

散射水膜之研究

高中組物理科第一名

省立新莊高中

作者：蔡孟勳、劉怡初、劉佩琪、吳佳儒

指導教師：吳原旭

一、研究動機

有一天洗碗時，發現當水衝擊到碗盤的瞬間，水流偏折的方向和形式很特別。有的散成水花，有的出現和原方向垂直的角度散射出去，有的甚至形成一道像科幻卡通片的防護水膜，還有許許多多美麗又奇怪的圖形……簡直是不勝枚舉！不禁使我聯想到這些水流的散射運動軌跡，好像與我們剛剛才學到的平拋和斜拋運動有所關聯，但卻又有一些差異，於是我們決定對這奇妙的水膜展開研究與實驗，希望能揭開這神奇水膜的神祕面紗。

二、研究目的

- (一) 研究散射水膜之成因及特性。
- (二) 測量水膜形狀尋找經驗方程式。
- (三) 嘗試測量表面張力的新方法。
- (四) 經由水膜特性之探討來印證一些物理現象。

三、研究設備

- (一) 支柱及衝擊面裝置—直木棍、椅子底座、底片盒、光滑塑膠板。
- (二) 水循環系統—抽水機、水槽、水管。
- (三) 水流穩定系統—海綿、水管。
- (四) 測量系統—紗窗、自製特殊天平、量筒、綿線、尺。
- (五) 可調式支架—角鋼、S形掛鈎。

四、研究過程

- (一) 設計一套穩定易操控易測量之裝置，觀察比較各種不同衝擊情況下水膜的特性。
- (二) 控制流量，測出水口高度與衝擊瞬間速度之關係：
 1. 調整上水槽進水口及溢水口的流量，當槽內水位穩定後，以量筒和碼

錶測槽底出水口之流量，調整至流量為100 ml/s。

- 2.在天平一端的秤盤架放置衝擊座（底片盒及圓塑膠片），並以黏土固定，另一端秤盤架放等重的物體並調整歸零。
- 3.以天平測水柱衝擊力。
- 4.測出水口和衝擊面之間的距離h。
- 5.由衝擊力推導衝擊瞬間之速度。原理如下：

由牛頓運動第二定律：

$$力 = \frac{\text{動量變化量}}{\text{時間}}$$

$$F = \frac{\Delta mv}{\Delta t} \quad \therefore V = F \frac{\Delta t}{\Delta m} \quad \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \text{ 為單位時間內之水流量} \right)$$

- 6.由瞬時速度與距離關係反推出水口初速度，求得平均初速度為44cm/s。

(三) 測量水膜形狀

- 1.控制水量使水柱穩定，並垂直衝擊平面中心。
- 2.調整紗網高度，在每一個高度y下分別測出4組半徑值，再加以平均求出平均半徑r。
- 3.將水膜高度y與平均半徑r等實驗數據輸入電腦座標平面上，點出y-r關係圖。
- 4.設計電腦程式，以作圖法嘗試出可能的y-r軌跡方程式形態，並設其參數a、b、c。

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2y}{g}} (1 - ae^{by^c}) \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

- 5.設計電腦程式，尋找各組不同高度下的y-r方程式：
 - (1)由出水口速度和出水口與衝擊面之間的距離，可推出各高度下的水膜散射初速，代入方程式①。
 - (2)以電腦作圖找出a、b、c的範圍。
 - (3)用電腦尋找出最精密的參數a、b、c，使其誤差最小，得出各組不同高度下的水膜方程式。
- 6.分析各種高度水流衝擊下之v-a關係及b-c關係。
- 7.比較不同流量在各種高度水流衝擊下之散射水膜軌跡，並分析其v-a關係，b-c關係。

(四) 測表面張力：

1. 控制水量為100ml/s。
2. 由軌跡方程式算出各組水膜的最大半徑位置 γ_{max} 及 y 。
3. 利用自製天平，分別測量各組水膜在最大半徑時的衝擊力，並換算成瞬時速度 ν 。
4. 推導出平均表面張力大小 γ 。原理如下：
考慮在極短時間 Δt 內流過的水質量 Δm ，由衝擊瞬間至流到最大半徑處之過程中能量的變化情形。

在最大半徑處水流速度可表示為 $V = \frac{\Delta l}{\Delta t}$

(忽略水膜散射過程有關熱能變化之影響)

散射瞬間之重力位能 U_1 + 動能 E_{k1} + 表面張力作功

= (γ_{max}, y) 處之重力位能 U_2 + 動能 E_{k2}

表面張力所作的功 = $\gamma \times \Delta A = \gamma \times (A_2 - A_1)$

又 $\because A_1 \ll A_2$

$$\therefore \Delta A \approx A_2 = 2 \times 2 \pi r \Delta l$$

$$\therefore \Delta mgy + \frac{1}{2} \Delta m \nu^2 + \gamma \times 4 \pi r \Delta l = 0 + \frac{1}{2} \Delta m \nu^2$$

$$\Rightarrow 4 \gamma \pi r \Delta l = \frac{1}{2} \Delta m \nu^2 - \Delta mgy - \frac{1}{2} \Delta m \nu^2$$

同除以 Δt

$$\Rightarrow 4 \gamma \pi r \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta t} \nu^2 - \frac{\Delta m}{\Delta t} gy - \frac{1}{2} \frac{\Delta m}{\Delta t} \nu^2$$

$$\because \frac{\Delta l}{\Delta t} = \nu, \text{ 令流量 } \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho$$

$$\Rightarrow 4 \pi \gamma \nu = \frac{1}{2} \rho (\nu^2 - \nu^2 - 2gy)$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{\rho}{8 \pi r \nu} (\nu^2 - \nu^2 - 2gy)$$

五、實驗結果

(一) 流量100 ml/s，高度、衝擊力、速度之關係

高度 (cm)	衝擊力 (gw)	瞬時速度 (cm/s)	實高 (cm)	高度差 (cm)	出水口初速 (cm/s)
11.45	16.0	156.80	12.54	1.09	46.31
15.20	18.1	177.38	16.05	0.85	40.89
26.50	23.7	232.26	27.52	1.02	44.77
22.60	22.1	216.58	23.93	1.33	51.09
34.25	26.8	262.64	35.19	0.94	42.92
30.35	25.3	247.94	31.36	1.06	44.49
19.10	20.2	197.96	19.99	0.89	41.86
38.00	28.2	276.36	38.96	0.97	43.53
42.15	29.6	290.08	42.93	0.78	39.15
45.60	30.9	302.82	46.78	1.89	48.20
平均出水口速度			44.32cm/s		

(二) 水流量100^{ml}/s之測量結果與分析

100^{ml}/s各組水膜之y-r關係 (單位: cm)

y	$\frac{h}{r}$	15.31	17.03	21.20	26.18	30.02	33.58	37.01
2.90	7.88	8.53	10.30	11.11	11.35	12.00	12.50	
4.60	9.23	10.48	12.23	13.20	13.45	14.39	15.04	
6.55	10.33	11.33	13.35	14.71	14.97	16.18	16.96	
8.60	10.53	11.87	14.38	15.63	15.87	17.30	18.19	
10.25	10.33	11.98	14.63	15.99	16.21	17.75	18.71	
12.30	10.10	11.70	14.57	16.04	16.22	17.85	18.85	
13.95	9.48	11.18	14.23	15.80	15.95	17.59	18.60	
16.05	8.45	10.75	13.58	15.17	15.28	16.84	17.82	
17.80		9.75	12.90	14.38	14.45	15.87	16.80	
19.90		8.78	11.45	13.14		14.30		
21.54		7.13	9.98	12.05				

100^{ml}/s流量之各組參數a.b.c及誤差

高度(cm)	a	b	c	差(cm)
15.31	0.219	0.372	0.426	0.049
17.03	0.234	0.289	0.475	0.141
21.20	0.264	0.155	0.628	0.105
26.18	0.289	0.129	0.653	0.158
30.02	0.318	0.115	0.664	0.107
33.58	0.348	0.057	0.856	0.117
37.01	0.359	0.045	0.919	0.146

(三) 水流量120 ^{ml}/s之測量結果與分析

120^{ml}/s各組水膜之y-r關係 (單位: cm)

y	$\frac{h}{r}$	10.50	16.50	22.23	22.51	26.79	29.62	31.89	33.51	35.57	39.53
1.75	6.15	7.18	8.38	8.58	9.22	9.75	10.00	9.73	9.30	10.00	
3.81	8.78	10.75	12.18	11.73	12.77	13.83	13.65	14.30	14.93	15.21	
5.45	9.83	12.20	13.85	13.29	14.58	16.08	16.13	16.38	17.12	17.43	
7.60	10.35	13.30	15.38	14.60	16.17	17.60	18.38	18.33	18.93	20.00	
9.28	10.65	13.78	16.32	15.22	17.00	18.58	20.40	19.15	20.20	21.00	
11.40	10.70	13.92	16.78	15.62	17.60	19.50	20.60	20.53	21.25	22.10	
13.05	10.26	13.83	16.95	15.68	17.80	19.65	20.98	20.90	21.70	22.40	
15.25	9.90	13.43	16.88	15.49	17.75	19.73	20.95	20.98	21.88	22.63	
16.95	9.35	12.93	16.43	15.13	17.48	19.90	20.65	20.78	21.85	22.35	
19.05	8.32		15.95	14.47	16.90	19.23	20.20	20.60	21.60	21.95	
20.70	7.03		15.28	13.80	16.28	18.48	19.28	19.85	20.85	21.10	
22.85			14.28			17.35	18.10	18.55	19.80		
24.55						15.93					

120^{ml}/s流量之各組參數a、b、c及誤差

高度(cm)	a	b	c	差(cm)
10.50	0.161	0.417	0.434	0.112
16.50	0.212	0.230	0.550	0.095
22.23	0.255	0.137	0.634	0.072
22.51	0.256	0.190	0.544	0.174
26.79	0.285	0.121	0.640	0.156
29.62	0.305	0.056	0.847	0.086
31.89	0.316	0.045	0.900	0.173
33.51	0.365	0.020	0.847	0.147
35.57	0.335	0.040	0.900	0.155
39.53	0.362	0.021	1.085	0.137

(四) 水流量160^{ml}/s之測量結果與分析

160^{ml}/s各組水膜之y-r關係

y	$\frac{h}{r}$	11.00	14.62	20.20	24.21	27.98	30.00	32.62
2.90	8.95	9.93	11.45	9.80	13.35	14.10	13.38	
6.55	12.73	14.35	16.03	16.15	19.03	19.33	19.16	
10.25	14.38	16.25	18.98	19.85	22.70	22.75	22.70	
13.95	15.20	17.13	20.65	21.55	24.70	24.98	24.91	
17.80	15.12	17.38	21.40	22.05	26.28	26.13	26.14	
21.45	14.58	16.85	21.30	21.90	26.85	25.48	26.45	
25.45	13.43	15.65	20.75	21.00	26.58			
19.20	11.80				25.00			

160^{ml}/s流量之各組參數a、b、c及誤差

高度(cm)	a	b	c	差(cm)
11.00	0.101	0.497	0.400	0.092
14.62	0.148	0.264	0.518	0.144
20.20	0.196	0.145	0.608	0.040
24.21	0.241	0.087	0.721	0.050
27.98	0.251	0.035	0.935	0.101
30.00	0.269	0.023	1.080	0.125
32.62	0.297	0.030	0.940	0.171

(五) 水流量100^{ml}/s、120^{ml}/s、160^{ml}/s之綜合比較

a- ν 關係：

流量為100^{ml}/s時 $a = 0.0015 \times \nu - 0.05$

流量為120^{ml}/s時 $a = 0.0015 \times \nu - 0.065$

流量為160^{ml}/s時 $a = 0.0015 \times \nu - 0.11$

a與散射初速 ν 成線性關係

b-c關係：

$$\text{流量為100ml/s時} \quad C = \frac{b^{-0.394}}{3.466}$$

$$\text{流量為120ml/s時} \quad C = \frac{b^{-0.318}}{3.044}$$

$$\text{流量為160ml/s時} \quad C = \frac{b^{-0.310}}{2.993}$$

(六) 流量100ml/s，由衝擊力測表面張力之結果如下：

六、討論

- (一) 當衝擊面極光滑且面積不大時，與水流之間的摩擦效應可忽略不計，此時水柱衝擊瞬間的動能相當於水平散射出去之水的動能，所以散射之初速率等於水柱衝擊速率。
- (二) 測 $y - r$ 關係時紗網的空隙可使水膜內外保持等壓。若紗網被水完全堵住而形成密閉空間，內外的壓力差會影響水膜形狀。
- (三) 水膜軌跡方程式之推導：

1. 本實驗所測量之水膜曲面，可視為一條曲線繞 y 軸旋轉一周所形成，只要推導出曲線方程式就可表示出曲面方程式。
2. 將測得的 y 值代入平拋方程式中得出 x 值，再與 r 值比較，並畫出 ($x - r$) 與 y 的關係圖來分析，並嘗試尋找可能的數學關係式，寫成電腦程式畫圖判斷。
3. 試出指數函數可表示此關係，所以假設軌跡方程式為：

$$r = \sqrt{\frac{2y}{g}} \times v \times (1 - ae^{by^c})$$

其中 a 、 b 、 c 為參數。

設計程式以比較誤差法尋找最可能之參數值。

4. 令衝擊面之中心為座標 $(0, 0, 0)$ ，則水膜的曲面方程式可表示成：

$$X^2 + Z^2 = \frac{2y}{g} \times v^2 \times (1 - a \times e^{by^c})^2$$

- (四) $a - v$ 關係之探討：

1. a 、 v 成線性關係： $a = 0.0015 \times v - d$
且斜率與水流量無關，但 d 值隨著水流量改變。
2. 當 $a = 0$ 時，軌跡方程式為一水平拋物線：
$$x = \sqrt{\frac{2y}{g}} \times v_0$$
即未受表面張力之影響。判斷可能是因為速度太小時，散射面積小，厚度大，表面張力的影響可忽略。

- 3.若定義以上可忽略表面張力影響時之速度為臨界速度 ν_c ，則可發現流量愈大臨界速度愈大。
- (五) 從衝擊面到最大半徑處水分子的動能與位能之和變少了，可知此過程中表面張力作負功。
- (六) 由最大半徑處所測得之速度值比自由落下之水的速度值（由高度推算）還大。可見由衝擊面到最大半徑處過程中，表面張力雖然使水平速度減至0，但卻使垂直速度加快，此現象可由力學的觀點說明之：考慮上半部水膜中某一小片受到周圍表面張力作用。其合力恆指向曲率中心，所以恆提供向內且向下之加速度。
- (七) 低於最大半徑處之水膜若分佈的面積過大而使得厚度太薄則有可能破裂，若仍未破裂則可能出現振盪現象，此振盪現象是重力和表面張力之間的拉距戰。

考慮固定質量 Δm 的一小片水膜，其所受的重力為 Δmg 。當其速度太快，擴張面積太大時，表面張力之合力也變的很大，其垂直分力大於重力，而產生一個向上的加速度，使水的流速變慢。由於水膜收縮，使得厚度變大，表面積變小，表面張力之合力也隨之變小，其垂直分力小於重力，而產生一個向下的加速度，使水膜再度擴大。如此反覆變化，而形成振盪現象。

七、結論

- (一) 經由自行設計之裝置可測得散射水膜之形狀，並由自行設計之電腦程式尋得經驗方程式：

$$X^2 + Z^2 = \frac{2y}{g} \times \nu^2 \times (1 - ae^{by^c})^2$$

並分析出參數具有以下之規律性：

流量為 100 ml/s 時， $a = 0.0015 \times \nu - 0.05$

$$3.466 \times c = b^{-0.394}$$

流量為 120 ml/s 時， $a = 0.0015 \times \nu - 0.065$

$$3.044 \times c = b^{-0.318}$$

流量為 160 ml/s 時， $a = 0.0015 \times \nu - 0.11$

$$2.993 \times c = b^{-0.310}$$

- (二) 由測量水的衝擊力可求出瞬間速度。
- (三) 由水膜的能量變化可證得在水膜擴大面積的過程中表面張力作負功。並可求出表面張力的大小。

- (四) 表面張力造成散射水膜之收縮，且水膜面積擴展愈大、厚度愈薄則收縮的程度愈明顯。
- (五) 相同高度落下來的的水柱水平散射的速度雖然相同，但流量大的水膜因單位面積的質量較大，表面張力產生的加速度較小，所以軌跡較接近拋體運動。

八、參考資料

- (一) 高中物理第二冊
- (二) 高中數學第二冊
- (三) 高中理科數學上冊
- (四) 從肥皂泡到液晶生物膜 歐陽鐘灿、劉寄星 著
牛頓出版社
- (五) 流體力學概論 張炳暄 著
文京圖書有限公司
- (六) 表面物理化學 ARTHUR W.ADAMSON 原著
陶雨台 譯
千華圖書有限公司

評語

本件作品對形成各種水膜頗有創新之處，尋找水膜軌跡之經驗方程式的思考程序正確，該作品以電視播放及以電腦模擬頗為生動，具有學術性價值，在經驗方程式的參數 a ， b ， c 作者受限於能力與時間而無法找到對應的物理量，值得繼續探討。