

三體運動模型與拉格朗日點上的小行星

高中組物理科第二名

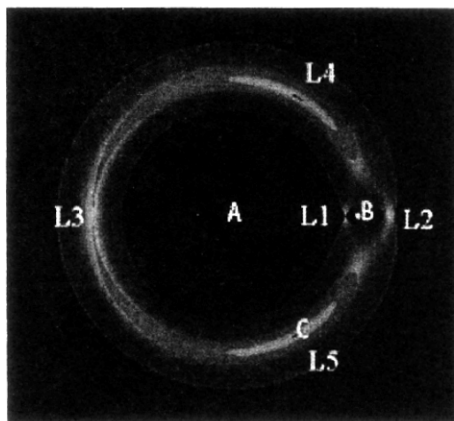
台北市立第一女子高級中學

作者：李宜真、郭婉如

指導教師：李美英

一、研究動機

在練習作電腦動畫的過程中，做出以電腦模擬自由落體及雙星運動，但以上都屬可簡單分析出結果的運動，因此想到以電腦模型預知無法簡單分析的問題。在牛頓雜誌第169期，有一篇文章曾提到拉格朗日點：假設宇宙中有三個星體，星體A（太陽）質量甚大於星體B（木星），而B質量遠大於星體C。當C位於五個稱為拉格朗日點的位置上時（如圖），會與B的角速度一致，環繞A公轉。圖中L₁L₂L₃三點處於極不安定的平衡位置，而位在L₄L₅的小行星群即使因撞擊而略為離開拉格朗日點，由於A、B引力的微妙作用，仍會回到穩定的點上。我們就是對這情形感到興趣。



二、研究目的

- (一) 根據牛頓運動公式，設計電腦程式，模擬三質點在受萬有引力作用時，可能的運動情形。
- (二) 若小行星原位在拉格朗日點上，與太陽、木星成正三角形，穩定地以相同角速度與木星繞太陽運轉，突然受到外來擾動，而使小行星脫離原位置，設小行星之速度量值、方向均不受影響，利用電腦模擬，探討小行星位置改變後是否會回到拉格朗日點及為何會如此。

三、研究設備

個人電腦 SUN工作站 Microsoft Excel 7.0 Microsoft Visual Basic5.0
Turbo C++ 3.0 GNU project C++ Compiler

四、研究過程

- (一) 設計電腦程式，模擬三體運動，其基本假設為：
1. 宇宙中只有三個星體，不考慮其他星體引力作用的影響。
 2. 三星體皆視為質點，滿足牛頓萬有引力定律及運動三大定律，且三星體間不會有額外的相互作用，如某一星體的物質流入其他星體。
 3. 以座標系來描述三星相對位置，速度及加速度。
- (二) 只以小行星位置為唯一變因，分別把小行星放在以拉格朗日點為基準的五個方位上：沿X，Y軸正負向，Z軸負向偏離 $10^m \sim 10^{11}m$ 。每 10^7sec 記錄一次檔案數據，使模型模擬 $4 \times 10^8 \text{sec}$ （即一圈），得到41次數據，以0.1...40標記。並兼以觀察小行星的長期模擬的軌跡圖。

五、實驗結果

- (一) 根據牛頓萬有引力定律及運動三大定律設計電腦程式（如表）
由以上假設所發展出的主要原始程式碼（C++版）：

程 式 碼	註 解
<pre>for(rcounter=0;rcounter<=40000000;rcounter++){ deltax[0]=sx[1]-sx[2]; deltax[0]=sy[1]-sy[2]; deltax[0]=sz[1]-sz[2]; deltax[1]=sx[2]-sx[0]; deltax[1]=sy[2]-sy[0]; deltax[1]=sz[2]-sz[0]; deltax[2]=sx[0]-sx[1]; deltax[2]=sy[0]-sy[1]; deltax[2]=sz[0]-sz[1];</pre>	<p>sx[2],sy[2],sz[2]為儲存質點位置之一維陣列。 計算各質點相對位置向量。</p>
<pre>r3[0]=pow(pow(deltax[0],2)+pow(deltay[0],2)+ pow(deltaz[0],2),1.5); r3[1]=pow(pow(deltax[1],2)+pow(deltay[1],2)+ pow(deltaz[1],2),1.5); r3[2]=pow(pow(deltax[2],2)+pow(deltay[2],2)+ pow(deltaz[2],2),1.5);</pre>	<p>計算各質點距離的三次方。</p>
<pre>for(t=0;t<=2;t++){ k=(t+4)%3; p=(t+5)%3; if(deltax[k]==0&&deltay[k]==0&& deltax[k]==0) {axtp=0;aytp=0;aztp=0;}</pre>	<p>預防計算$F = \frac{Gmm}{r^2}$時，因$r=0$產生無意義的除法，在同一位置的兩質點作用力視為0。</p>

<pre> else{ axtp=mass[p]*deltax[k]/r3[k]; aytp=mass[p]*deltay[k]/r3[k]; aztp=mass[p]*deltaz[k]/r3[k];} </pre>	<p>計算m_2對m_1的萬有引力所產生的加速度。</p> $\frac{a_x}{G} = \frac{m_2 \Delta x}{r^3}$ $\frac{a_y}{G} = \frac{m_2 \Delta y}{r^3}$ $\frac{a_z}{G} = \frac{m_2 \Delta z}{r^3}$
<pre> if(deltax[p]==0&&deltay[p]==0&& deltaz[p]==0) {axtk=0;aytk=0;aztk=0;} else{ axtk=-mass[k]*deltax[p]/r3[p]; aytk=-mass[k]*deltay[p]/r3[p]; aztk=-mass[k]*deltaz[p]/r3[p];} ax[t]=g*(axtk+axtp); ay[t]=g*(aytk+aytp); az[t]=g*(aztk+aztp); </pre>	<p>同上。改為計算m_3對m_1的萬有引力產生的加速度。</p> <p>為加快計算速度，此時再將兩加速度相加並乘上萬有引力常數。</p>
<pre> sx[t]=sx[t]+vx[t]*Ticker+0.5*ax[t]*Ticker*Ticker; sy[t]=sy[t]+vy[t]*Ticker+0.5*ay[t]*Ticker*Ticker; sz[t]=sz[t]+vz[t]*Ticker+0.5*az[t]*Ticker*Ticker;} vx[0]=vx[0]+ax[0]*Ticker; vy[0]=vy[0]+ay[0]*Ticker; vz[0]=vz[0]+az[0]*Ticker; vx[1]=vx[1]+ax[1]*Ticker; vy[1]=vy[1]+ay[1]*Ticker; vz[1]=vz[1]+az[1]*Ticker; vx[2]=vx[2]+ax[2]*Ticker; </pre>	<p>計算Ticker秒後的位置。</p> <p>計算Ticker秒後的速度。</p>
<pre> vy[2]=vy[2]+ay[2]*Ticker; vz[2]=vz[2]+az[2]*Ticker;} </pre>	

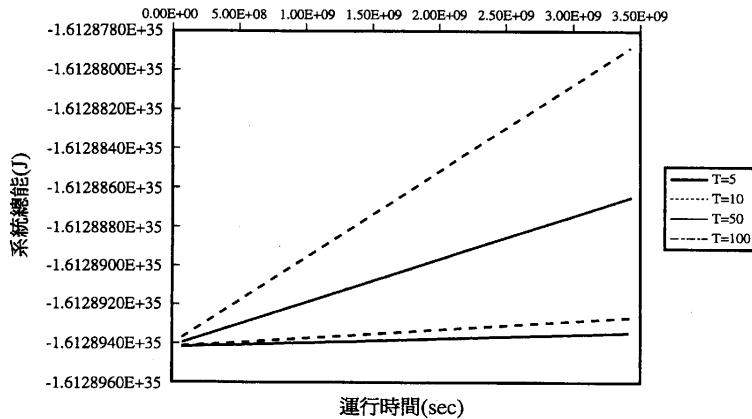
(二) 測試模型，選擇適當T值

T值為力的作用時間。本來因 $\mathbf{VoT} + \frac{1}{2} \mathbf{aT}^2$ 中，T越小越精確，但電腦無法表達「無限小」的概念。所以模擬三體運動時，需選擇適當的T值，使誤差不至於過大，又能有效率得到結果。

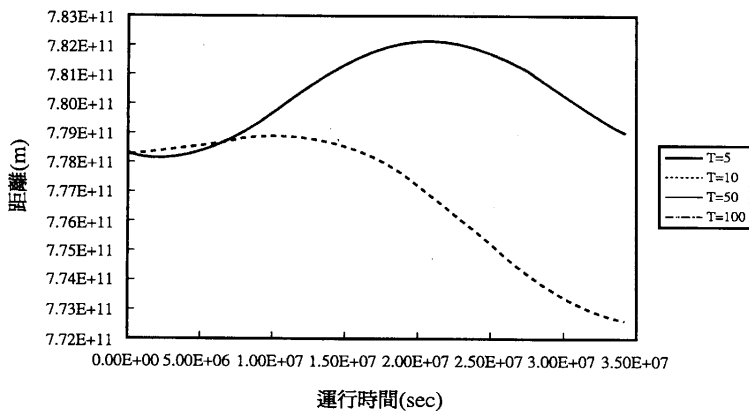
小行星的質量是以特洛伊群小行星的588號Achilles和944號Hidalgo的半徑平均，設小行星為球形，密度 3.6g/cm^3 估計質量。我們以系統總能增加的多寡來判定它的精確度，從上圖，考慮電腦運行的速度及精確度，選擇 $T=10$ 來研究小行星運動情形。

	太陽	木星	小行星
質量	1.9892e30	1.89871934e27	2e8
X方向速度	10.80622842774	-11321.18325	0
Y方向速度	-6.238978889835	6536.288195	13072.57639
Z方向速度	0	0	0
X座標	0	3.891489392e11	7.782978785e11
Y座標	0	6.740257345e11	0
Z座標	0	0	0

(1)不同T值的系統總能比較



(2)小行星的公轉半徑



(三) 實驗數據

1. 符號說明：

LG：拉格朗日點

X+：初始條件小行星在LG右方(x軸正向)的所有數據

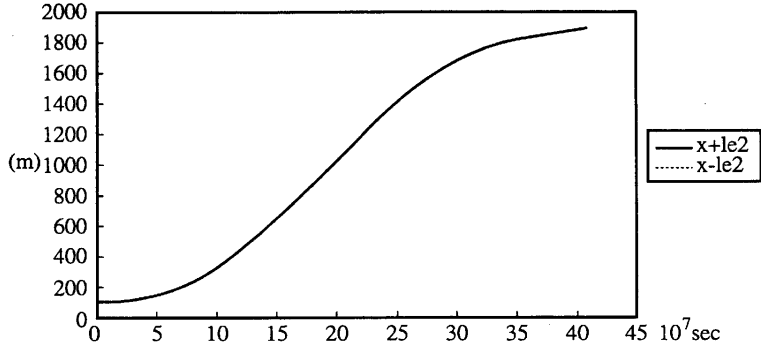
X+10²：初始條件小行星在LG右方10²M的所有數據

A：加速度

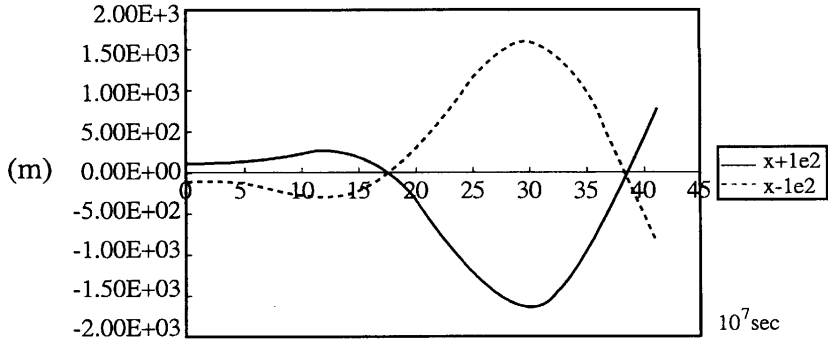
其餘以此類推

2. 圖表（在此僅列出離LG點10m²繞行一圈的圖）

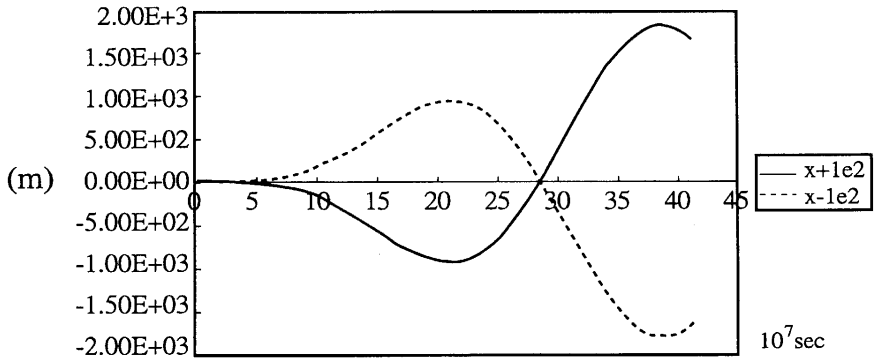
(1) $x+1e2$ 、 $x-1e2$ 與LG的距離



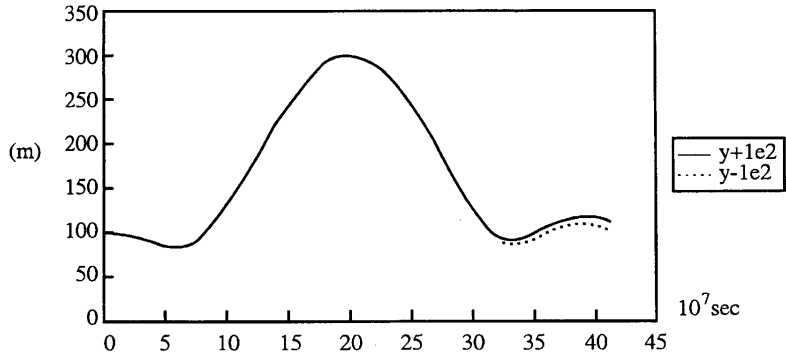
(2) $x+1e2$ 與LG的X座標差

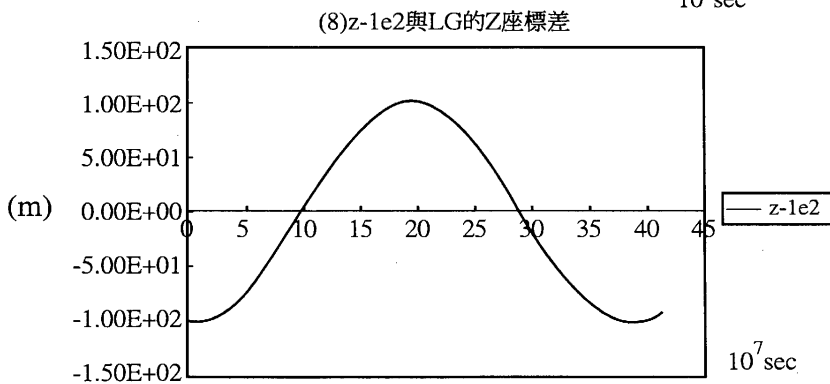
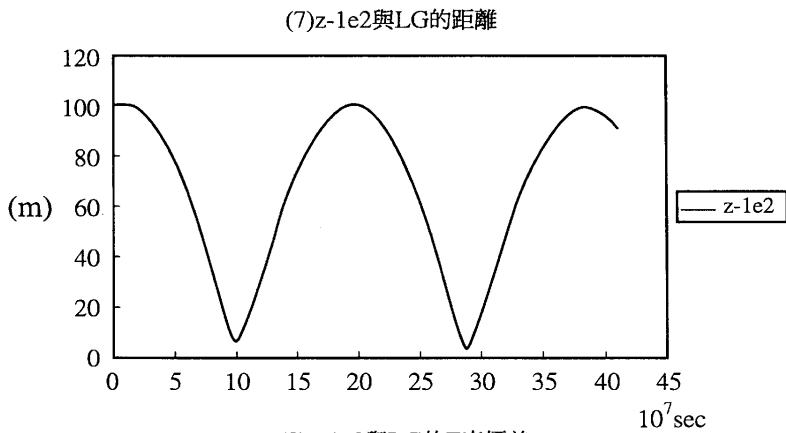
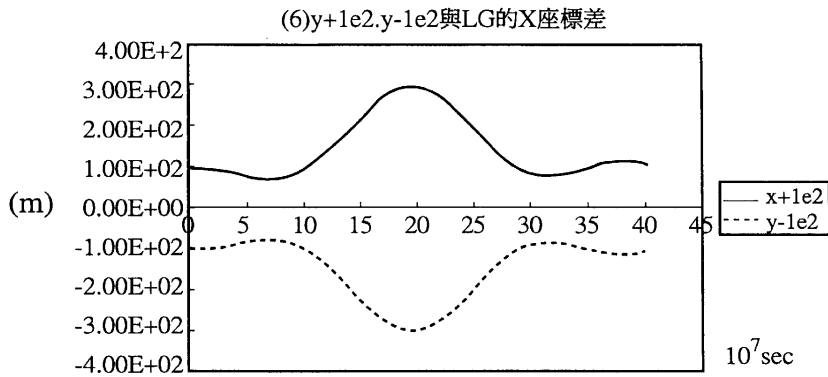
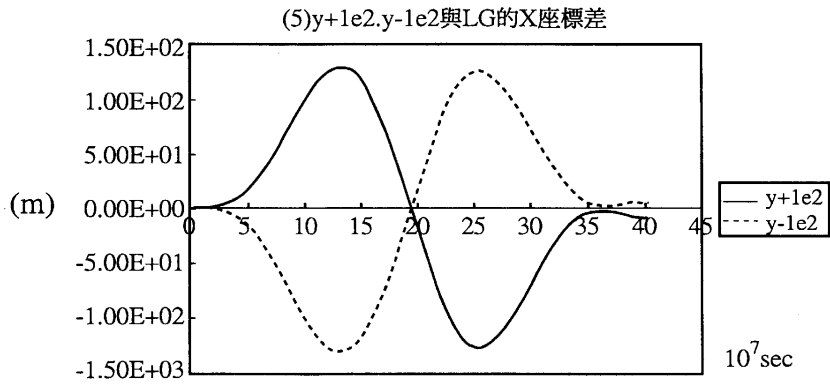


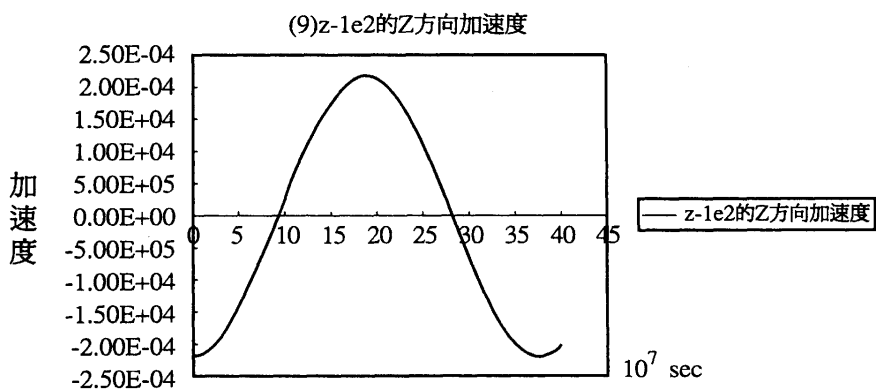
(3) $x+1e2$ 、 $x-1e2$ 與LG的Y座標差



(4) $y+1e2$ 、 $y-1e2$ 與LG的距離







六、討論

(一) 小行星在相同方位，不同距離的比較

從圖及數據可看出，當初始條件在相同方位時的位置變動情形很類似，也就是位置變化的比例近似相同，只是所對應的數量級隨著初始條件不同而不同，且成正比。例如初始條件為小行星距LG100m的數據約為距10m的10倍。可知同方向上，小行星受力情況相似，但隨離LG距離不同而大小不同。

(二) 小行星與LG的距離

- 1.X+, X-：從圖及數據可知，在一圈來看，不論X+, X-，小行星隨時間變化，越來越遠離拉格朗日點。不過從模擬較長時間的軌跡圖來看，小行星不會因此而散去，仍然在原本未偏離時的軌道附近運動，不過以上情形是在偏離不大時的情況。
- 2.Y+, Y-：在偏移不大的情況下，約 10^7 m內，在繞行一圈後，與LG的距離與初始條件時差不多，可是模擬更長時間時，已完全脫離原來的軌道，也就是說小行星到的擾動若是在Y方向上會比在X方向上不穩定。
- 3.Z-：小行星與LG距離隨時間有規律地變化，且距離都不大於初始條件的距離。

(三) 小行星與LG的X、Y座標差

- 1.X+, X-：X+, X-的X座標約略是以過LG平行Y軸的直線為對稱軸而Y座標則是以過LG平行X軸的直線為對稱軸。不過小行星在初始條件大於 10^9 m時，X-較X+易偏離軌道，推測其原因，因X-距太陽較近，受到太陽的影響較大，易往太陽的方向偏去。

2. Y+, Y- : Y+, Y-的X座標約略以過LG平行Y軸的直線為對稱軸，而Y座標則是以過LG平行X軸的直線為對稱軸。
3. Z- : 任一數據中，小行星與LG的X、Y座標差皆為0，也就是小行星與LG的X、Y座標相同。

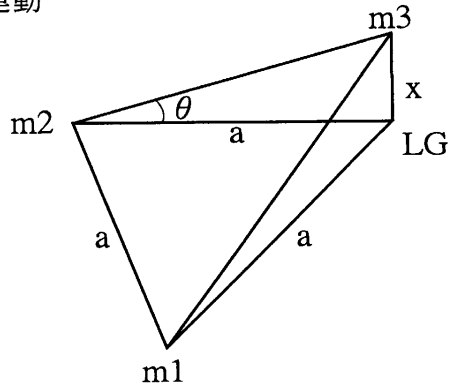
(四) 小行星與LG的Z座標差

1. X+, X-, Y+, Y- : 任一數據中，小行星與LG的Z座標差皆為0
2. Z- : 小行星與LG時間與位置的關係似乎是個簡諧運動

(五) 解釋Z-中，小行星的運動

1. 小行星在Z方向上的投影為簡諧運動

如右圖，m1為太陽，m2為木星，m3為小行星，木星、太陽、拉格朗日點成邊長為a的正三角形（在X、Y平面上）。小行星與LG距離X， $X \ll a$ 。設小行星的運動如模擬結果，與LG、X、Y座標差為0，則：



$$\text{木星施予小行星Z軸方向的力：} F_1 = \frac{Gm_2m_3}{a^2 + x^2} \times \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \doteq \frac{Gm_2m_3}{a^2} x$$

$$\text{太陽施予小行星Z軸方向的力：} F_2 = \frac{Gm_1m_3}{a^2 + x^2} \times \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \doteq \frac{Gm_1m_3}{a^3} x$$

$$\text{小行星所受Z方向合力：} F_1 + F_2 = \frac{Gm_3(m_1+m_2)}{a^3} x \propto x$$

而小行星受力方向又與其位移相反，故小行星在Z軸上的運動為簡諧運動。

2. 小行星運動在XY平面上的投影與小行星位在LG時的運動一致。

木星施予小行星的力在XY平面上的投影：

$$F_1 = \frac{Gm_2m_3}{a^2 + x^2} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \doteq \frac{Gm_2m_3}{a^2} \text{ 為一個與X無關的定值}$$

太陽施予小行星的力在XY平面上的投影：

$$F_2 = \frac{Gm_1m_3}{a^2 + x^2} \times \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \doteq \frac{Gm_1m_3}{a^2} \text{ 為一個與X無關的定值}$$

∴小行星任一時刻所受的力在XY平面上投影約與LG相同，且初始速度也與由LG出發的標準情況相同，所以小行星運動在XY平面上的

投影與小行星位在LG時的運動一致。

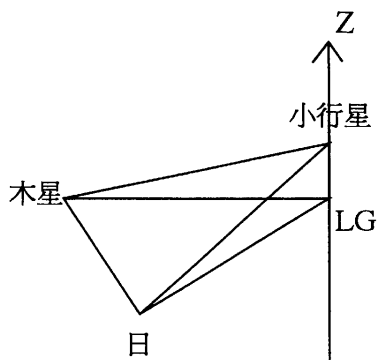
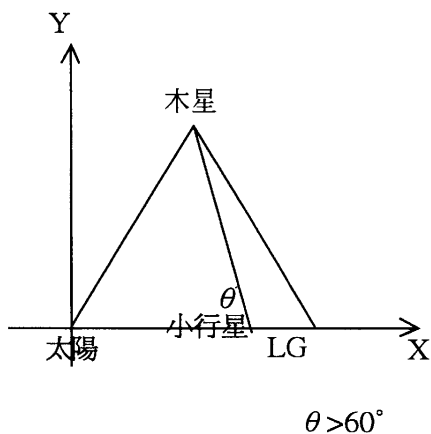
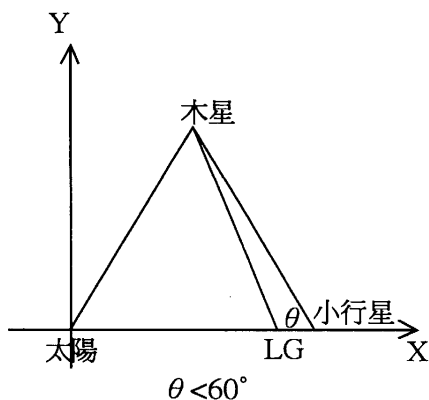
七、結論

我們從實驗數據可看出在L4、L5的小行星，只要受到的干擾不大，它會以原軌道為平均軌道，在附近作較複雜的運動，而不像位於L1、L2、L3的小行星只要受到些微擾動就會逐漸遠離原軌道的原因，主要是由於小行星、木星、太陽成正三角形這種特殊相關位置使得木星對小行星有調節作用，以最初小行星受到擾動的瞬間為例：

(一) 小行星初始位置在X+方向時，木星、日對小行星引力因距離增加而減弱，但只要偏離不大，這種差異不會很多，且木星對小行星作用力方向在X方向的分量增加，而小行星切線加速度不但因受到力減弱而減弱，且力的方向在Y方向的分量也減少，以上兩種效應使小行星向LG移動。

(二) 小行星初始位置在X-方向時，木星對小行星引力因距離減少而增加，但在X方向分量減少，減弱引力增加的效應，而小行星切線加速度增加，這兩種效應使得小行星往LG方向移動。

(三) 小行星的位移在Z方向上時，木星、日施小行星的作用力在X、Y分量上幾乎沒有差異，而在Z方向上的分量則指向LG，因此小行星也向LG方向移動。



八、參考資料

1996天文年鑑

牛頓雜誌第169期「受木星擾亂的小行星」

牛頓雜誌第163期「發現小行星的故事」

Theory of orbits , the restricted problem of three bodies/Victor Szebehely

Newton's Clock: Chaos in the Solar System

N-Body/Particle Simulation

Methods (<http://www.amara.com/papers/nbody.html>)

評語

本件作品旨在根據牛頓運動定律，設計電腦程式，以動畫模擬三個質點在受萬有引力作用之下的運動情形。研究結果對於少數特例，如三個質點的質量相等，且成正三角形，其模擬的運動尚屬合理。但對於比較一般的情況，即使是有名的拉格朗日點上小行星的運動，在本研究中並未能獲致合理的結果。整體而言，對三體運動的電腦模擬計算雖未臻正確、周詳，但以高中學生而言，能對此問題進行初步的探究，仍屬難得。