

奇妙的數學遊戲

初小組數學科第二名

宜蘭縣七賢國民小學

作者：李奎範、俞曉玫、陳筱君、邱莞庭

指導教師：鄭純玲、王惠珍

一、研究動機

學校每週的動動腦教室，在十月份時出了一題數學，在上圖圓圈處填入1、2、3、4、5、6、7、8共八個數字，每一個數填一次而且不可以重複，使各邊的數字和相等。起初，我們覺得很容易就開始填寫，結果答案都錯誤，經過一番嘗試錯誤，我們終於找出解答的捷徑，原來找到方法後竟然如此容易。

二、研究目的

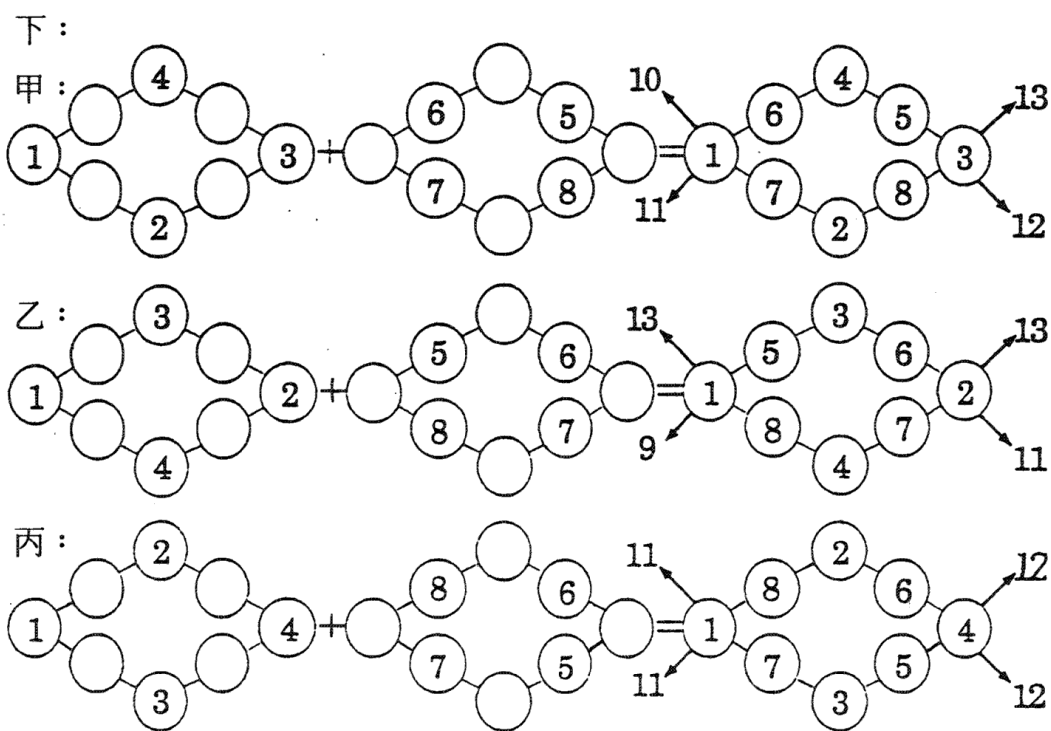
(一)菱形的四邊三個數的和有沒有規則性，如果有如何運用？

(二)找出三個數的和相等的原理，並尋找出是否會相等？

三、研究過程

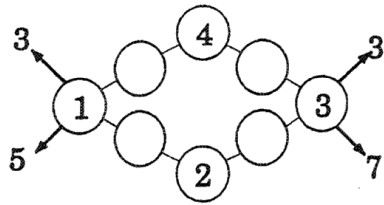
《問題一》將這八個數字依序填入圓圈中四邊和是否會相等？

(一)首先將1、2、3、4填入四個頂點，再將5、6、7、8填入四個中點，結果如下：



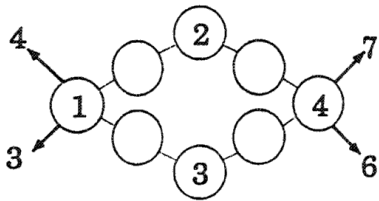
(二)有一位同學找出答案是：

我們由答案中1、2、3、4，並不是都在頂點，其中4在中點上原因何在？



我們以甲圖為例找出原因：

- (1)我們先將各邊相加，結果有兩邊數字相等，再將5、6、7、8分別填入中點時則無法有兩個數相等，所以四邊總和無法相等。
- (2)乙也有相同情形。



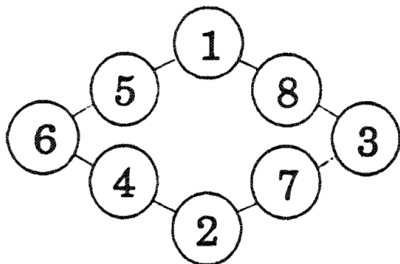
丙圖中

- (1)四邊和分別為3、4、6、7雖然沒有重複，但插入中點的四個數5、6、7、8是連續數，所以相加後無法相等。

《問題二》四邊和都相等，需具備那些條件？

- (1)四邊和各是12，四邊總和為48 ($12 \times 4 = 48$)。

- (2) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$ ，比四邊總和少，為什麼？



- (3)四邊和是 $(6 + 5 + 1) + (1 + 8 + 3) + (3 + 7 + 2) + (2 + 4 + 6)$ ，原來6、1、3、2多加了一次，這四個數也正是四個頂點，可見 $6 + 1 + 3 + 2 = 12$ ， $12 + (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) = 48$ 。

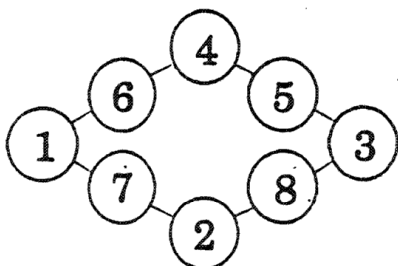
- (4)48分成四邊，每一邊 $48 \div 4 = 12$ 。

- (5)原來每一邊數的和要為4的倍數。

- (6) $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$ 的和是36，36是4的倍數，所以四個頂點也要是4的倍數。

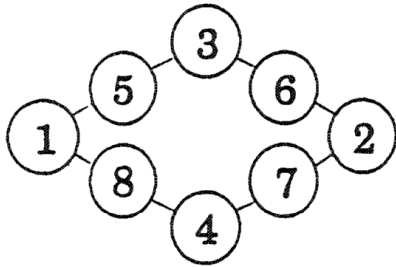
《問題三》是不是四頂點的數和加原來數的和才能使每邊和相等？

(一)問題二中了解，四頂點數和 $6 + 1 + 3 + 2 = 12$ ， $12 + 36 = 48$ ， $48 \div 4 = 12$ ，所以每一邊數和是12，才能相等。



- (1)甲題中四頂點數和 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ， $10 + 36 = 46$ ， $46 \div 4 = 11 \cdots 2$ ，結果是11餘2，難怪！

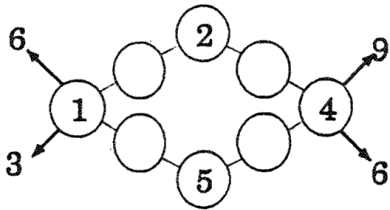
- (2)乙題中四頂點和 $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ ，和甲題同樣情況。



(二)如果四個頂點與原數總和是4的倍數，是否就能整除？

我以 $1+2+4+5=12$ ，試試看：

ㄅ 1

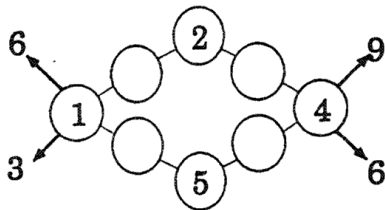


(1)我們按順時針方向填入四個頂點： $1+2+4+5=12$ ， $12+36=48$ ， $48\div 4=12$ ，每邊和是12。

(2)但有兩行和是6，要填入的四個數3、6、7、8並不能同時在兩個中點填6，所以不行。

(3)我們以十字交叉法填入，同樣碰到有兩行數相等，各是6，而要填的數3、6、7、8中不能同時使用兩個6。

ㄅ 2



(4)我們檢查丁表中四個頂點：

$6+1=7$ ， $1+3=4$ ， $3+2=5$ ， $6+2=8$ ，每邊和各不相同，所以可以在中點填入12的差數，如 $6+1=7$ ，中點填5， $7+5=12$

$1+3=4$ 中點填8， $4+8=12$

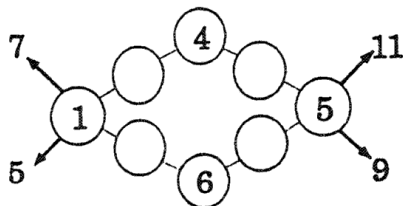
$3+2=5$ 中點填7， $5+7=12$

$2+6=8$ 中點填4， $8+4=12$

(5)我們發現四頂點和須為4的倍數，但也不可以有兩個連續數如ㄅ1、ㄅ2中(1、2)(4、5)是兩組連續數，因為兩個連續數和中必有兩邊和相等。

《問題四》四個頂點和是4的倍數，但也不採用兩個連續數，是不是就可以四邊相等？

ㄅ 1



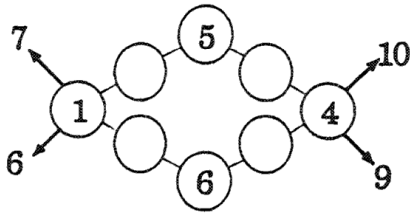
(一)(1)取 $1+4+5+6=16$ ， $16+36=52$ ， $52\div 4=13$ 。

(2)我們按順時針方向填入，各邊和為5、7、11、9。

(3)加入中點的四個數是2、3、7、8， $5+8=13$ ， $7+6=13$ ， $11+2=13$ ， $9+4=13$ ，結果4、6必須重複兩次，但3和7並沒有使用，為什麼會這樣？

(二)我們不順時鐘方向而採用十字交叉法,各邊和分別為6、7、10、9而要填入的數2、3、7、8。

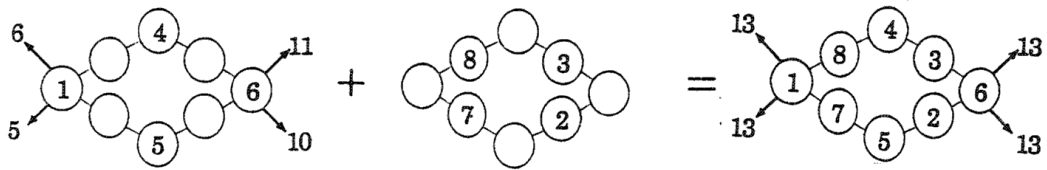
又 2



$$6+7=13, 7+6=13, 10+3=13, 9+4=13。$$

同樣4和6必須重複兩次,但2和8並未使用,爲什麼?

(三)我們檢查了表中發現連續數1、2是在對角,我們也將連續數的4、5放在對角,試試看!

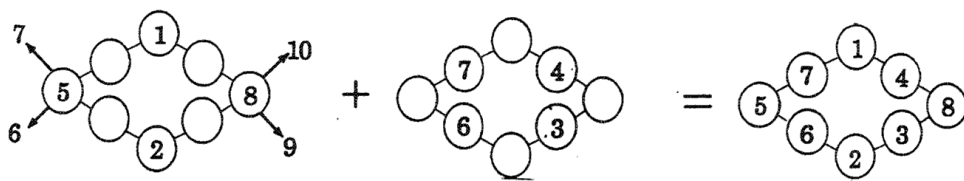


(1)各邊和各是5、6、11、10。

(2)要填入的四個數2、3、7、8。

$5+8=13, 6+7=13, 11+2=13, 10+3=13$, 結果各邊和都是13, 符合!

(四)我們發現將連續數的兩個數放在對角就可以使各邊和相等,現將1、2、5、8填入四個頂點。



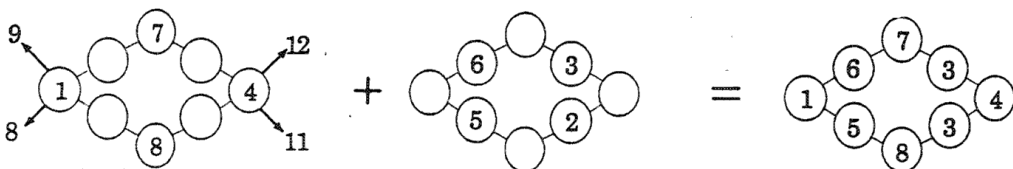
(1) $1+2+5+8=16, 16+36=52, 52\div 4=13$, 每邊和13。

(2)各邊和各是3、7、10、9, 要填入的各數3、4、6、7於中點。

(3) $5+8=13, 6+7=13, 11+2=13, 10+3=13$ 。

(4)各邊和都是13。

(五)我們以7、8、1、4放在頂點來檢驗:



(1) $7+8+1+4=20$ ， $20+36=56$ ， $56\div 4=14$ ，每邊和是14。

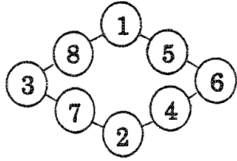
(2) 各邊和各為8、9、12、11要填入的各數2、3、5、8。

$8+6=14$ ， $9+5=14$ ， $12+2=14$ ， $11+3=14$ 。

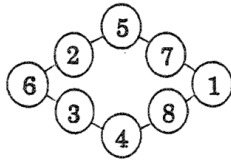
(3) 結果各邊和是14。

(六) 我們照上述研究，終於找出下列數，並分別每邊和12、13、14、15。

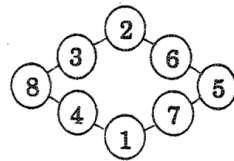
每邊和12 (□)



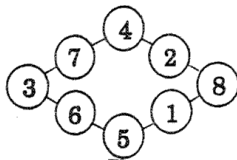
每邊和13 (□1)



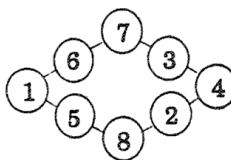
(□2)



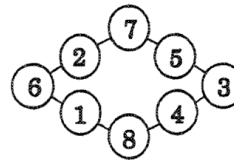
每邊和14 (勿1)



(勿2)



每邊和15 (女)



《問題五》除了找四頂點和是4的倍數且不能有兩組是連續數外，還有沒有其他規律性？

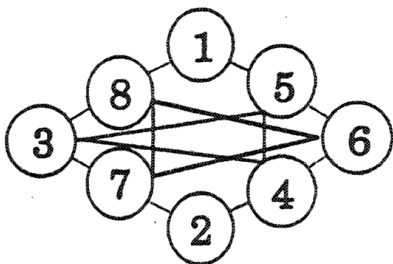
(一) 我們研究結果對角必須以連續數1、2或4、5或7、8排入才能使各邊相等，若以連續性(2、3)(3、4)(5、6)(6、7)四組連續排在對角，和一定無法相等。

(二) 我們發現當以(1、2)填入對角線時3、4、5和6、7、8的連續數正好形成兩個等腰三角形，以(□表)和(□1表)為例：

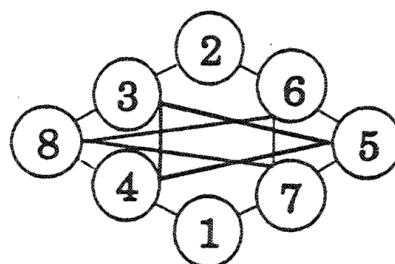
(1) 1、2在對角線上3、4、5和6、7、8連續數正好形成兩等腰三角形。

(2) 1、2在對角線，3、4、5和6、7、8連續數同樣形成兩等腰三角形。

□表

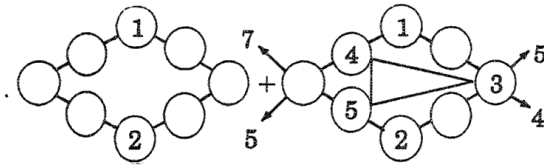


□1表



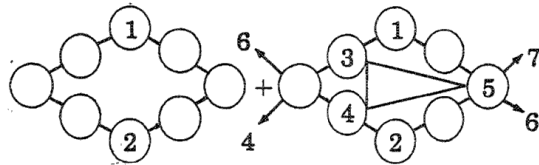
(三)即然3、4、5和6、7、8是等腰三角形，是不是任意填入就可以相等？

ㄅ1表



結果左半部兩邊只餘一個空格，但兩邊和並不相等，分別是5和7無論空格填入多少都無法相等，且有兩邊同是5。

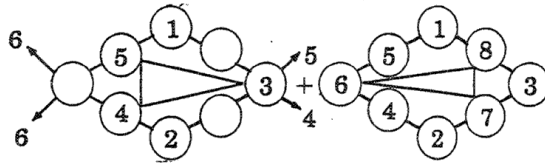
ㄅ2表



ㄅ2也同樣的左半部兩邊和不相等，且有兩邊和同是6。

(四)由上述實際操作知道必須有順序的填入3、4、5三個數，且必須使空下頂點的那兩邊和相等。

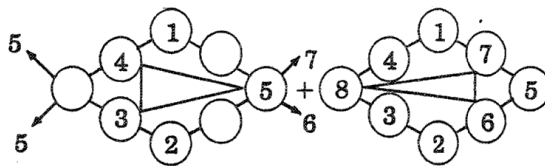
ㄅ3表



要填入的數是6、7、8依各邊和的相反填入，和最大的填入最小數：

$$6+6=12, 5+7=12, 2, 4+8=12。$$

ㄅ4表



要填入的數是6、7、8依各邊和最大者填入最小數：

$$5+8=13, 6+7=13, 3, 7+6=13。$$

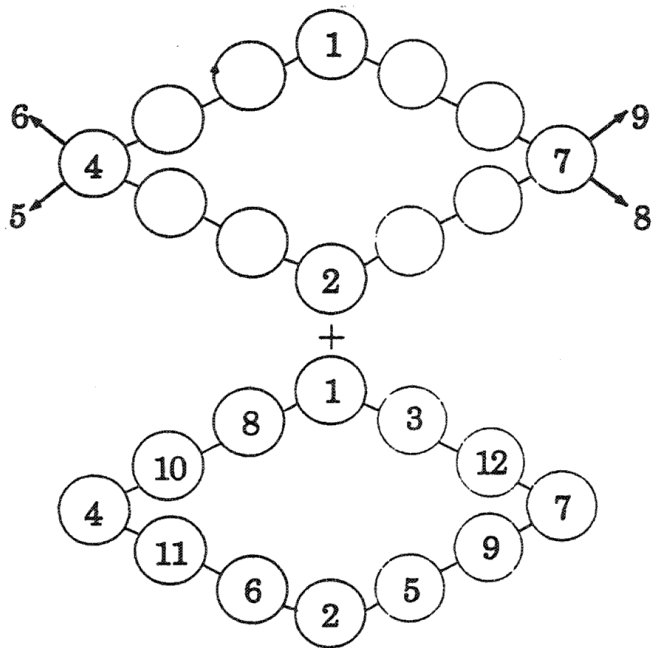
《問題六》由上述研究，我們類推到中間有兩個空格的情形，是否能使每邊相等？

(一)要填入的數是(1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12)，總和是78。

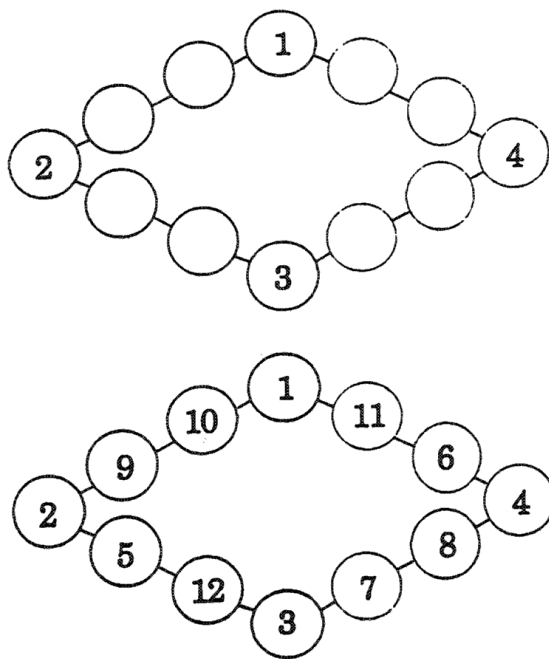
(二)四邊總和要是4的倍數，所以四個頂點我們以(1、2、4、7)填入，和是14。

$$78+14=92, 92\div 4=23, \text{所以每邊和} 23。$$

(三)以1、2為對角線排列各邊和，分別是5、6、8、9要填入中點的數是3、5、6、8、9、10、11、12：



$5 + 18 = 23 = 5 + 10 + 8$
 $6 + 17 = 23 = 6 + 11 + 6$
 $8 + 15 = 23 = 8 + 3 + 12$
 $9 + 14 = 23 = 9 + 5 + 9$
 結果各邊和都相等！



(四)我們嘗試以 (1、2、3、4)
 填入四個角：

(五)要填入的數是5、6、7、8、
 9、10、11、12：
 $3 + 19 = 22 = 3 + 9 + 10$
 $5 + 17 = 22 = 5 + 11 + 6$
 $5 + 17 = 22 = 5 + 5 + 12$
 $7 + 15 = 22 = 7 + 7 + 8$

《問題七》用何種方法可以迅速的找出三方陣和相等？

(一)

1		
	2	
		3

1	6	()
	2	4
5		3

1	6	8
9	2	4
5	7	3

- ①以1、2、3為角
- ②4、5、6以三角形填入
- ③使()空格和要相同
 $1 + 6 = 7, 3 + 4 = 7。$
- ④再依差數填入7、8、9。
- ⑤每邊和恰好是15。

(二)

4		
	5	
		6

4	3	
	5	1
2		6

4	3	8
9	5	1
2		6

①以4、5、6為對角。

②分別以1、2、3和7、8、9以三角形依序填入，每邊和是15。

(三)

7		
	8	
		9

7	3	
	8	1
2		9

7	3	5
6	8	1
2	4	9

①以7、8、9為對角。

②分別將1、2、3和4、5、6以三角形依序填入，每邊和是15。

四、結 論

(一)我們從討論過程中了解，要將1、2、3、4、5、6、7、8填入菱形四頂點與四中點使每邊和相等。首先，填入的四個數和必須是4的倍數而且不能有兩組連續數如(1、2)(4、5)。

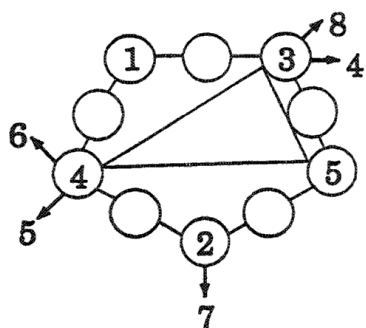
(二)四個頂點的對角要以(1、2)(4、5)(7、8)填入才能使各邊和相等。

(三)四個頂點填好後，再依差數填入四個中點，四邊和就會相等。

(四)我們找出解答後找出更簡單的方法：以(1、2)為對角時(3、4、5)(6、7、8)成三角形；以(4、5)為對角時(1、2、3)(6、7、8)成三角形；以(7、8)為對角時，(1、2、3)(4、5、6)成三角形，依序使左邊和相等，很快就可以找出每邊和相等。同這種方法可以迅速的找出三方陣和相等。

(五)運用我們研究的方法也可以很快的找出菱形角邊四個數和相等。

(六)我們以相同的方法找出五邊形每邊和相等的方法：



A :

(1)五邊形要填入的空格共10格

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55。$$

(2)有五個頂點，我們以(1+2+3+4+5=15)。

$$55+15=70, 70\div 5=14, \text{每邊和}14。$$

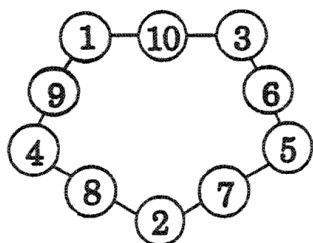
(3)以1、2為對角3、4、5成三角形填入，每邊和14。

B :

(1)五個頂點以(6+7+8+9+10=40)。

$$55+40=95, 95\div 5=19, \text{每邊和}19。$$

(2)以6、7為對角8、9、10成三角形填入，每邊和19。



五、參考資料

牛頓數學小百科
歷屆科展資料

評 語

討論如何在菱形的頂點與各邊中點填入連續整數，使各邊上各數和相等，是初小學數裡常見的問題，本作品中，作者從最簡單的菱形8點，填入1、2、……8等數，經嘗試，觀察而歸納出要使四邊上三數之和相等的條件，並根據其所歸納而得之條件求出各種可能的填法，此歸納之能力，就初小的學生而言並不容易。

本作品再將問題推廣到菱形12點（邊上增為兩點）及五邊形10點（頂點與中點）推廣能力亦是值得肯定的。