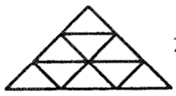
神奇三角形世界

初小組數學科第一名

台北市立師院附設實驗國民小學　　作　者：黃道生、李俊緯
指導教師：王緒溢

一、研究動機

有次在上課的時候上到了三角形，回家後我們就開始想，△有一個三角形，有五個三角形，有十三個三角形，但是層數越多就越不好算，因此我們想找出簡便的方法。

二、研究目的

(1)求出多層三角形中的三角形總數
(2)求出多層三角形中的上三角形總數
(3)求出多層三角形中的倒三角形總數
(4)求出多層三角形中的少一頂角、少二頂角、和少三頂角的三角形總數

三、研究過程

我們先一個一個的算，從一層到五層，它們的總數分別是：

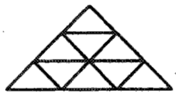
層數	總數	上三角形	倒三角形	少一頂角	少二頂角	少三頂角
一	1	1	0	0	0	0
二	5	4	1	2	1	0
三	13	10	3	9	6	3
四	27	20	7	22	18	14
五	48	35	13	42	37	32

這些計算的結果可以幫助我們核對後面所做的研究。

過程之一

㈠三角形的總數 L_n

先從三層的三角形開始



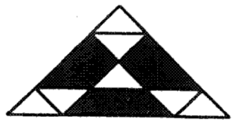
1.先把 L_n化爲三個少一層三角形的組合，所以$L_n = L_{n-1} \times 3$。

2.加上最大的三角形，所以 $L_n = L_{n-1} \times 3 + 1$。

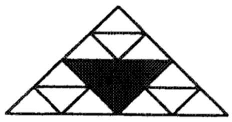
3.在分成三個少一層三角形的組合時有重覆地方是：

它是三個L_{n-2}，所以公式成爲：$L_n = L_{n-1} \times 3 + 1 - L_{n-2} \times 3$ 。

4.接下來用四層的三角形來算



我們發現四層和三層三角形不一樣：在四層時減掉 $L_{n-2} \times 3$ 會重覆多減一次 L_{n-3}，計算時要把它加回來，所以公式就變成爲 $L_n = L_{n-1} \times 3 + 1 - L_{n-2} \times 3 + L_{n-3}$，後來發現偶數層時有一個最大的倒三角沒被算到，所以計算偶數層時要多加 1 。



因此公式變成：$L_n = L_{n-1} \times 3 + 2 - L_{n-2} \times 3 + L_{n-3}$ 。

所以我們得到的計算三角形總數的公式爲：

◑奇數層 $L_n = L_{n-1} \times 3 + 1 - L_{n-2} \times 3 + L_{n-3} \quad N \geqq 3$

◑偶數層 $L_n = L_{n-1} \times 3 + 2 - L_{n-2} \times 3 + L_{n-3} \quad N \geqq 3$

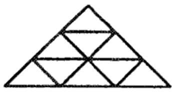
$L_0 = 0, \quad L_1 = 1, L_2 = 5$

㈡上三角形的總數

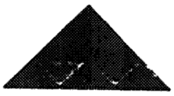
先從三層的上三角形來看

1.把三層的三角形化爲三個二層的三角形來看，就是三個U_{n-1}，得到$U_n = U_{n-1} \times 3$。

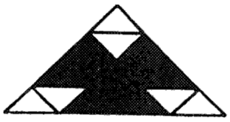
2.加上自己本身就是上三角形，所以$U_n = U_{n-1} \times 3 + 1$。



3.在計算U_{n-1}時重複了三個少二層三角形，要再把它們減掉，所以$U_n = U_{n-1} \times 3 + 1 - U_{n-2} \times 3$。



4.而在四層三角形中，我們發現四層的三角形會多減一個少三層三角形，要加回來，因此公式成爲$U_n = U_{n-1} \times 3 - U_{n-2} \times 3 + U_{n-3} + 1$。



所以我們得到的計算上三角形總數的公式爲：

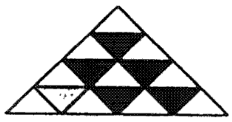
◑ $U_n = U_{n-1} \times 3 - U_{n-2} \times 3 + U_{n-3} + 1 \qquad N \geqq 3$

$U_0 = 0,\ U_1 = 1,\ U_2 = 4$

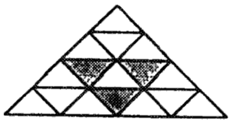
(三)倒三角形的總數D_n

先從四層的倒三角形來看

1.把D_n化成三個少一層三角形的組合，所以$D_n = D_{n-1} \times 3$。

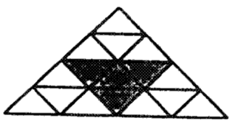


2.再找重複的地方如下圖：

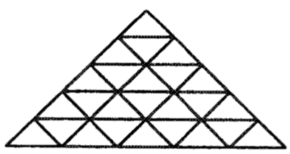


所以$D_n = D_{n-1} \times 3 - D_{n-2} \times 3$。

3.四層有一個最大的倒三角形，所以$D_n = D_{n-1} \times 3 - D_{n-2} \times 3 + 1$；另外在計算重複時，多減了少三層的倒三角形，要加回來，因此公式成爲：$D_n = D_{n-1} \times 3 - D_{n-2} \times 3 + D_{n-3} + 1$。



4.再看奇數層的D_5，D_5和D_4不同的地方只有一項，那就是D_5沒有最大的倒三角形，所以公式變成$D_n = D_{n-1} \times 3 - D_{n-2} \times 3 + D_{n-3}$。



所以我們得到的計算倒三角形總數的公式為：

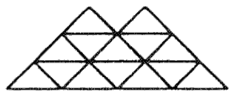
◑ 奇數層$D_n = D_{n-1} \times 3 - D_{n-2} \times 3 + D_{n-3}$　　　$N \geqq 3$

◑ 偶數層$D_n = D_{n-1} \times 3 - D_{n-2} \times 3 + D_{n-3} + 1$　　$N \geqq 3$

$D_0 = 0$, $D_1 = 0$, $D_2 = 1$

(四)少一頂角時的三角形總數A_n

先從四層的三角形來看：



1.先把它分為二個少一層三角形的組合，所以總數為$A_n = L_{n-1} \times 2$。

2.計算時重覆了一個少二層的三角形L_{n-2}，要把它減掉，因此公式成為$A_n = L_{n-1} \times 2 - L_{n-2}$。

3.另外，因為將三角形分成兩個少一層三角形的組合，所以橫跨兩個三角形之間的倒三角形都沒被算到，要將它們加回去，在偶數層時要加$(n/2-2)+1$，而奇數層時要加$(n+1)/2-2$。

所以我們得到計算少一頂角時，三角形總數的公式為：

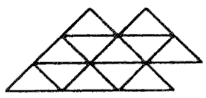
◑ 奇數層$A_n = L_{n-1} \times 2 - L_{n-2} + (n+1)/2 - 2$　　$N \geqq 3$

◑ 偶數層$A_n = L_{n-1} \times 2 - L_{n-2} + (n/2-2) + 1$　　$N \geqq 3$

$A_1 = 0$, $A_2 = 2$

(五)少二頂角時的三角形總數B_n

先從四層的三角形來看：

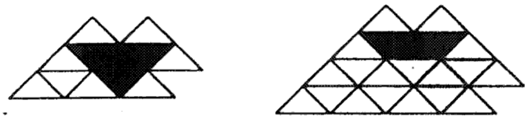


1.把它分為一個少一層和一個少二層三角形的組合，總數為$B_n = L_{n-1} + L_{n-2}$。

2.但計算時會重複一個少三層的三角形，所以要減掉一個L_{n-3}，因此公式成為

$B_n = L_{n-1} + L_{n-2} - L_{n-3}$。

3.另外，因為將三角形分成一個少一層和一個少兩層三角形的組合，橫跨兩個三角形之間的倒三角形都沒被算到，所以計算時要將它們加回去，在偶數層時要加$(n/2-2)\times 2+1$，而奇數層時要加$((n+1)/2-2)\times 2$。



所以我們得到的計算少二頂角時，三角形總數的公式為：

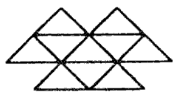
◑ 奇數層$B_n = L_{n-1} + L_{n-2} - L_{n-3} + ((n+1)/2-2)\times 2$　$N \geqq 4$

◑ 偶數層$B_n = L_{n-1} + L_{n-2} - L_{n-3} + (n/2-2)\times 2+1$　$N \geqq 4$

$B_1 = 0,\ B_2 = 1,\ B_3 = 6$

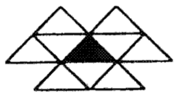
(六)少三頂角時的三角形總數C_n

先從四層的三角形開始：



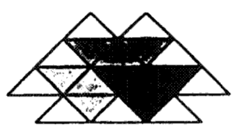
1.先把C_n化為三個少二層三角形的組合，所以$C_n = L_{n-2}\times 3$。

2.再來要找出重覆的地方，我們找到重覆地方是L_{n-3}。



它被計算了三次，因此要減去二次，所以公式成為：$C_n = L_{n-2}\times 3 - L_{n-3}\times 2$

3.另外，因為將三角形分成三個少二層三角形的組合，橫跨兩個三角形之間的倒三角形都沒被算到，要將它們加回去，在偶數層時要加$(n/2-2)\times 3+1$，而奇數層時要加$((n+1)/2-2)\times 3$。



所以我們得到計算少三頂角時，三角形總數的公式為：

◑ 奇數層$C_n = L_{n-2}\times 3 - L_{n-3}\times 2 + ((n+1)/2-2)\times 3$　$N \geqq 4$

◑ 偶數層$C_n = L_{n-2}\times 3 - L_{n-3}\times 2 + ((n/2-2)\times 3+1$　$N \geqq 4$

$C_1 = 0,\ C_2 = 0,\ C_3 = 3$

(七)根據前面得到的公式，輸入電腦推算1～15層的三角形個數如下：

層數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
總數	1	5	13	27	48	78	118	170	235	315	411	525	658	812	988
上三角形	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680
倒三角形	0	1	3	7	13	22	34	50	70	95	125	161	203	252	308
少一頂角	0	2	9	22	42	71	110	161	225	304	399	512	644	797	972
少二頂角	0	1	6	18	37	65	103	153	216	294	388	500	631	783	957
少三頂角	0	0	3	14	32	59	96	145	207	284	377	488	618	769	942

過程之2

1.三角形總數的求法：

三角形的總數，依層數為1，5，13，27，48，78，118，170，235，315，411……。為了要尋找這個數列的關係式，我們把它們的差額算出來，也就是1，4，8，14，21，30，40，52，65，80，96，……。為每一層之間總數的差額。

從差額的數列來看1，4，8，14，21，30，28，40，52，65，80，96，……，我們把它們看成1×1，1×4，2×4，2×7，3×7，3×10，4×10，4×13，5×13，5×16，6×16，……。

把這個差額數列分成奇數和偶數兩個部分，計算偶數層時，要把偶數層和前一個奇數層的差額合起來，而計算奇數層時，就要把奇數層和前一個偶數層的差額合起來。因此，偶數層的差額數列變成1×5，2×11，3×17，4×23，5×29，……，如此我們可以歸納出計算偶數層N的三角形總

數$L_{偶}$：設N＝2 ，則$L_{偶} = \sum_{n=0}^{N+2} n(6_{n-1})$ 。

同時，奇數層的差是3×4，5×7，7×10，9×13，11×16，……，為了計算時的方便，我們設n＝(N－1)/2，則奇數層N的三角形總數為

$$L_{奇} = \sum_{n=0}^{(N-1)\div 2} (2n+1)(3n+1)$$

2.上三角形總數的求法：

上三角形的總數，依層數為1，4，10，20，35，56，84，120，165，……。為了要尋找這個數列的關係式，我們把它們的差額算出來，也就是1，3，6，10，15，21，28，36，45，55，……，為上三角形總數間的差額。

從差額的數列來看1，3，6，10，15，21，28，36，45，55……我們把它們看成1×1，1×3，2×3，2×5，3×5，3×7，4×7，4×9，5×9，5×11，……。

把這個差額數列分成奇數和偶數兩個部分，計算偶數層時，要把偶數層和前一個奇數層的差額合起來，而計算奇數層時，就要把奇數層和前一個偶數層的差額合起來。因此，偶數層的差額數列變成1×4，2×8，3×12，4×16，5×20，……。

如此我們可以歸納出計算偶數層N的上三角形總數公式，爲了計算時的方便，我們設n＝N/2，則$Un=\sum_{n=0}^{n/2}(2n)^2$。同時，奇數層的差是1，9，25，49，……，所以計算奇數層N的上三角形總數公式爲，爲了計算時的方便，我們設n＝(N＋1)/2，則$Un=\sum_{n=1}^{(n+1)/2}(2n-1)^2$。

3.倒三角形總數的求法：

倒三角形的總數，依層數爲0，1，3，7，13，22，34，50，70，95……。爲了要尋找這個數列的關係式，我們把它們分成奇數層和偶數層，也就是分成0，3，13，34，70，……，爲奇數層倒三角形的總和；以及1，7，22，50，95，……，爲偶數層倒三角形的總和。

從奇數層的數列來看0，3，13，34，70，……，其差數3，10，21，36，……，我們把它們看成1×3，2×5，3×7，4×9，……。如此我們可以歸納出計算奇數層N的倒三角形總數$D_{奇}$：爲了計算時的方便，我們設

$N=2n+1$，則$D_{奇}=\sum_{n=0}^{(n-1)\div 2} n\times(2n+1)$

從偶數層的數列來看1，7，22，50，95，……，其差數爲6，15，28，45，……，我們就把它們看成2×3，3×5，4×7，5×9，……。如此我們可以歸納出計算偶數層N的倒三角形總數$D_{偶}$：設N＝2n，則$D_{偶}=\sum_{n=1}^{n\div 2} n\times(2n-1)$。

4.少一頂角三角形總數的求法：

少一頂角三角形的總數，依層數爲0，2，9，22，42，71，110，161，258，304，399，512，644，797，972，……。爲了要尋找這個數列的關係式，我們算出它們與三角形總數的差額爲1，3，4，5，6，7，8，9，10，

11，12，13，14，15，16，……。從二層開始算：1，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12，13，14，15，16……，我們一看就知道公式爲An＝Ln－(N＋1)。

5.少二頂角三角形總數的求法：

少二頂角三角形的總數，依層數爲0，1，6，18，37，65，103，153，216，294，388，500，631，783，957，……。爲了要尋找這個數列的關係式，我們算出它們與三角形總數的差額爲1，4，7，9，11，13，15，17，19，21，23，25，27，29，31，……。直接從三層開始算：7，9，11，13，15，17，19，21，23，25，27，29，31……。它們是相差2的數列，所以公式一定是2×？＋？，觀察7，9，11，13，15，17，19，21，23，25，27，29，31，……，發現關係是（2×層數＋1），因此公式爲：Bn＝Ln－(2×N＋1)。

6.少三頂角三角形總數的求法：

少三頂角三角形的總數，依層數爲0，0，3，14，32，59，96，145，207，284，377，488，618，769，942，……。爲了要尋找這個數列的關係式，我們算出它們與三角形總數的差額爲1，3，10，13，16，19，22，25，28，31，34，37，40，43，46，……。從三層開始算：10，13，16，19，22，25，28，31，34，37，40，43，46，……。它們是相差3的數列，所以公式一定是3×？＋？，觀察10，13，16，19，22，25，28，31，34，37，40，43，46，……，發現關係是（3×層數＋1），因此公式爲：Cn＝Ln－(3×N＋1)。

四、結　論

①我們在過程之1利用解析的方法推導出計算公式如下：

	奇數層	偶數層
總　　數	$L_n=L_{n-1}x3+1-L_{n-2}x3+L_{n-3}$ ，$N \geqq 3$	$L_n=L_{n-1}x3+2-L_{n-2}x3+L_{n-3}$ ，$N \geqq 3$
上三角形	$U_n= U_{n-1}x3-U_{n-2}x3+U_{n-3}+1$ ，$N \geqq 3$	
倒三角形	$D_n= D_{n-1}x3- D_{n-2}x3+ D_{n-3}$ ，$N \geqq 3$	$D_n= D_{n-1}x3- D_{n-2}x3+ D_{n-3}+1$ ，$N \geqq 3$
少一頂角	$A_n=L_{n-1}x2-L_{n-2}+(n+1)/2-2$ ，$N \geqq 3$	$A_n=L_{n-1}x2-L_{n-2}+(n/2-2)+1$ ，$N \geqq 3$
少二頂角	$B_n=L_{n-1}+ L_{n-2}-L_{n-3}+((n+1)/2-2)x2$ ，$N \geqq 4$	$B_n=L_{n-1}+ L_{n-2}-L_{n-3}+(n/2-2)x2+1$ ，$N \geqq 4$
少三頂角	$C_n= L_{n-2}x3-L_{n-3}x2+((n+1)/2-2)x3$ ，$N \geqq 4$	$C_n= L_{n-2}x3-L_{n-3}x2+(n/2-2)x3+1$ ，$N \geqq 4$

②再應用過程之 **1** 的公式來推導過程之 **2** ，歸納出計算多層三角形時各種情形總數的公式：

	奇數層	偶數層
總　　數	$L_{奇}=\sum_{n=0}^{(N-1)+2}(2n+1)(3n+1)$ ，n=(N-1)/2	$L_{偶}=\sum_{n=0}^{N/2}n(6n-1)$ ，n=N/2
上三角形	$U_{奇}=\sum_{n=1}^{(N+1)/2}(2n-1)^2$ ，n=(N+1)/2	$U_{偶}=\sum_{n=0}^{N/2}(2n)^2$ ，n=N/2
倒三角形	$D_{奇}=\sum_{n=0}^{(N-1)+2}n(2n+1)$ ，n=(N-1)/2	$D_{偶}=\sum_{n=0}^{N+2}n(2n-1)$ ，n=N/2
少一頂角	$A_n= L_n -(n+1)$	
少二頂角	$B_n= L_n -(2n+1)$	
少三頂角	$C_n= L_n -(3n+1)$	

五、感　想

從本次科展我們發現，在求多層三角形總數的過程當中，可以用不同的方法導出相同的答案；對於將來思考問題頗有幫助。

評　語

該作品推導多層三角形中各種三角形（上△，倒△，缺頂形）之總數，其方法爲觀察累加一層時，各種三角形總數之變化情形，據以得到遞迴公式，再清楚說明（証明）該公式之正確性，並予以印証。就初小學生而言，其所顯現之歸納與演繹推論能力實不可多得，此外，該作品之說明（書面與口頭）內容之表達井然有序思考愼密，充分顯示學生理念之清晰與思路之條理。