智慧盤中的奧秘－智慧盤遊戲推移策略探討

初小組數學科第三名

台北市士東國民小學　　作　　者：陳星奎、胡登傑、張維方、藍寅瑋

指導教師：許文化、林華葵

一、研究動機

有一次看到班上小朋友玩智慧盤的遊戲，它是一個（4×4）的盒子，裏面有1～15共15個數字塊，這些數字是各自散開的，而且沒有一定的順序，遊戲時只能用推移來重新排列，使它能變成整齊的排列，這個遊戲看起來並不難，可是有一次智慧盤掉在地上，我們把散在地上的數字重新放上，卻無論怎樣都排不起來，這使我們懷疑是不是所有的智慧盤都能排成功？於是我們決定用智慧盤做一些研究。

二、研究目的

(一)是不是所有的智慧盤都能排成功？

(二)能排列成功的智慧盤有那些特色？

(三)怎樣尋找一個判定智慧盤能不能排成功的規則？

(四)其他一些特殊排列的研究。

三、研究過程

我們發現（4×4）的智慧盤裏面有15個數字塊，太複雜了，不方便研究，於是我們決定自己做小一點的智慧盤。我們做的智慧盤爲（2×3），共放5個數字塊。

問題(一)：我們試著探討：是不是所有的智慧盤都能排成功？

1. 我們試著把5個數字塊的所有排列列表，發現共可列出120種排列方式，初步發現有57種可以排列成功。
2. 我們再試3個數字塊的智慧盤，發現6種排列中有3種可以排列成功，剛好有一半可以成功，因此我們懷疑（2×3）的智慧盤中，只有找到57種是不是正確？決定再回來檢查，這次我們請了同學幫忙，每一種排列都由5個人共同檢查，果然發現了一些原來誤以爲排不成功的排列，最後共發現60種排列可以排成功，剛好又佔了一半，眞令人興奮。

我們初步發現：不是所有智慧盤都可以排列成功，可以排列成功的智慧盤

可能只佔一半而已。

問題㈡：能排成功的智慧盤有那些特色？

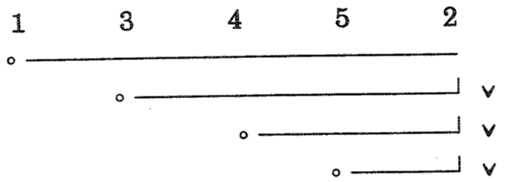
1.我們仔細觀察能排成功的智慧盤，卻仍無法發現它們具有什麼特色，倒是發現在推移的過程中，有些可以合併的現象，我們利用了這個關係畫出了合併圖形，但我們無法發現可排成功的智慧盤特色。

問題㈢：怎樣尋找一個判定智慧盤能不能排成功的規則？

1.我們回頭去找一些相關資料，發現在三十四屆全國科展中，有人研究過數字方塊遊戲，它是將四個數字不斷做減法計算的遊戲，於是我們試著也把智慧盤裡的數字塊拿來相減看看。

2.爲了計算上方便，我們設計了計算「×」、「∨」表，如下

例：13452



表示有三個地方可以相減即：
3－2∨
4－2∨
5－2∨
我們用〔3〕表示可相減次數爲3

3.由計算可以相減的次數中我們發現，偶數個「∨」的都可以排列成功，奇數個「∨」的都排不成，而這個方法讓我們節省了很多時間，就可以判定能不能排成功。

4.後來我們發現在（2×3）的120種排列中，可以以6個爲一單位的小區塊，24個爲一單位的中區塊，呈現很整齊的規律性，如下表一。

表一：由原始排列：——→12345

第一中塊	原始排列型式	可相減次數	可否排列成功
第一小區塊	12345	0	∨
	12354	1	×
	12435	1	×
	12453	2	∨
	12534	2	∨
	12543	3	×
第二小區塊	13245	1	×
	13254	2	∨
	13425	2	∨
	13452	3	×
	13524	3	×
	13542	4	∨
第三小區塊	14235	2	∨
	14253	3	×
	14325	3	×
	14352	4	∨
	14523	4	∨
	14532	5	×
第四小區塊	15234	3	×
	15243	4	∨
	15324	4	∨
	15342	5	×
	15423	5	×
	15432	6	∨

第二中塊	原始排列型式	可相減次數	可否排列成功
第一小區塊	21345	1	×
	21354	2	∨
	21435	2	∨
	21453	3	×
	21534	3	×
	21543	4	∨
第二小區塊	23145	2	∨
	23154	3	×
	23415	3	×
	23451	4	∨
	23514	4	∨
	23541	5	×
第三小區塊	24135	3	×
	24153	4	∨
	24315	4	∨
	24351	5	×
	24513	5	×
	24531	6	∨
第四小區塊	25134	4	∨
	25143	5	×
	25314	5	×
	25341	6	∨
	25413	6	∨
	25431	7	×

第三中塊	原始排列型式	可相減次數	可否排列成功
第一小區塊	31245	2	∨
	31254	3	×
	31425	3	×
	31452	4	∨
	31524	4	∨
	31542	5	×
第二小區塊	32145	3	×
	32154	4	∨
	32415	4	∨
	32451	5	×
	32514	5	×
	32541	6	∨
第三小區塊	34125	4	∨
	34152	5	×
	34215	5	×
	34251	6	∨
	34512	6	∨
	34521	7	×
第四小區塊	35124	5	×
	35142	6	∨
	35214	6	∨
	35241	7	×
	35412	7	×
	35421	8	∨

第四中塊	原始排列型式	可相減次數	可否排列成功
第一小區塊	41235	3	×
	41253	4	∨
	41325	4	∨
	41352	5	×
	41523	5	×
	41532	6	∨
第二小區塊	42135	4	∨
	42153	5	×
	42315	5	×
	42351	6	∨
	42513	6	∨
	42531	7	×
第三小區塊	43125	5	×
	43152	6	∨
	43215	6	∨
	43251	7	×
	43512	7	×
	43521	8	∨
第四小區塊	45123	6	∨
	45132	7	×
	45213	7	×
	45231	8	∨
	45312	8	∨
	45321	9	×

第五中塊	原始排列型式	可相減次數	可否排列成功
第一小區塊	51234	4	∨
	51243	5	×
	51324	5	×
	51342	6	∨
	51423	6	∨
	51432	7	×
第二小區塊	52134	5	×
	52143	6	∨
	52314	6	∨
	52341	7	×
	52413	7	×
	52431	8	∨
第三小區塊	53124	6	∨
	53142	7	×
	53314	7	×
	53341	8	∨
	53412	8	∨
	53421	9	×
第四小區塊	54123	7	×
	54132	8	∨
	54213	8	∨
	54231	9	×
	54312	9	×
	54321	10	∨

5.在這個表中，我們發現：

(1)原始排列中，如果有其中兩個數互換位置，則∨→✕

✕→∨

(2)原始排列中，如果有其中三個數互換位置，則∨→∨

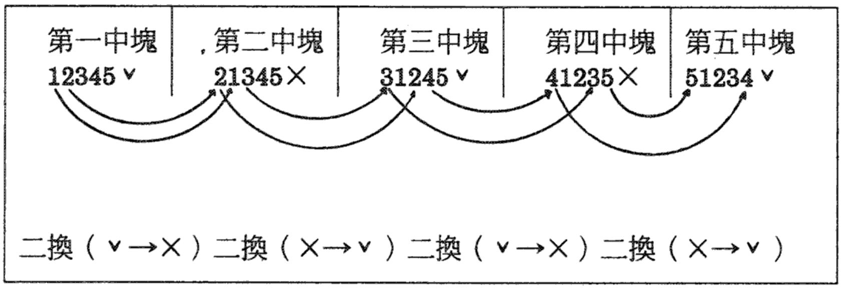
✕→✕

由(1)(2)兩個規則，併用每一區塊的6個原始排列，很快可列出第一中區塊的每個小區塊第一個原始排列，

(3)同樣的，由第一小區塊的第一個原始排列，可以推出同一中塊中所有小區塊的第一個原始排列。

然後每一小區塊的第一個原始排列馬上可推出另5個同區塊的原始排列，一個中塊的24個原始排列即可完成。

(4)同樣的方法，橫向也可立即推出每一個中塊相對位置的原始排列的狀態。



每一相對位置均可這樣推出，也可以每一中塊的第一個小區塊，第一個排列推出後，用上面(2)(3)的方法推出整個中塊的24個原始排列。

(5)這樣的方法（2✕3）120種原始排列很快可推出。

(6)至於可相減次數，也有它的規律性，如下：

①每一個小區塊內6個可相減次數值依序為：

原始值	例	12345	0	—（原始值）
原始值＋1	例	12354	1	（0＋1）
原始值＋1	例	12435	1	（0＋1）
原始值＋2	例	12453	2	（0＋2）
原始值＋2	例	12534	2	（0＋2）
原始值＋3	例	12543	3	（0＋3）

②橫向每一中塊的相對位置，原始排列形成可相減次數，有逐漸增加關係

12345〔0〕	21345〔1〕	31245〔2〕	41235〔3〕	51234〔4〕

逐　次　加1

(7)同一中塊中，直向的每一小區塊的相對原始排列，可相減次數也有逐漸加1

(8)由表中還可以發現，兩個原始排列型式間，如果互相為倒回排列，則可否排成功具有一致性，例如：

1　2　3　4　5　→　5　4　3　2　1

（v）→　　（v）

6.接著我們對（2×4）7個數字塊做研究，我們發現，它可以應用（2×3）5個數字塊加以推展，它可以得到42個如同表一的表。

7.在對（2×4）7個數字塊做的研究中，我們發現：

所有（2×3）中的規則都可適用，但互相倒回排列時，卻在可否排列成功中不具有一致性，而是呈相反狀態，例如：

1　4　3　5　7　6　2〔7〕×　→　2　6　7　5　3　4　1〔14〕v

〔7〕＋〔14〕＝〔21〕

8.①我們將可以做成長方形或正方形的智慧盤都做出來，共做了11種。（請參考表二）

②我們試著以奇數個、偶數個數字塊分為2類，沒有特別的發現。

③回頭看看在（2×3）－1及（2×4）－1型的區塊分析中，我們發現〝它的可相減次數〞最高值有某種關係如下：

（2×3）－1的最高可相減次數為

5. 4. 3. 2. 1型式，可相減次數為10.

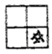
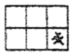
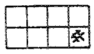
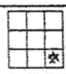
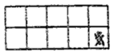
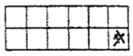
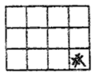
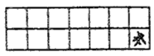
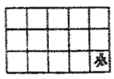
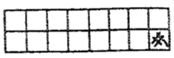
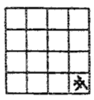
（2×4）－1的最高可相減次數為

7. 6. 5. 4. 3. 2. 1型式，可相減次數為21.

都剛好是兩個可倒回排列的可相減次數和，請參考前面6(8)和8. 說明。

④我們試著對其他型式的智慧盤做研究，得到下表二

表 二

數字方塊數量	型式	圖型	最高可相減次數
3	(2×2)－1		3＝1＋2
5	(2×3)－1		10＝4＋3＋2＋1
7	(2×4)－1		21＝6＋5＋4＋3＋2＋1
8	(3×3)－1		28＝7＋6＋5＋4＋3＋2＋1
9	(2×5)－1		36＝8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1
11	(2×6)－1		55＝10＋9＋8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1
11	(3×4)－1		55＝10＋9＋8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1
13	(2×7)－1		78＝12＋11＋10＋9＋8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1
14	(3×5)－1		91＝13＋12＋11＋10＋9＋8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1
15	(2×8)－1		105＝14＋13＋12＋11＋10＋9＋8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1
15	(4×4)－1		105＝14＋13＋12＋11＋10＋9＋8＋7＋6＋5＋4＋3＋2＋1

⑤在表二中，我們分析後發現：任何一個智慧盤中

甲、最高可相減次數＝從1連加到（數字塊數量－1）的和

例如（3×3）－1型，最高可相減次數

28＝1＋2……＋7

7＝（3×3）－1型有8塊數字塊－1

乙、按最高可相減次數爲奇數或偶數分爲2類，如下表三，表中我們也發現：

最高可相減次數爲偶數時兩個原始排列型式互爲倒回排列時可否排列成功具有一致性。

v→v　×→×

例如：14235〔2〕v→53241〔8〕v

23154〔3〕×→45132〔7〕×

表　三

數字塊數量	型　　　式	最高可相減次數	奇偶	倒回排列特性
3	（2×2）－1	3	奇	相反性
7	（2×4）－1	21	奇	相反性
11	（2×4）－1	55	奇	相反性
11	（3×4）－1	55	奇	相反性
14	（3×5）－1	91	奇	相反性
15	（2×8）－1	105	奇	相反性
15	（4×4）－1	105	奇	相反性
5	（2×3）－1	10	偶	一致性
8	（3×3）－1	28	偶	一致性
9	（2×5）－1	36	偶	一致性
13	（2×7）－1	78	偶	一致性

9.①這個發現讓我們更確定智慧盤遊戲中，只有一半的原始排列型式可以排列成功，另一半是無法排成功的。

②利用互相倒回排列的方式，我們可以節省一半的時間，就可完成所有原始排列型式。

問題㈣：其他一些特殊排列的研究

1.我們想探討智慧盤如果最後要拼出的不是順著排列，而是一行奇數，一行偶數，或其他排列時，會如何呢？

我們再做了一些研究：

例如，要把12345→13524等的可能性等

1	2	3
4	5	＃

→

1	3	5
2	4	＃

偶數一排，奇數一排

2.我們仍然先用嘗試的方式排排看，我們發現12345經過幾次推移，會變成13524，而前面做過的經驗，可以讓我們確定，它無法再變成13524。

再經過其他一些嘗試，我們發現，原來可以推成12345的原始排列型式（可相減次數・偶數）的狀態都無法推成13524，而原來原始排列型式無法推成12345的（可相減次數・奇數），反而都可以推成13524型。

3.我們利用表一及表三來觀察，並做了更多嘗試，發現到了一些規律性如下：

①在最高可相減次數爲偶數時，可相減次數爲奇數的原始排列型式間都可互相轉換成功。

同樣的可相減次數爲偶數的原始排列型式間也都可以互相轉換成功。

也就是說：

最高可相減次數爲偶數時

可相減次數爲偶數間都可互通，可相減次數爲奇數間也都可互通。

②接著，我們對最高可相減次數爲奇數的智慧盤做檢查，也得到相同的結果。

③由上面結果，我們可以看出，有時光看外觀上的情形，並不能判定能不能推成，而以計算可相減次爲最好的判定方法。

④這個結果我們試著推展到一些更特別的排法時也可適用。

⑤用同樣的檢驗方法，我們試了這個研究中最大的智慧盤，15個數字塊（4×4）－1型，也同樣適用。

四、研究結果

(一)智慧盤遊戲中的各種原始排列，只有一半能推成依序排列情形，另一半無法排成功。

(二)智慧盤中任何一個原始排列型式，能不能推成依序排列的智慧盤，用檢查它的可相減次數是很方便的方法，可相減次數爲偶數時一定可以推成功，可相減次數爲奇數時一定推不成功。

(三)要推算出智慧盤中所有原始排列的可相減次數情形，以小區塊、中區塊推論的方式最快，也最有效。

(四)任何一種智慧盤，它的最高可相減次數值爲一定，它的公式爲：

最高可相減次數＝從1連加到〔智慧盤數字塊數－1〕

(五)原始排列狀態中，如果爲互相倒回排列，那麼他們的可相減次數總和一定等於那個智慧盤型式中最高可相減次數。

(六)最高相減次數爲偶數時，兩個互相倒回排列的能否推成具有一致性。

最高相減次數爲奇數時，兩個互相倒回排列的能否推成具有相反性。

(七)要推成任何一個狀態的排列能否推成功？可用可相減次數的奇、偶數狀態來

分析。

1.可相減次數爲偶數的狀態間可互通推成功。

2.可相減次數爲奇數的狀態間可互通推成功。

3.可相減次數爲奇數、偶數間無法互通推成功。

(八)由以上的研究結果，我們可輕易判斷各種型式的智慧盤，各種原始狀態推成任何一種目標能否成功。

五、未來發展

由上面研究，我們推出最大到15塊（2×8）－1或（4×4）－1型智慧盤能否推成功判別，我們想再進一步研究更大的智慧盤，看是不是也合乎我們得到的研究結果。

六、參考資料

(一)中華民國第三十四屆中小學科學展覽優勝作品專輯（國立台灣科學教育館編 83.6）

(二)數學智慧遊戲（前程出版社　萬國興　顏妃秀著）

(三)趣味數學300題（凡異出版社　裘宗滬著）

評　語

本作品討論智慧盤中數字排列方式何者可成功排序，何者不能，其討論方法從2×2、2×3、而至4×4智慧盤，由簡而繁，討論方法爲利用窮舉法，而歸納出可成功排序與不可成功排序之特性，據而導出簡單計算方法以判斷，以窮舉法探討問題，作者花費不少心力，本作品將資料完整而有系統清楚地表達，就初小學生而言誠屬不易。