

大家一起來省錢～稅收遊戲的最佳策略探討

高小組數學科第二名

台北市士東國民小學

作者：許韶芸、許韶芝、王怡翔、林玉喬
指導教師：許文化、廖秀英。

一、研究動機

五年級上學期數學課，我們學習到因數，倍數，質數等觀念，老師爲了讓我們有較清楚的觀念，找了一些數學遊戲讓我們玩，其中有一個遊戲「徵稅」難度最高，也最不具有規律性，全班都被困住了。這個遊戲一直放在我們心上，從五年級的寒假開始，我們決定投入較大的心思去挑戰它。經過一年多的苦戰，到現在已快是六年級下學期了，我們總算研究出一些結果。

二、遊戲規則與名詞釋義

有關「徵稅」遊戲是來自聯經出版社的親子數學一書第67～69頁，它的遊戲規則及過程如下：

有一個國家，它的政府要求人民繳稅的規則是：

1. 把家中年收入所得，包裝成以1爲起點的連續整數錢包。例如一個家中年收入78萬元，打包成

①②③④⑤⑥⑦⑧⑨⑩⑪⑫，共12包，如有餘數放棄不計。

2. 將打包成錢包的連續整數錢包中，選取一包留在家中，然後屬於這錢包的所有因數錢包將被抽走給政府。

以上面例子來說，如選④留在家中，則

留在家中	抽給政府
11	1

④的因數只有①這個因數

3. 一個階段完成後，再選一包留在家中

上例繼續進行如下

留在家中	抽給政府
11	1
10	2, 5

原來①也是⑩的因數，但在先前已被抽走不再計較。

4.繼續進行此一遊戲，一直到沒有錢包可留在家中為主。

5.如果留下的錢包都沒有因數，則全部被政府抽走。

上例往下進行可能如下

留在家中	抽給政府
11	1
10	2, 5
6	3
8	4
	7, 9, 12 ⇒ 因7 9 12均無因數 全部將被政府抽走

6.計算留在家中錢總數（本例家中留了35），和政府抽走錢總數（本例政府抽走43），以留在家中錢總數越多越好，本例中顯然不是最好的解答。

7.注意事項：

- ①每一局遊戲中，均以1為起點，以連續整數打包，餘數不能放入使用。
- ②因數在先前已被抽走是被允許的，上例中10原有1 2 5三個因數，但1在家中留10時已被抽走，是被允許的。
- ③任何時候，留取錢包在家中，如無因數可抽，則包括那一包都將被抽走，如上例中最後7 9 12同時被抽走。
- ④每一次選定一錢包留在家中時，它的所有因數一次被抽光，不能保留一個到下次再使用。
- ⑤1是所有數的因數，所以一定在第一次就被政府抽走。

在我們玩這個遊戲的日子裡，我們一直把這個遊戲稱為「稅收」以目前我們所具備的數學知識來說，稅收是一個難度極高的遊戲，為了方便說明，以下是一些我們常用的名詞及記錄符號。

\square ：數字塊或數字卡，代表一個不可再分割的數字。

例如10必須整塊留在家中或給政府，不能再分割。

總數：代表1到n的總和

例如1~24共24個數字卡的總數為300

三、研究目的

- (一)找出繳稅給政府的錢最少，留在家裡的錢最多的方法。
- (二)探討留在家裡的錢最多時，它們之間的規律性。
- (三)去掉質數稅收遊戲的探討。

(四)公因數稅收遊戲的探討。

四、文獻探討

在長期研究中，我們發現到困擾我們進行研究的最大原因是質數，於是我們去尋找有關質數的資料，搜集到的資料請參考柒：參考資料

五、研究過程

一、稅收遊戲的最佳策略探討

(一)直接觀察抓取法

稅收遊戲一開始，我們採用直接觀察抓取的方式來探討，這也是一般小朋友一開始的處理方法，這個方法是先抓取某一個數留在家中，然後把屬於這個數的因數放在繳給政府那邊，一直依規則玩下去。

在我們一段時間嘗試後，能找出留在家中較大錢數的玩法，也有大致上的規則如下：

1. 區域內最大質數塊會最先留在家中（如下頁練習一的 ㉔ 練習二的 ㉑ ）而政府第一次只得到數字塊 ㉒ （最小的一塊）
2. 第二個被抓取的數為平方數（如下面練習一的 ㉑ ，練習二的 ㉑ ）。
3. 再觀察剩下的數字塊中，只有一個因數的優先選取留在家中，比最大一包（如下頁練習一的 ㉑ ）的一半之上質數必送給政府，例 $24 \div 2 = 12$ ，則 ㉓ ㉒ ㉑ 必送給政府，毫無例外。

最大值或接近最大值的第一階段解法

(二)切半法

切半法是根據上面討論及再仔細研究遊戲規則而來，討論中我們發現比 $1/2$ （最大一包）大的質數必給政府後，我們注意到一個要點，那就是：最理想的狀態是除去比 $1/2$ （最大一包）大的質數給政府以後，如果剩下包數中，較大的那一半留在家中，較小的那一半給政府，則留在家中的錢總數必定最大。如下面例子說明。

例一 1~22

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

總數253

①先分成二半

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
<hr/>										
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22

②拿出最大的質數

③把大於 (1/2最大塊) 本例中 (1/2 \times 22=11) <22, >11的質數13、17挑出

④再調整上下一樣多包或上面多一包 (本例子應移11下來, 但它下來並無意義, 因它無因數, 所以改由10下來)

2 3 4 5 6 7 8 9 11 (小)

10 12 14 15 16 17 20 21 22 (大)

⑤再設法一對一

2 3 4 5 6 7 8 9 11 (小)

12 14 15 16 18 20 21 22 (大)

19 | 1 13 17

但是下一個如果取
因數表

留家中	給政府 (因數)
22	2、11
21	3、7
14	2、7
15	3、5
22	2、11
12	3、4、2、6
20	2、4、5、10
16	2、4、8
18	2、9、3、6

都無法一對一, 所以其中一個必須一對2。

2 3 4 5 6 7 8 9 11 (小)

12 14 15 16 18 20 21 22 (大)

19 | 1 13 17

15 | 3、5

⑥再調整上下一樣或上面多一包

2 4 6 7 8 9 11 10

12 14 16 18 20 21 22

說明：結果上面又多一包，所以政府最後多2包，如下：

19	1	⑰ ⑬
15	3 5	①
21	7	
14	2	
22	11	
20	4 10	②
12	6	
16	8	
18	9	
157	96	

切半法在20以前，都可以有效處理所有的數，但是1~21、1~22、1~23，政府都多了二包，24則多三包，不管如何安排，仍無法解決。所以我們又做了一些觀察、分析，再往下做到25時，又回復正常，因此我們發現了一些現象：當給政府包數多出很多時，例1~24時是到碰到一些切半法無法解決的問題。

【我們發現】：

(1)合數之間共同因數太多，例：24和16的因數完全重複，24和12的因數也如此。

$$\begin{aligned}
 24 &= 1 \times 24 & 16 &= 1 \times 16 & 12 &= 1 \times 12 \\
 &= 2 \times 12 & &= 2 \times 8 & &= 2 \times 6 \\
 &= 3 \times 8 & &= 4 \times 4 & &= 3 \times 4 \\
 &= 4 \times 6 & & & &
 \end{aligned}$$

(2)質數平方數前一個點：例25=5×5它的前一個點24無法使用25這個平方數，而且因數太多，所以政府會多很多包。

(3)平方數無法留在家中：24時，唯一的質數平方數9=3×3，已經用切半法時分在因數的一群，一定給政府，無法留在家中。

對於產生了這樣問題，我們將以從1~50之間做統計分析如表一。

表 一：

包數	家中留的	政府抽的	政 府 多 的 數				
			多0	多1	多2	多3包	多5包
1	0	1		√			
2	2	1	√				
3	3	3		√			
4	7	3	√				
5	9	6		√			
6	15	6	√				
7	17	11	√				
8	21	15		√			
9	30	15	√				
10	40	15	√				
11	44	22	√				
12	50	28		√			
13	52	39		√			
14	56	39		√			
15	81	39	√				
16	89	47		√			
17	93	60		√			
18	111	60	√				
19	113	77	√				
20	124	86		√			
21	135	96			√		
22	157	96			√		
23	161	115			√		
24	173	127				√	√
25	198	127		√			
26	224	127		√			
27	251	127		√			
28	279	127	√				
29	285	150	√				
30	301	164		√			
31	303	193		√			
32	319	209			√		
33	352	209	√				
34	386	209	√				
35	406	224			√		
36	442	224		√			
37	448	255		√			
38	486	255		√			
39	503	277		√			
40	513	294		√			
41	527	334			√		
42	571	332		√			
43	573	373		√			
44	617	373		√			
45	642	393			√		
46	688	393			√		
47	692	436			√		
48	695	481					√
49	719	506					√
50	769	506					√

由表中我們發現：政府多二包或多三包的地方都是應該可以再改進的地方，於是我們共同研究，再改進了我們尋找答案的方法。

(三)改良式切半法確定最大值的解法

我們確立了幾個原則：

(1)改良式切半法是將切半法中，有質數平方數的部份先行取出。

(2)盡量把政府多2包或3包的消除

改良式切半法的稅收辦法如下實例：

例三： 1~24

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24

以切半法完成的結果如下：

23	1	○○○
22	2、11	政府 多 了 三 包
14	7	
21	3	
15	5	
16	4、8	
20	10	
18	6、9	
24	12	

①②③④步驟如例一

⑤優先取出質數平方數

⑥調整成上下一樣多包或上面再多一包

⑦設法一對1

⑧現在如果取： (因數表)

16	4、8
20	4、10
24	4、8、12

都無法一對一，所以只能一對二

⑨完成

23	1
9	3
15	5
21	7
14	2
22	11
18	6
16	4、8
20	10
24	12
182	118

⑩分析：

ㄅ、經過改良，原來政府只有一包，現在只有多一包，有改進效果。

ㄆ、原來家裡有173，改良後有182，有改進效果。

經過了一番研究，我們發現切半方法中一些盲點都得到改進，而且我們可以分析出理想最大值和實際最大值間的關係。改良式切半法後，我們所得到的資料，如下表二：

表 二：

包數	家中留的	政府抽的	政 府 多 的 數				
			多0	多1	多2	多3包	多5包
1	0	1		√			
2	2	1	√				
3	3	3		√			
4	7	3	√				
5	9	6		√			
6	15	6	√				
7	17	11	√				
8	21	15		√			
9	30	15	√				
10	40	15	√				
11	44	22	√				
12	50	28		√			
13	52	39		√			
14	56	39		√			
15	81	39	√				
16	89	47		√			
17	93	60		√			
18	111	60	√				

19	113	77	√				
20	124	86		√			
21	139	92	√				
22	161	92	√				
23	165	111	√				
24	182	118		√			
25	198	127		√			
26	224	127		√			
27	251	127		√			
28	279	127	√				
29	285	150	√				
30	301	164		√			
31	303	193		√			
32	327	201		√			
33	352	209	√				
34	386	209	√				
35	392	212		√			
36	442	224		√			
37	448	255		√			
38	486	255		√			
39	503	277		√			
40	513	294		√			
41	535	325	√				
42	569	325	√	√			
43	573	373		√			
44	617	373		√			
45	676	389					
46	722	389		√			
47	726	402		√			
48	758	418	√				
49	782	443	√				
50	832	443	√				

比較表一、表二中，我們發現：

- (1)切半平方法在一般的狀態下，仍是極有效率的解決問題的方法。
- (2)切半平方法在一段期間後會遇到盲點（死角），或由於相同公因數的關係造成，或由於質數平方數無法留在家中造成，用改良切半法可以有有效的解決問題。

【討論：】

1.如何確定切半法或改良切半法中得到的答案已經是最大值？

討論結果：判斷的原則是

- (1)看看這些數大的一半（除質數外）都留在家中，而小的一半交給政府。

(2)政府只多一包或一樣多包。

2.切半法使稅收遊戲尋找留在家中的錢，很有效率，而且能得到最大值或接近最大值，改良切半法配合切半法的統計圖表，使切半法的盲點消除，我們能找到稅收遊戲的最大值，但是，由表一或表二中，始終無法找到規律性，道理何在？

討論結果：

(1)稅收遊戲中一直沒有規律，是因為我們第一個抓取的是質數，而這第一個數會隨著題目變換，如1~24，第一個是23，但如題目為1~36，第一個數就是31了，雖然它們都是質數，但質數之間並沒有規律性，稅收遊戲敵答案受到質數的影響，也就沒有規律了。

(2)我們試著去掉質數來研究看看，於是我們做了下一階段的研究。

二、去掉質數的稅收遊戲探討

(一)新的稅收遊戲

- 1.我們想試著把所有質數去掉，但是不可行，因為留在政府的1、2、3、5等都屬於質數，如果去除則9、10、6、4等數會因沒有因數而不能使用。
- 2.我們就試著把大於一半以上的質數去掉做做看。
- 3.所有的遊戲規則如同原來的遊戲。

(二)研究結果（1~4起至1~25的部份）

- ①由1~4起至1~25，最大包是偶數時，所有留在政府的數，都是連加數，而且正好加到那個數的一半，例如1~8： $8 \div 2 = 4$ 1~8留在政府的數就是 $1+2+3+4=10$ 。
- ②1~4起至1~25最大包是奇數時，它留在政府的數是 $(25-1) \div 2 = 12$
 $1+2+3+\dots+12=78$ ，所以它留在政府的數是78。
- ③由表五中發現到去掉大於一半以上以後質數的玩法，它的解答很有規律，再次證明了切半法的妙用。

(三)我們繼續對1~26以後的數做了研究，也得到同樣結果：

三、公因數稅收遊戲法

我們又試著一次取二個數到家裡，再取它們的公因數給政府：下面是一個例子

①先分成上面 $2/3$ ，下面 $1/3$

1~12 總數78

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----

②拿出二個最大質數

③挑出大於 $1/3$ 最大塊的質數，本例中 $1/3 \times 12 = 4$ 大於4的質數有5

④設法2對1

⑤完成

7、11	1 ⑤
9、12	3
8、10	2 ⑥
	④
<hr/>	
57	21

在這例中，6由於沒有人共用因數，所以交給政府。

我們做了一些研究，從1~6（總數21）到1~35（總數630）的區間做研究，

【我們發現】：

1. 公因數稅收仍然不具規律性，因為它也包含質數。
2. 和稅收遊戲不同的地方是：它較小數的值，可以大於較大數的值，例如1~8政府為10，1~9政府反而降為6。

六、結 論

- (一) 稅收遊戲如果用一般隨意抓取的方式來找解答，很難找到較好解答。
- (二) 我們發展出切半法來玩稅收遊戲，切半法能很快的找到稅收遊戲的最佳解答，是很有效率的解題方法。
- (三) 切半法在遇到公因數太多的數（例如16、24）或質數平方前一點時會失效，而改良切半法可以解決這個問題。
- (四) 透過切半法中政府多的包數分析及改良切半法，即可以找到稅收遊戲的最佳解答。
- (五) 稅收遊戲受到質數不是規律性的影響，最佳解答間不具規律性。
- (六) 我們試做去掉質數的稅收遊戲，終於找到一些規律性，且繳給政府的錢數必定為以1為起點的連續數值。
- (七) 公因數的稅收遊戲中，再次證明了受質數不規律影響的稅收遊戲不具規律性。

七、參考資料

- (一) 國民小學數學課本及指引第九、十、十一冊 國立編譯館
- (二) 新子數學遊戲 文庭澍／馬文璧合譯 聯經出版社
- (三) 新數學的未解問題 銀禾文化事業公司（P50-65）
- (四) 數學探索與發展 銀禾文化事業公司（P181-191）

- (五)數學遊樂園之茅塞頓開 千頓出版社 (P136)
- (六)數學遊樂園之老謀深算 千頓出版社 (P100、110)
- (七)數學誕生的故事 九章出版社 (P44-50)
- (八)趣味數學實驗 前程出版社 (P112-117)
- (九)數學智慧遊戲 前程出版社 (P21、27、39、43、58、74、80)

評 語

本研究題目來自「親子數學」聯經出版社，一本基本上是在社區中發展父母如何指導兒童學習數學的教材。題目是給定 n ，例如 $n=24$ ，請就 $1\sim 24$ ，逐次選取數字。可選取條件為該數的因數中至少尚有一個尚未被移除，選定後，即移除該數的所有因數，如此持續為之，直到無法再選出數字為止，目標：找到選取策略，使所有選取的數字和為最高。由於包裝為數學遊戲的需求，本題目改為抽稅遊戲，以致於作者沿用遊戲的術語，由純數學家來看，這些術語反而影響解題，但是對兒童而言，可能因人而異。

作者成功地發展成取半策略，平方數修正及包數修正策略，就其策略的流程圖看來，似乎為最佳策略，但最多只能就各特殊的 n 來檢查。如果能用電腦做地毯式檢查，至少可以確定其策略的有效性，這兩個修正是最具創意的地方，另外作者更發展出另一個遊戲，一次取兩數，取走其公因數也很有意思，這些策略得之不易，是數學研究的所謂「突破」，即喜悅的靈光乍現。事實上，作者接觸本問題已有一年半以上，鍥而不捨的研究精神，在小小年紀即已展現，怎不令人讚歎後生可畏哉。