}\bullet\cos(\theta_1-\frac{\pi}{n})+\cot\alpha\bullet\sin\theta_1}{\sin(\theta_1-\frac{2\pi}{n})}=\frac{-\sin\frac{(k+1)\pi}{n}\bullet\cos(\theta_k-\frac{k\pi}{n})+\sin\frac{\pi}{n}\bullet\cot\alpha\bullet\sin\theta_k}{\sin\frac{k\pi}{n}\bullet\sin(\theta_k-\frac{(k+1)\pi}{n})}$$

$\forall k=2, 3, \cdots, n-2$

乙.根據以上的研究，我們得到以下結論：

(1)當n=3時，必可在每條線上各取一點，使其為正三角形之頂點。

(2)當n>3時：

已知有n條共點直線，任取一條為基準線，其餘的n-1條直線與此基準線的夾角分別為 $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-1}$。

若能夠在每條線上各取一點，使其為正n邊形的頂點，則其充要條件為：
必存在 { $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-1}$ } 的一種重排 { $\alpha, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-2}$ }
使得下列兩式至少有一式成立：

$$\frac{\cos(\theta_1-\frac{2\pi}{n})+\cot\alpha\cdot\sin\theta_1}{2\cos\frac{\pi}{n}\cdot\sin(\theta_1-\frac{\pi}{n})}=\frac{\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\cos(\theta_k-\frac{(k+1)\pi}{n})+\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cot\alpha\cdot\sin\theta_k}{\sin\frac{(k+1)\pi}{n}\cdot\sin(\theta_k-\frac{k\pi}{n})}$$

$\forall k=2, 3, \cdots, n-2$

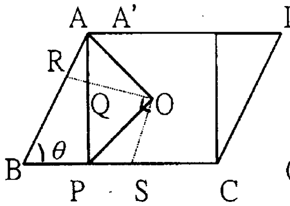
或 $$\frac{-2\cos\frac{\pi}{n}\cdot\cos(\theta_1-\frac{\pi}{n})+\cot\alpha\cdot\sin\theta_1}{\sin(\theta_1-\frac{2\pi}{n})}=\frac{-\sin\frac{(k+1)\pi}{n}\cdot\cos(\theta_k-\frac{k\pi}{n})+\sin\frac{\pi}{n}\cdot\cot\alpha\cdot\sin\theta_k}{\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\sin(\theta_k-\frac{(k+1)\pi}{n})}$$

$\forall k=2, 3, \cdots, n-2$

(五)平面上任給一個凸2n邊形，其中對邊平行且等長。判斷是否能在每條邊上各取一點，使其為正2n邊形的頂點。並研究本命題成立之充要條件。

<引理5-1>:
平行2n邊形必為點對稱圖形，且其內接之正2n邊形（若存在）之重心恰為此平行2n邊形的對稱中心。

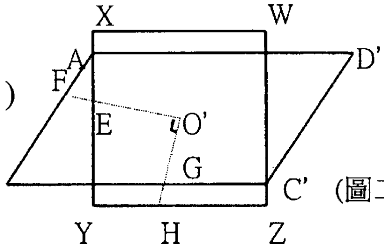
1.當n=2時：
正方形：顯然可做無限多個。
平行四邊形：



(圖一)

(1)當四邊形如圖一（ABCD非正方形）
即 $\overline{BC} = \overline{AB}(\sin\theta+\cos\theta)$時　($\theta \leq 90°$)
其內接正方形只有如圖這樣的一個

(2)將圖一之$\overrightarrow{BC}$長度加長，使$\overline{BC}>\overline{AB}(\sin\theta+\cos\theta)$
如圖二之ABC'D'，則平行四邊形的中心從O
沿$\overrightarrow{BC}$之方向平行移至O'，今以O'為中心，
$\overline{BC'} - \overline{AB}\cos\theta$為邊長作正方形XWZY



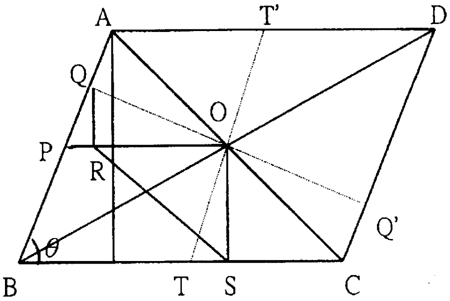
(圖二)

若ABC'D'存在內接正方形，不妨設其中兩端點為F,G。則因為
$\overline{O'F} > \overline{O'E} = \overline{O'H} > \overline{O'G}$,故ABC'D'不存在內接正方形
（因為其中心應為O' 且 $\overline{O'F} = \overline{O'G}$ 應成立）
故當$\overline{BC}>\overline{AB}(\sin\theta+\cos\theta)$時無解，同理$\overline{AB} > \overline{BC}$ $(\sin\theta+\cos\theta)$時亦無解。

(3)當 $\frac{\overline{AB}}{\sin\theta+\cos\theta} \leq \overline{BC} \leq \overline{AB}$ $(\sin\theta+\cos\theta)$ 時有解。證明如下：

作$\overline{OS}\perp\overline{BC}$於S，以$\overline{OS}$為股，作

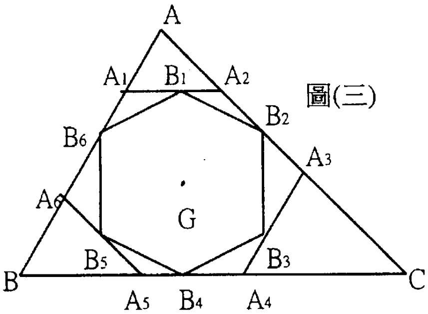
等腰直角三角形RSO，並作$\overline{RQ}\perp\overline{OR}$交$\overleftrightarrow{AB}$於Q。在$\overleftrightarrow{BC}$上取點T使得$\overline{TS}=\overline{QR}$，則△OTS=△OQR。此時以O為對稱中心，將Q,T分別對稱到Q',T'，則四邊形QTQ'T'為內接於平行四邊形ABCD之正方形，故只須證明Q在$\overline{AB}$上，T在$\overline{BC}$上即可。



2.當n-3時：

(1)我們把平行6邊形的6個邊延長出去，構成一三角形。而只要此三角形決定後，平行6邊形的6個角亦可決定。我們試著討論，當此平行6邊形的6個角決定後，其六個邊要滿足什麼條件，才能在此平行6邊形內接一個正6邊形。

假設一平行6邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，如圖，將其邊延長得到△ABC。設正6邊形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6$內接於$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$，其重心為G，則G亦為正$\triangle B_2B_4B_6$之重心。而因為$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$為對G的點對稱圖形，



圖(三)

所以$d(G,\overline{A_1A_2})=d(G,\overline{A_4A_5})$

$d(G,\overline{A_2A_3})=d(G,\overline{A_5A_6})$，$d(G,\overline{A_3A_4})=d(G,\overline{A_6A_1})$

因此只要G再決定了，那平行六邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$也就決定了。

<引理5-2>:

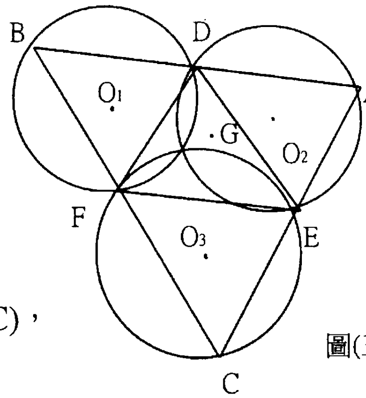
一正三角形ABC內接的正三角形DEF之重心恰為ABC的重心。

(2)當平行6邊形之內角皆為120°時，則其有內接正6邊形之充要條件為此平行6邊形為正6邊形。

<引理5-3>:

設△DEF為內接於△ABC之正三角形。圓O_1,O_2,O_3,分別為△BDF，△ADE，△CEF之外接圓。現以三角形△DEF的重心為原點建立高斯平面。其實部軸平行$\overline{EF}$。

若$\overrightarrow{O_1B}$的輻角為θ，則$\overrightarrow{O_2A}$的輻角為$\theta-(60^\circ+\angle C)$，$\overrightarrow{O_3C}$的輻角為$\theta+(60^\circ+\angle A)$。



圖(三)

（註：引理5-3求出之$\overrightarrow{O_2A}$、$\overrightarrow{O_3C}$的輻角使得θ在某範圍內△ABC恆外接於△DEF且恆相似於原△ABC—即θ值不影響△ABC之形狀。）

<引理5-4>:

複數平面上有△ABC和其內部一點P，則點P可表示為

$\alpha A+\beta B+(1-\alpha-\beta)C \quad (\alpha,\beta \in R^{+})$

<引理5-5>：三線性坐標之定義與坐標轉換：

以下引理摘錄自科學教育月刊（第198期Page.30）

設△$A_1A_2A_3$與點P在同一平面上，若點P至$\overleftrightarrow{A_2A_3}$,$\overleftrightarrow{A_3A_1}$,$\overleftrightarrow{A_1A_2}$的有向距離分別為$\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 則對每個非零實數k，有序三實數（$k\delta_1$：$k\delta_2$：$k\delta_3$）稱為點對P對△$A_1A_2A_3$（稱為參考三角形）的一組三線性座標。

設直角座標A_1（x_1, y_1）、A_2（x_2, y_2）、與A_3（x_3, y_3）、則P的直角座標為：

$$\left(\frac{a_1\delta_1x_1+a_2\delta_2x_2+a_3\delta_3x_3}{a_1\delta_1+a_2\delta_2+a_3\delta_3}, \frac{a_1\delta_1y_1+a_2\delta_2y_2+a_3\delta_3y_3}{a_1\delta_1+a_2\delta_2+a_3\delta_3}\right)$$

3.因A，B，C，G之複數座標皆可求出，如此重心G可以$\alpha A+\beta B+(1-\alpha-\beta)C$之形式確定座標，再利用引理5-5，將G化成$d_1:d_2:d_3$之形式，其中$d_1:d_2:d_3$為G到△ABC的距離比，從而確立出平行2n邊形的形狀。

結論：

1.當n=2時：

設θ為此平行四邊形中較小的內角（即$\theta \leq 90^\circ$），r為長邊比短邊的比值若且唯若$r \leq \sin\theta+\cos\theta$，則此平行四邊形可作內接正方形。

2.當n=3時：

將此平行六邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$之邊$\overline{A_1A_2}$，$\overline{A_3A_4}$，$\overline{A_5A_6}$延長，交於P,Q,R三點，則：

(1)當此平行六邊形之六個內角皆為120度時，若且唯若其存在內接正六邊形，則此平行六邊形為正六邊形。

(2)當此平行六邊形之六個內角不全相等時（即△PQR不是正三角形）我們可先找出△PQR之內接正三角形的重心G軌跡，再利用重心G到此平行六邊形的三組對邊的距離分別相等之性質，找出此時所有存在內接正六邊形之平行六邊形。

四、結論

（一）關於平面上任給n條平行線，判斷是否能在每條線上各取一點，使其為正n邊形的頂點之問題：

平面上有n條平行線，其相鄰兩條之間距離由上而下分別為

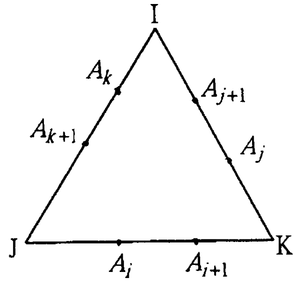
$d_1, d_2, d_3, \cdots, d_{n-1}$。且滿足$\begin{cases} d_1:d_3:\cdots:d_{2k+1}:\cdots=\sin\frac{1}{n}\pi:\sin\frac{3}{n}\pi:\cdots:\sin\frac{2k+1}{n}\pi:\cdots \\ d_2:d_4:\cdots:d_{2m}:\cdots=\sin\frac{2}{n}\pi:\sin\frac{4}{n}\pi:\cdots:\sin\frac{2m}{n}\pi:\cdots \end{cases}$

則可在此n條平行線上各取一點，使其為正n邊形的頂點。

（二）關於空間上任給n條平行線，判斷是否能在每條線上各取一點，使其為正n邊形的頂點之問題：

1.其命題之充要條件為截n邊形為「伸縮n邊形」。

其中伸縮n邊形為一正n邊形經由以（1,k）為伸縮常數數對之伸縮變換後，所形成之n邊形。



2.當n=3時：

截三角形為任意三角形皆可。

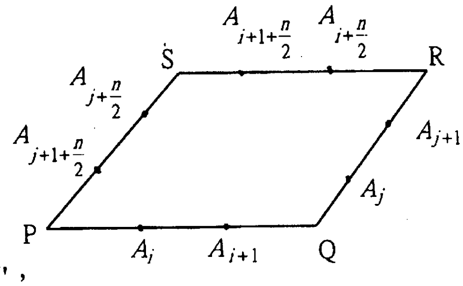
3.當n=4時：

其充要條件為截四邊形為平行四邊形。

4.當n>4時：

令$A_1A_2\cdots A_n$為一正n邊形，$A_1'A_2'A_n'$為其截n邊形。

定義$A_{n+1}=A_1$，$A'_{n+1}=A_1'$



(1)若n為奇數：其充要條件為：

$\forall i,j,k\in N$，$i\neq j\neq k$，$1\leqq i,j,k\leqq n$，

$\overleftrightarrow{A_i'A_{i+1}'}, \overleftrightarrow{A_j'A_{j+1}'}, \overleftrightarrow{A_k'A_{k+1}'}$ 任兩條不平行，且

設$\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$，$\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$ 和 $\overleftrightarrow{A_kA_{k+1}}$交成一三角形IJK，

$\overleftrightarrow{A_i'A_{i+1}'}$，$\overleftrightarrow{A_j'A_{j+1}'}$ 和 $\overleftrightarrow{A_k'A_{k+1}'}$ 交成一三角形I'J'K'，

則 $\overline{IA_k}:\overline{A_kA_{k+1}}:\overline{A_{k+1}J}=\overline{I'A_k'}:\overline{A_k'A_{k+1}'}:\overline{A_{k+1}'J'}$ …(1)

$\overline{JA_i}:\overline{A_iA_{i+1}}:\overline{A_{i+1}K}=\overline{J'A_i'}:\overline{A_i'A_{i+1}'}:\overline{A_{i+1}'K'}$ …(2)

$\overline{KA_j}:\overline{A_jA_{j+1}}:\overline{A_{j+1}I}=\overline{K'A_j'}:\overline{A_j'A_{j+1}'}:\overline{A_{j+1}'I'}$ …(3)

(2)若n為偶數：其充要條件為

$\forall i,j,k\in N$，$i\neq j$，$1\leqq i,j\leqq \frac{n}{2}$，

$\overleftrightarrow{A_i'A_{i+1}'} = \overleftrightarrow{A'_{i+\frac{n}{2}}A'_{i+1+\frac{n}{2}}}$，$\overleftrightarrow{A_j'A_{j+1}'} = \overleftrightarrow{A'_{j+\frac{n}{2}}A'_{j+1+\frac{n}{2}}}$。

且

設 $\overleftrightarrow{A_iA_{i+1}}$，$\overleftrightarrow{A_jA_{j+1}}$，$\overleftrightarrow{A_{i+\frac{n}{2}}A_{i+1+\frac{n}{2}}}$，$\overleftrightarrow{A_{j+\frac{n}{2}}A_{j+1+\frac{n}{2}}}$，交成一平行四邊形PQRS；

$\overleftrightarrow{A_i'A_{i+1}'}$，$\overleftrightarrow{A_j'A_{j+1}'}$，$\overleftrightarrow{A'_{i+\frac{n}{2}}A'_{i+1+\frac{n}{2}}}$，$\overleftrightarrow{A'_{j+\frac{n}{2}}A'_{j+1+\frac{n}{2}}}$，交成一平行四邊形P'Q'R'S'；

則 $\overline{PA_i} : \overline{A_iA_{i+1}} : \overline{A_{i+1}Q} = \overline{P'A_i'} : \overline{A_i'A_{i+1}'} : \overline{A_{i+1}'Q'}$

$= \overline{RA_{i+\frac{n}{2}}} : \overline{A_{i+\frac{n}{2}}A_{i+1+\frac{n}{2}}} : \overline{A_{i+1+\frac{n}{2}}S} = \overline{R'A'_{i+\frac{n}{2}}} : \overline{A'_{i+\frac{n}{2}}A'_{i+1+\frac{n}{2}}} : \overline{A'_{i+1+\frac{n}{2}}S'}$ …(4)

且 $\overline{QA_j} : \overline{A_jA_{j+1}} : \overline{A_{j+1}R} = \overline{Q'A'_j} : \overline{A'_jA'_{j+1}} : \overline{A'_{j+1}R'}$

$= \overline{SA_{j+\frac{n}{2}}} : \overline{A_{j+\frac{n}{2}}A_{j+1+\frac{n}{2}}} : \overline{A_{j+1+\frac{n}{2}}P} = \overline{S'A'_{j+\frac{n}{2}}} : \overline{A'_{j+\frac{n}{2}}A'_{j+1+\frac{n}{2}}} : \overline{A'_{j+1+\frac{n}{2}}P'} \cdots (5)$

（三）平面上任給n個同心圓，判斷是否能在每個圓上各取一點，使其為正n邊形的頂點之問題：

N個同心圓最短之三半徑1:m:n，且$1 \leq m \leq n$ $(n \neq 1)$，m, $n \in R$若能在三個圓上各取一點，使其成正N邊形之相鄰三頂點，則：

$$\begin{cases} 1 < n \leqq 1+\sqrt{2-2\cos\theta} \Rightarrow 1 \leqq m \leqq n \\ 1+\sqrt{2-2\cos\theta} < n \Rightarrow n-\sqrt{2-2\cos\theta} \leqq m \leqq n \end{cases} \quad (\theta\text{為正N邊形之內角})$$

$\Leftrightarrow n-m \leqq \sqrt{2-2\cos\theta}$

而其他同心圓的半徑可由前述方法經計算得出。

（四）平面上任給n條交於一定點的相異直線，判斷是否能在每條線上各取一點，使其為正n邊形的頂點之問題：

1.當n=3時，必可在每條線上各取一點，使其為正三角形之頂點。

2.當n>3時：

已知有n條共點直線，任取一條為基準線，其餘的n-1條直線與此基準線的夾角分別為$\varnothing_1, \varnothing_2, \cdots, \varnothing_{n-1}$。

若能夠在每條線上各取一點，使其為正n邊形的頂點，則其充要條件為：必存在$\{\varnothing_1, \varnothing_2, \cdots, \varnothing_{n-1}\}$的一種重排$\{\alpha, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{n-2}\}$

使得下列兩式至少有一式成立：

$$\frac{\cos(\theta_1-\frac{2\pi}{n})+\cot\alpha \bullet \sin\theta_1}{2\cos\frac{\pi}{n} \bullet \sin(\theta_1-\frac{\pi}{n})} = \frac{\sin\frac{k\pi}{n} \bullet \cos(\theta_k-\frac{(k+1)\pi}{n})+\sin\frac{\pi}{n} \bullet \cot\alpha \bullet \sin\theta_k}{\sin\frac{(k+1)\pi}{n} \bullet \sin(\theta_k-\frac{k\pi}{n})}$$

$\forall k=2, 3, \cdots, n-2$

或 $$\frac{2\cos\frac{\pi}{n} \bullet \cos(\theta_1+\frac{\pi}{n})+\cot\alpha \bullet \sin\theta_1}{\sin(\theta_1+\frac{2\pi}{n})} = \frac{\sin\frac{(k+1)\pi}{n} \bullet \cos(\theta_k-\frac{k\pi}{n})+\sin\frac{\pi}{n} \bullet \cot\alpha \bullet \sin\theta_k}{\sin\frac{k\pi}{n} \bullet \sin(\theta_k+\frac{(k+1)\pi}{n})}$$

$\forall k=2, 3, \cdots, n-2$

（五）平面上任給一個凸2n邊形，其中對邊平行且等長。判斷是否能在每條邊上各取一點，使其為正2n邊形的頂點之問題：

1.當n= 2時：

設θ為此平行四邊形中較小的內角（即$\theta \leqq 90^\circ$），r為長邊比短邊的比

值若且唯若$r \leq \sin\theta + \cos\theta$，則此平行四邊形可作內接正方形。

2.當n=3時：

將此平行六邊形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$之邊A_1A_2，A_3A_4，A_5A_6 延長，交於P,Q,R三點，則：

(1)當此平行六邊形之六個內角皆為120度時，若且唯若其存在內接正六邊形，則此平行六邊形為正六邊形。

(2)當此平形六邊形之六個內角不全相等時（即△PQR不是正三角形）我們可先找出△PQR之內接正三角形的重心G的軌跡，再利用重心G到此平行六邊形的三組對邊的距離分別相等之性質，找出此時所有存在內接正六邊形之平行六邊形。

五、參考文獻及資料

幾何學辭典	p.404~406	X部貞市郎著	九章出版社
科學教育月刊第198期		Page.30	台師大科教中心
～三線性座標與面積座標		趙文敏著	

評語

本作品探究「平面上n條平行線，確定可否在每條線上各取一點，使得這n個點決定出一個正n邊形之頂點」，綜合幾何證法之充要條件並給出適當的推廣，為一難得之好作品；尤其4位同學長期合作、共同研究，始有本作品之呈現，頗具創意、解說細嫩，數學基本觀念或能力頗突顯，研究精神等均值得嘉勉。