

田字面正方體著兩色類型之研究

高小組數學科第一名

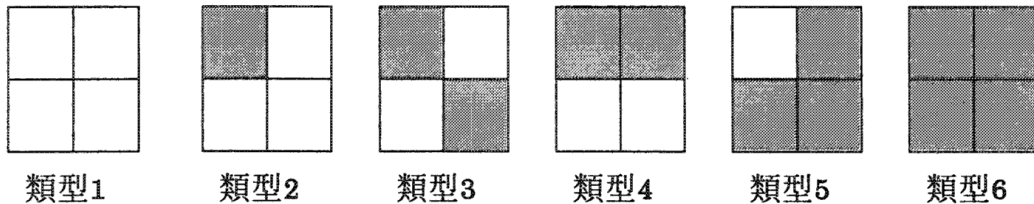
台北市立師院附設實驗國民小學

作者：賴緯綸、謝卓叡

指導教師：蔡淑英

一、研究動機

對於一個由四個小方格組成的田字正方形，可以任意將小方格塗黑或不塗黑，而且將旋轉後會相同的塗色方法視為同一類型，那麼這個塗方格的問題，共可歸納為下列六個類型。

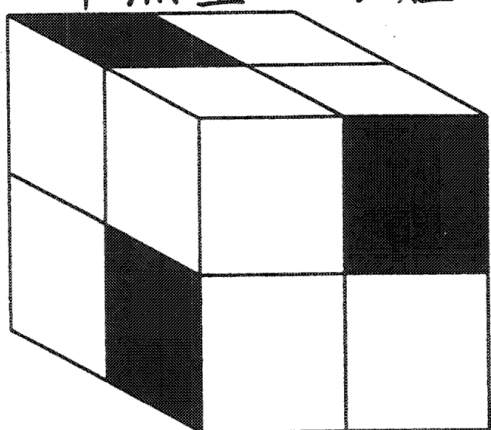


如果將類型1貼在正方體的六個面上，則可產生一個田字面正方體。若將類型6貼在正方體的六個面上，也可產生一個田字面正方體，但是若正方體的六個面貼的是類型3的田字正方形，則它可產生的類型就不只一種，我把這樣的正方體叫做雙黑斜型正方體，把滾動後會相同的視為同一類型。這樣的問題，引發了我們研究的興趣，我們也希望其他類型的田字正方形貼在正方體上，看看它又可產生哪些類型？

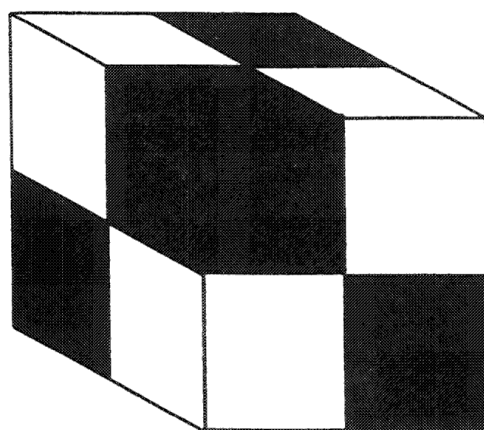
二、名詞釋義

- (一)單黑型正方體：正方體的六個面都貼上類型2的田字正方形。
- (二)雙黑斜型正方體：正方體的六個面都貼上類型3。
- (三)雙黑相鄰型正方體：正方體的六個面都貼上類型4。
- (四)三黑型正方體：正方體的六個面都貼上類型5。
- (五)面軸：以正方體一組平行面中心點的連線所構成的旋轉軸。
- (六)頂點軸：以對稱於正方體中心點的一組頂點連線所構成的旋轉軸。
- (七)邊軸：以對稱於正方體中心點的一組平行邊的中點連線，所構成的旋轉軸。

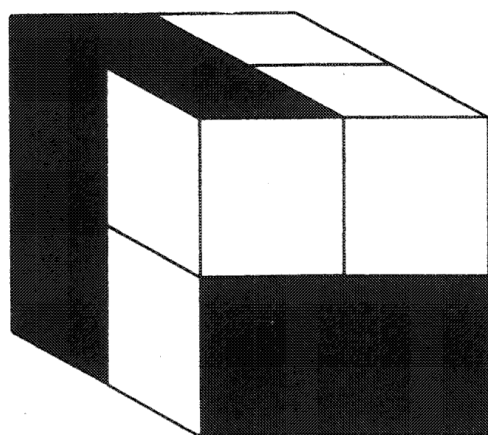
單黑型正方體



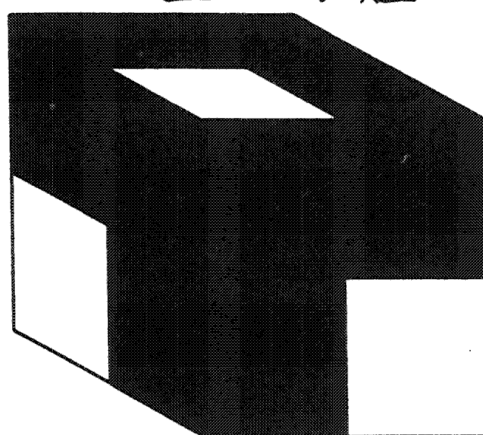
雙黑斜型正方體



雙黑相鄰型正方體



三黑型正方體



三、研究的問題

(一)雙黑斜型正方體，共有哪幾個類型？這些類型如何研判？

註：正方體六個面中，每一個面都可以是左斜田字正方形或右斜田字正方形，滾動後會相同的視為同一類型。

(二)單黑型正方體，共有幾個類型？

註：正方體六個面中，每一個面都是單黑型田字正方形，滾動後會相同的視為同一類型。

四、分析

(一)雙黑斜型正方體，共有哪幾個類型？這些類型如何研判？

我們先選定正方體的一個展開圖樣式，因為展開圖上六個面中的每一個面

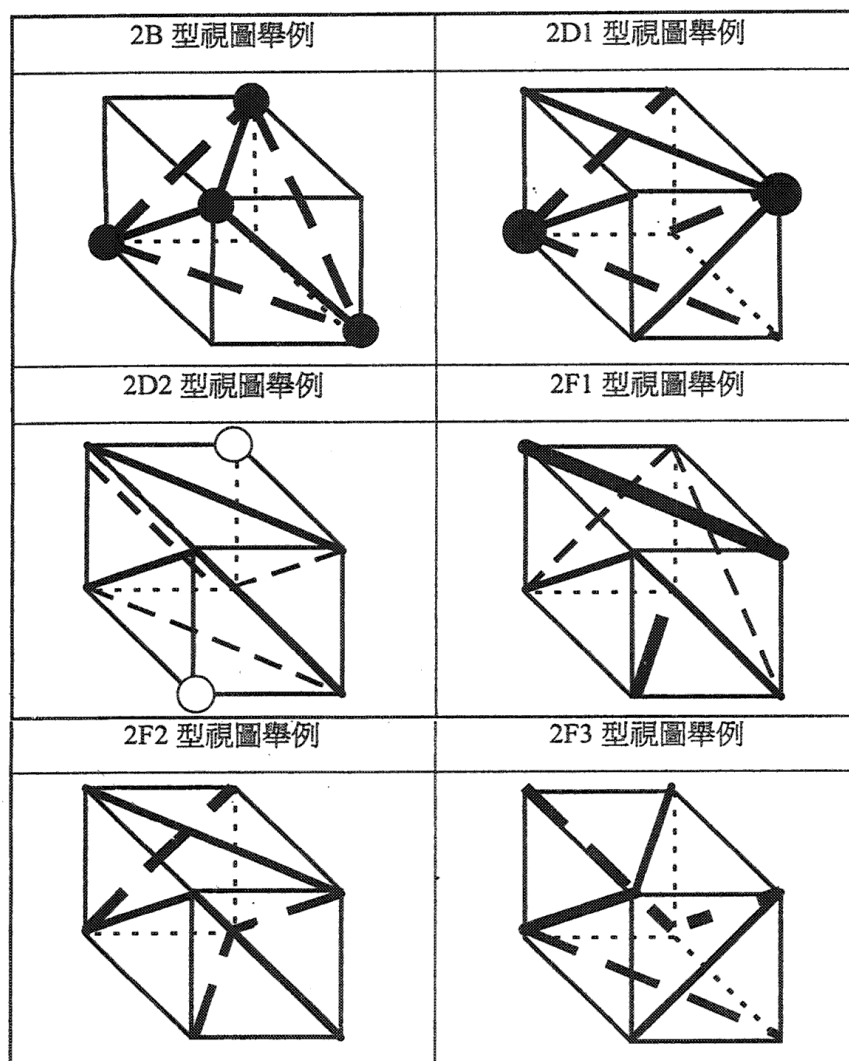
都可以是左斜田字正方形或右斜田字正方形，所以雙黑斜型正方體的展開圖一共有 $64 (=2^6)$ 種可能情形。將這64種展開圖分別加以組合，並將滾動後會相同的視為同一類型，即可知道雙黑斜型正方體，共有哪幾個類型。除此之外，我們將展開圖上的24個小方格編碼，發現適當的編碼有助於研判類型。

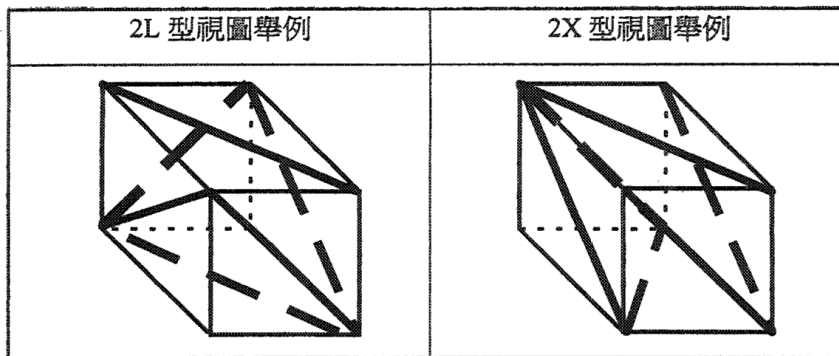
(二)單黑型正方體，共有幾個類型？

單黑型正方體的展開圖一共有 $4096 (=4^6)$ 種可能情形，如果想將這4096種展開圖分別加以組合，來研判共有幾個類型，似乎過於繁雜。經仔細研究，我們發現單黑型正方體與雙黑斜型正方體之間有密切的“父子”關係，便由各個不同的雙黑斜型正方體，分別推算其衍生的單黑型正方體類型。

五、雙黑斜型正方體的類型

雙黑斜型正方體，共有64個展開圖，經整理後歸納成8個類型，如下圖：





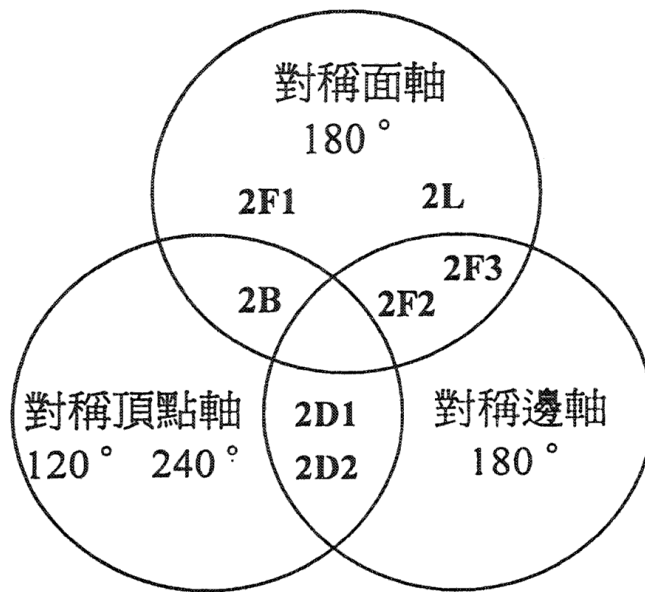
註：命名的原則

1. 字首**2**代表雙黑斜型正方體的田字面中有**2**個對角的小正方格塗成黑色，主要是為了與單黑型正方體有所區別。
2. 名字中的英文字母是表示該類型的展開圖總數，我們以：
B 代表有**2**個展開圖，**D** 代表有**4**個展開圖，**F** 代表有**6**個展開圖，**L** 代表有**12**個展開圖，**X** 代表有**24**個展開圖。
3. 若有幾個類型的展開圖總數相同，我們便在字尾再加上一個數字來區分。

以上八個類型，分別由一個標準型，經由旋轉而得到與標準型相同視圖的情形統計如下：

八 個 類 型			2 B	2 D 1	2 D 2	2 F 1	2 F 2	2 F 3	2 L	2 X
標準型			1	1	1	1	1	1	1	1
相同型	面軸	180°	3	0	0	3	1	1	1	0
相同型	頂點軸	120°	4	1	1	0	0	0	0	0
相同型	頂點軸	240°	4	1	1	0	0	0	0	0
相同型	邊軸	180°	0	3	3	0	2	2	0	0
標準型與相同視圖合計			1 2	6	6	4	4	4	2	1
展 開 圖 數			2	4	4	6	6	6	1 2	2 4
驗 證			$\frac{12 \times 2}{4} = 2$	$\frac{6 \times 4}{24} = 1$	$\frac{6 \times 4}{24} = 1$	$\frac{4 \times 6}{24} = 1$	$\frac{4 \times 6}{24} = 1$	$\frac{4 \times 6}{24} = 1$	$\frac{2 \times 1}{4} = 2$	$\frac{1 \times 2}{4} = 2$

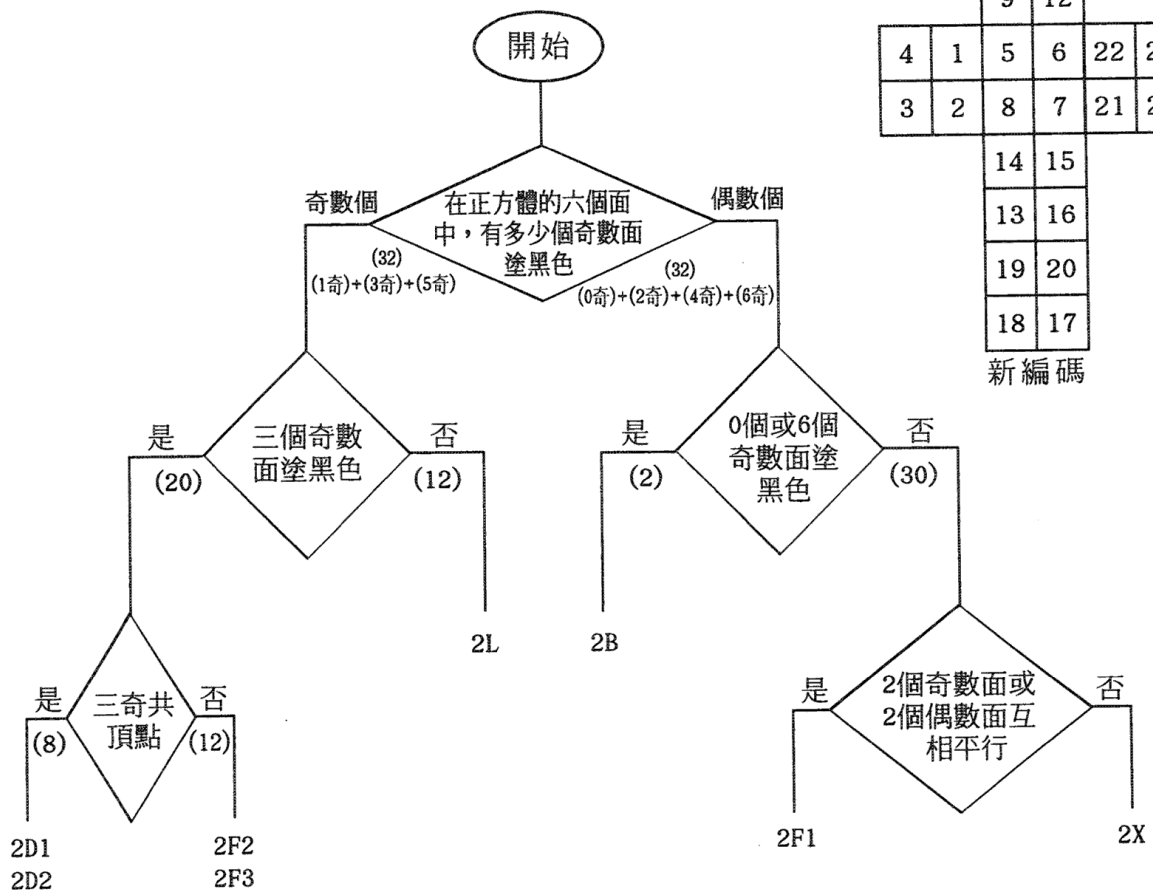
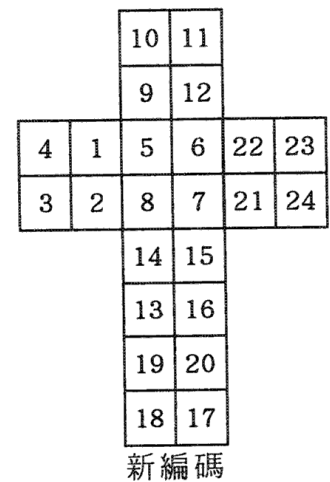
由上表可畫出以上雙黑斜型正方體八個類型的關係圖。



2X

六、雙黑斜型正方體編碼的研究

我們對田字面正方體的24個小方格加以編號1~24，我們發現下列的編碼方式，可以依照我們流程，快速找出研判這8個類型的流程。



七、單黑型正方體的類型研究

將雙黑斜型正方體的某個類型當成是父親，而單黑型正方體的數個相關類型當成是兒子，由雙黑斜型正方體各類型來產生單黑型正方體的類型，因為雙黑斜型正方體與單黑型正方體之間其展開圖與類型存在著下列關係：

(一)單一雙黑斜型正方體展開圖與單黑型正方體展開圖之間的關係：

對任一個雙黑斜型正方體展開圖，將每個面上二個黑格任意選取其中的任一黑格，共有64種可能情形，因此每一個雙黑斜型正方體展開圖均可產生64個單黑型正方體展開圖。而雙黑斜型正方體共有64個不同的展開圖，所以單黑型正方體展開圖總數 $=64 \times 64 = 4096$ （個）。

(二)兩個屬於同一雙黑斜型正方體類型的展開圖，可各自產生64個不同的單黑型正方體展開圖，但這兩組各自包含64個單黑型正方體展開圖所組成的單黑型正方體類型，卻完全相同。

由雙黑斜型正方體各類型所產生的單黑型正方體類型共有192個類型，這些類型可分成D、H、L、X四大類，驗證其展開圖總數為4096個。

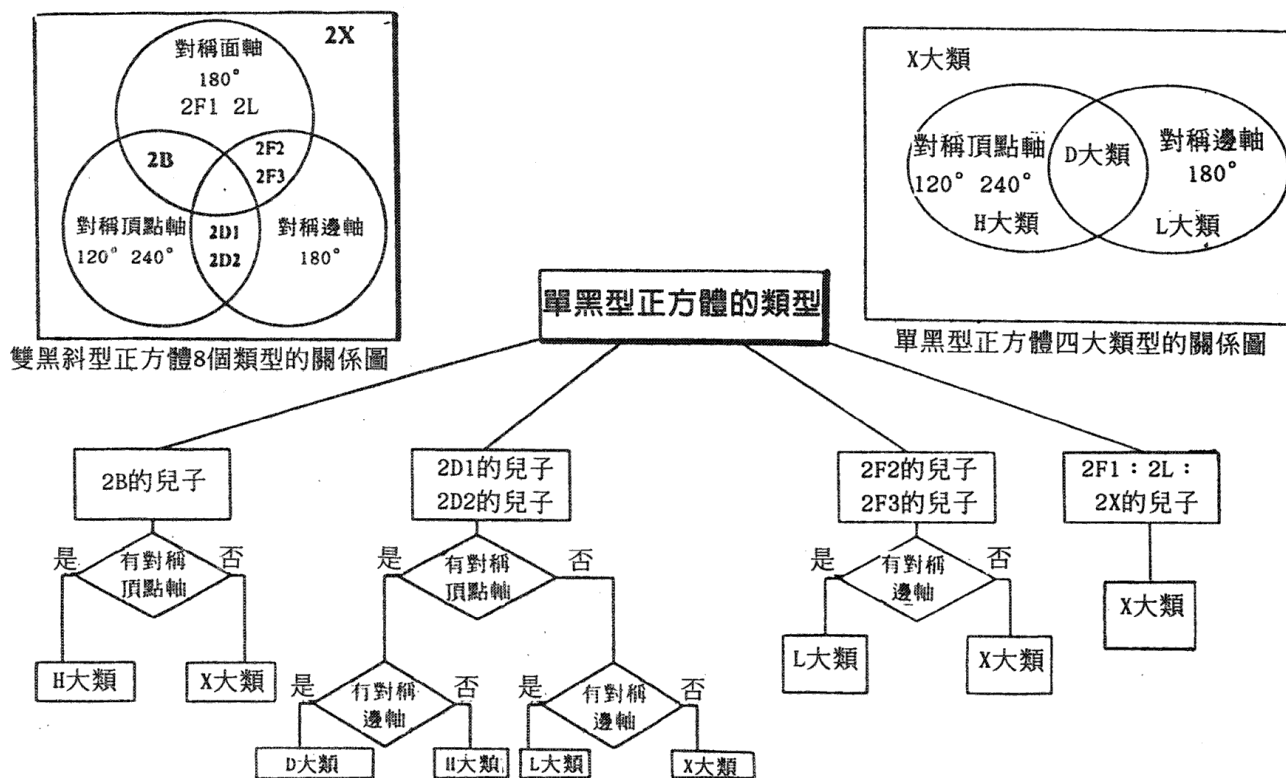
單黑型正方體類型分布情形	雙黑斜型正方體的8個類型								單黑型正方體類型合計
	2B	2D1	2D2	2F1	2F2	2F3	2L	2X	
D大類		2個類型	2個類型						4個類型
H大類	4個類型	1個類型	1個類型						6個類型
L大類		6個類型	6個類型		8個類型	8個類型			28個類型
X大類	4個類型	7個類型	7個類型	16個類型	12個類型	12個類型	32個類型	64個類型	154個類型

四大類的單黑型正方體，分別由一個標準型，經由旋轉而得到與標準型相同視圖的情形統計如下：

四大類的單黑型正方體			D大類	H大類	L大類	X大類
標準型			1	1	1	1
相同型	面軸	180°	0	0	0	0
相同型	頂點軸	120°	1	1	0	0
相同型	頂點軸	240°	1	1	0	0
相同型	邊軸	180°	3	0	1	0
標準型與相同視圖合計			6	3	2	1
展開圖數			4	8	12	24
驗證			$6 \times 4 = 24$	$3 \times 8 = 24$	$2 \times 12 = 24$	$1 \times 24 = 24$

八、討 論

(一)雙黑斜型正方體與單黑型正方體的父子關係圖如下：

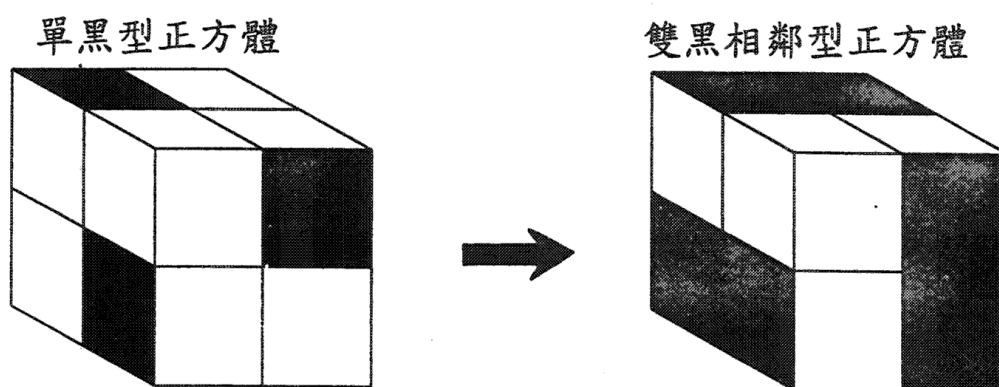


(二)雙黑相鄰型正方體，共有幾個類型？

雙黑相鄰型正方體的展開圖一共有4096種可能情形，經仔細研究，我們發現雙黑相鄰型正方體與單黑型正方體之間有密切的“兄弟”關係。

我們可以把一個單黑型正方體的每一個面（單黑型正方形）塗黑的那一個小方格調到左上角，再將其右邊的小方格塗黑，如此一來，就會變成一個雙黑相鄰型正方體。

我們發現原來的單黑型正方體會與新形成的雙黑相鄰型正方體對稱性相同，換句話說，每一個單黑型正方體類型均可產生一個相同類型的雙黑相鄰型正方體。因此，雙黑相鄰型正方體的類型個數與單黑型正方體的類型個數相同。



(三)三黑型正方體，共有幾個類型？

三黑型正方體的展開圖一共有4096種可能情形，三黑型正方體與單黑型正方體之間只是黑白顛倒，換句話說，單黑型正方體的類型個數與三黑型正方體的類型個數相同。

評 語

研究群的認知特性為正多邊形，正多面體的對稱性與其表徵的系統性處理。在此主線下，研究群成功地發展其選題，即在正六面體上，各面分成四個正方形，規定各面的正方形塗色型態統一，來計算其在正方體運動群對稱下的不同類型總數。作者的口語表達以及看版表達非常清晰，反映作者在處理這些看起來雜亂無章的二色田字面正方體的了解。作者對於正方體對稱運動群的描述，採用定義面軸、頂點軸、邊軸的方式，在各面正方形的標號上以及各類型的標號上，及其圖

像表徵都深受正方體的對稱及在此對稱作用下，採用最恰當的代表的思考的支配，是作者成功的原因。通常研究所研究生的博士論文，常超出指導教授的思考範圍之外，本件作者的表現，肯定遠超過指導老師的想像之外。對有志了解資優教育，國小學生對數學的抽象與具體，特殊與普遍的辨證發展，作者在這四年的科展研究脈絡，是一個值得去了解的個案。