完美三角形知多少

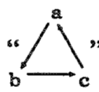
國中組數學科第三名

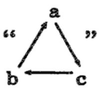
國立高雄師大附中

作　　者：何思賢、黃泰霖

指導教師：康木村、吳吉昌

一、研究動機

班際籃球賽期間，我走到體育組前面的佈告欄，看到籃球賽程有12隊參加，在比賽中有：a隊勝b隊、b隊勝c隊、c隊勝a隊，此種和局情況。我知道：若12個相異點中任三點不共線，兩兩連線有$\frac{12\times11\times10}{3\times2\times1}$個△。但我想到：若以1～n表各隊參賽名稱及點的編號，並定義「p→q」表第p隊勝第q隊，則三隊和局情況可以"

"或"

"表示，我們稱此為「完美三角形」。那麼在這定義下，若有n個隊伍舉辦了單循環賽，那麼形成完美△個數之範圍為何？於是就展開了我的研究之旅。

二、研究目的

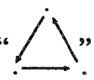
(一)由嘗試中尋出一有系統之作法，使此作法可以讓完美△之個數最多。

(二)由發現作法的特性導出完美△最多個數之一般式。

(三)證明完美三角形最少數目為零。

三、預備知識

(一)這個問題可另述為：

相異n點中任三點不共線，若兩兩連線並加箭號，則形如""""之範圍（即確定最多最少數）為何？（註：在研究過程中，我們n點之表示法有以「編號」表示，也有只以「點」表示的）

(二)相異n個點中，任意三點不共線，兩兩連線可得C_3^n個普通三角形，而完美三角形為普通三角形加箭號之特殊形式，所以完美三角形個數和普通三角形個數有關，又普通三角形個數與相異n個點（只要任意三點不共線）分佈位置無關，故完美△數目和n點分布無關，為方便起見，我們可以假定n點為一凸n邊

形的n個頂點。

(三)將一正偶數n分成二正整數，則二數乘積最大為 $\frac{n}{2}\times\frac{n}{2}$

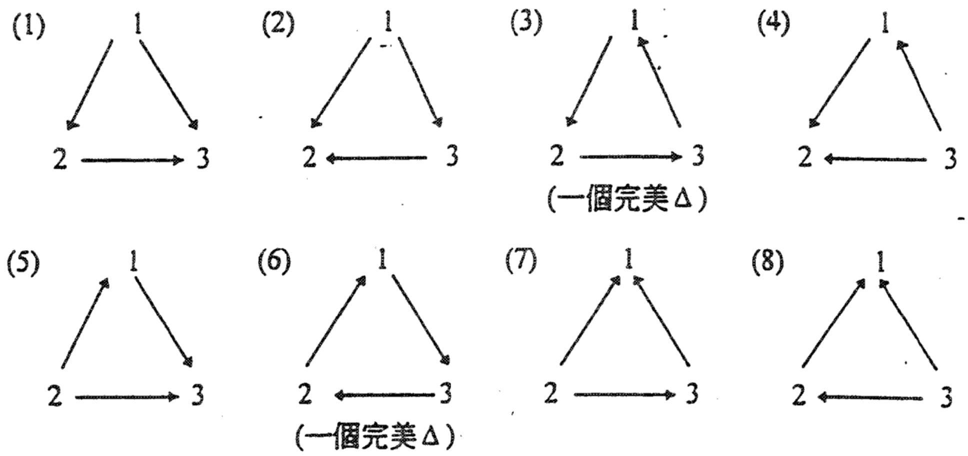
(四)將一正奇數n分成二正整數，則二數乘積最大為 $\frac{n+1}{2}\times\frac{n-1}{2}$

四、研究過程

(一)簡化問題（縮小樣本並尋求規律性）

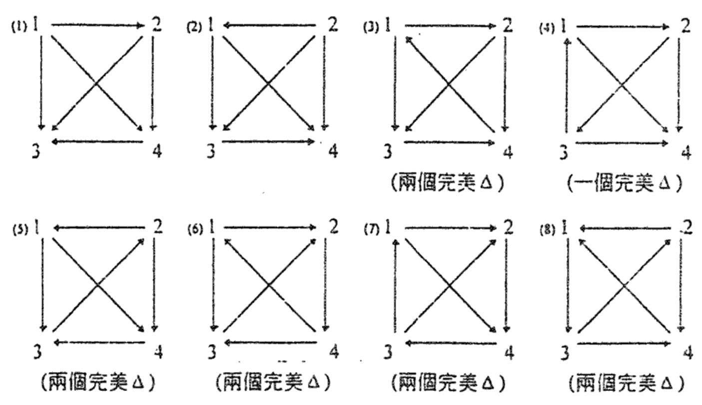
首先，我回憶到國小的「怎樣解題」中之「簡化問題」策略，有一為「縮小樣本、舉特例」。在此我們可對n=3和n=4的情況全部列出（是可以的，n=3的情形有$2\times2\times2=2^3=8$（種）情況，同樣的，n=4兩兩連線時，有$C^4_2=6$條）線，箭號方向每條有二種，故有$2^6=64$（種）情況，故列出並不難），然後作一探討。

1.n=3時（n表點數）：



從上我們知道：3個點時，兩兩連接，情況可能有0或1個完美三角形。

2.n=4時：



從上我們知道：4個點時，兩兩連接，情況可能有0或1或2個完美三角形。

3.n=5時：將有2^{10}=1024（種）情況，若一一作圖則太複雜，因此「一一列舉」法對一般情況不實用，所以此法我們只用到n=4。（一般地對於n個點情況，將有$2^{\frac{n\times(n-1)}{2}}$種情形；若令情形總數爲X，有$\log_2 X=C_2^n$）

由於以上之原因，我們先對n=3和n=4的情況加以分析、討論：

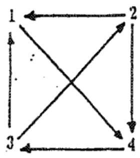
①n=3時，對產生一個完美△的情況，從中觀察發現：每隊（即每點）均一勝一敗（即箭號一出一進），無別情形。

②n=4時，對產生二個完美△的情況，從中觀察發現：每二隊爲一勝二敗，另二隊爲二勝一敗，無別情形。

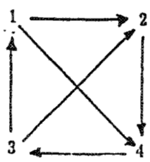
③從上面兩種情形，普遍存在一現象，就是：要形成最多完美△，總是每個點的勝負一定，如在四點時，有二點爲一勝二敗，另二點爲二勝一敗。因此再作更進一步探討。

㈡問題的深入探討：

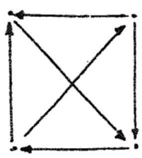
1.我們從n=4情況中取二種得到「兩個完美△」的圖形加以比較，如圖㈠、㈡，它們兩個經過了翻覆旋轉，其箭號無法疊合。但是我們若把數字去掉，分別得到圖㈢、圖㈣。因爲去掉數字以後，對於各點，只有「箭號進出次數」影響其完美△差異，且應「點之間是沒有分別的」，我們不必理會勝或負那些點。而在圖㈢中，有二點兩勝一敗，有二點一勝兩敗，圖㈣中，也有二點兩勝一敗，二點一勝兩敗。所以圖㈢情形和圖㈣相同。也就是圖㈠和圖㈡情形相同。於是我們得到：若兩組圖中，編號a_i的點和另一圖的b_i點其勝負情形相同（i=1，2，3⋯，n），那麼二圖完美△數必相同。

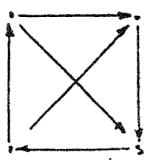


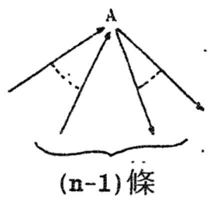
（圖一）



（圖二）


（圖三）


（圖四）



（圖五）

2.如圖㈤：

若A爲n點中任一點，那麼進出A之箭號共有n-1條，若要有機會構成完美△，需要「一進一出」來搭配。根據「乘法原理」，共有（進入箭號數×出去箭號數）個方法。再根據預備知識㈢㈣我們知道：

①當n爲偶數，即n-1爲奇數，對於每一點最多有

$$\frac{(n-1)+1}{2}\times\frac{(n-1)-1}{2}=\frac{n}{2}\times\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

個選擇，如此情況爲：

對於任意點，「射入箭號數爲$\frac{n}{2}$射出箭號數爲$\frac{n}{2}-1$，可使完美△最多

「或」射入箭號數爲$\frac{n}{2}-1$射出箭號數爲一，可使完美△最多

②當n爲奇數，即n-1爲偶數，對於每一點最多有

$$\frac{(n-1)}{2}\times\frac{(n-1)}{2}$$

個選擇以構成完美△，如此只有一情況：

對於任意點，射入箭號數＝射出箭號數＝n-1/2可使完美△最多。

由 2.可知在作圖時，只需分別對n爲奇數和n爲偶數分別作討論，然後設法達到 3.①、②結論，如此完美△個數將最多，再由1.知：如果我們的圖形達到 3.①、②結論，我們不必理會同樣達到①、②結論之其它情形，也就是說，我們只要得到情形之一，我們便可直接得到n點的最多完美△數。例：n=4時，我們若得圖㈠，符合①結論，我們可直接確認完美△數爲2是最多的，而不必理會圖㈡等其它情形。因爲圖㈠和圖㈡其實是相同的，可當作只是冠上不同的數字。

㈢嘗試作有系統的作圖

有了㈡的結果，我開始作圖，但仍老是碰釘子，我才察覺到：應有系統的作圖，也就是擬定一安排，而此安排能有一般性，在此之前，我先對此安排出現的特性作一討論。

1.平衡（箭頭的進入數和需要等於箭頭的射出數和）

對於" A→B" ，以A點來看，箭頭射出數爲1，射入數爲0，以B點來看，射入數爲1，射出數爲0，於是可得：射出總數=0+1=射入總數。由於一組圖的每一箭號可看作一個" A→B" ，所以知：一組圖中，箭號射出數=箭號射入數。有了上結果，我們可開始安排。

(1)n=2k+1（$k\in N$）

對於每一點，可作出2k條線，由㈡結果知：最好爲k進k出，如此才有製造較多完美△的機會。現在來考慮「平衡問題」（從這裡開始，我們以P(x)表P點的「射入數—射出數」），我們令這些點爲P_1，P_2，...，Pn，則因每一個Pi(x)=0，（i=1，2，3，...，n），$\therefore P_1(x)+P_2(x)+...Pn(x)=0$，於是我們作圖時，只需讓每個點箭號k進k出

(2)n=2k（k=2，3，4...）

對於每一點，可作出2k-1條線，由㈡結果知：最好爲k進k-1出或k-1進k出。現在考慮平衡問題，我們令這些點爲P_1，P_2...，P_2k。則可知：Pi

$(x)=\pm1$，（$i=1$，2，3......，n）。要使$P_1(x)+P_2(x)+...+P_k(x)+...+P_{2k}(x)=0$，需要正負同時存在，且必需$Pi(x)$「正號」的個數和「負號」的個數相同。在此，我們可令$P_1(x)$，$P_2(x)$，...$Pk(x)$值為-1；$P_{k+1}(x)$，$P_{k+2}(x)$，...$P_{2k}(x)$值為1。如此可以平衡，也較好處理。

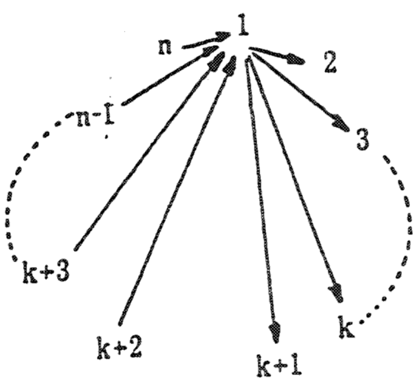
2.定出有系統的方法

我們定出的方法必需有助於導出「完美△個數」一般式（∵此法需有一般性），另外此法不可能同時適用奇偶數，但情形是相似的。經過了數次試驗，我們終於找到了一般作法，如下：

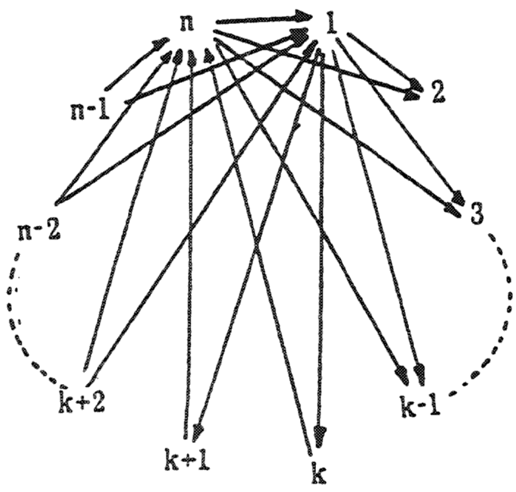
(1)$n=2k+1$時，（$k\in N$）

我將n點編號為1, 2, 3, ..., k, ... 2k+1，依順時針方向排列，然後遵循下列原則：

設p為1～n中任一號，則以p射出射入的線中，從p依順時針方向數起的第k+1個數內，除了p以外均為「輸給p」。從p依逆時針方向數起的第k+1個數內，除了p以外均為「勝p」。例：如（圖六）對於1號點，2～K+1為順時針方向數起的k+1個數除1外，為「輸給1」，k+2～n為逆時針方向數起的k+1個數除1外，為「勝1」。如此，1號為k勝k敗（k進k出）。其它號亦同。



〔圖六〕



〔圖七〕

(2)$n=2k$時，（$k\in N$）

我將n點編號為1, 2, 3, ..., k, ..., 2k, 依順時針方向排列，然後遵循下列原則：

①若p為1～k之任意點，則p依順時針方向數起的k+1個內除p以外「敗給p」，

其它的勝過p。如（圖七）的1號。

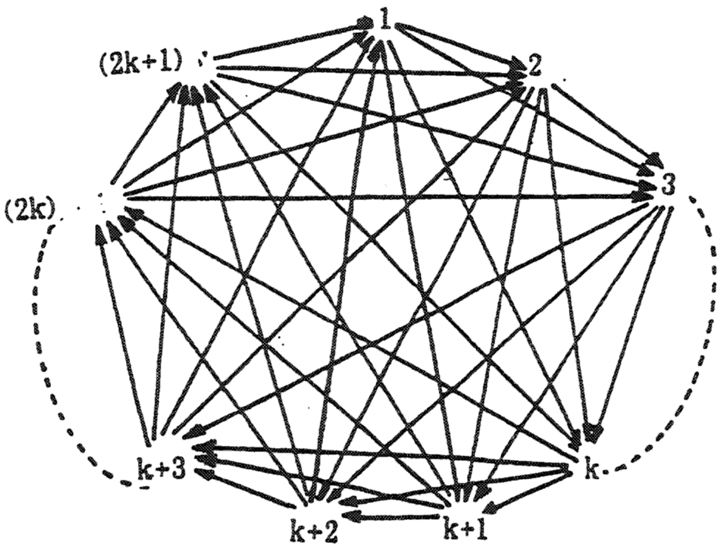
②若q爲k+1～n之任意點，則q依順時針方向數起的k個內除q外「敗給q」，其它的勝過q。如（圖七）的n號。

㈣循序漸進導公式：

由上我們知道，我們需要針對n=2k+1或n=2k各自導公式，我們必需利用這方法的「特質」。爲了方便敘述，我們以（1, 2, 3）表一以1開頭的完美△且亦表示1→2→3→1則和（2, 3, 1）、（3, 1, 2）表相同。現在，開始進行導公式的工作。

(1)n=2k+1（$k\in N$）見（圖十二）

導公式：



〔圖十二〕

①：包含1號點的完美△：

以$\overrightarrow{1,2}$爲邊的完美△：（1, 2, k+2）

以$\overrightarrow{1,3}$爲邊的完美△：（1, 3, k+2）（1, 3, k+3）

以$\overrightarrow{1,4}$爲邊的完美△：（1, 4, k+2）（1, 4, k+3）（1, 4, k+4）

⋮

以$\overrightarrow{1,k+1}$爲邊的完美△：

$$\underbrace{(1, k+1, k+2)\ (1, k+1, k+3)\ (1, k+1, k+4)\ \ldots\ (1, k+1, 2k)\ (1, k+1, 2k+1)}_{k個}$$

$= $ 共有$1+2+3+\cdots+k=\dfrac{(k+1)k}{2}$個完美△

②：同理：包含2號點的完美△有$\dfrac{(k+1)k}{2}$個

包含3號點的完美△有$\dfrac{(k+1)k}{2}$個

$\vdots$

包含n號點的完美△有$\frac{(k+1)k}{2}$個

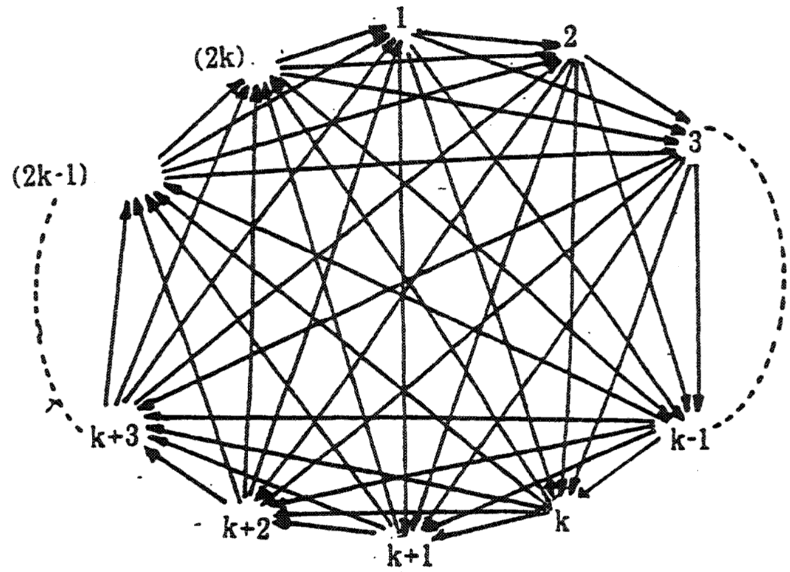
③：由①、②知：若不管重覆情形，完美△共有$\frac{1}{2}nk(k+1)=\frac{1}{2}k(k+1)(2k+1)$個

但在統計時，每個△因有三個點，又每點都計過一次完美△，所以完美△重覆了二次，也就是說，得到的答案數值爲眞正個數的三倍。所以完美△的個數最多爲

$$\frac{1}{3}[\frac{1}{2}k(k+1)(2k+1)]=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)\text{個}$$

在when $n=2k+1$（$k\in N$）

(2)$n=2k$（$n\in N, k\geqq 2$）見（圖十七）



〔圖十七〕

導公式：

我們以p表1～k之任一自然數，則要對「包含p」及包含「k+p」之完美△作探討。在此之前，我們先對每一個$\overrightarrow{a, b}$作討論。

若$a\leqq k$，$b\leqq k$

以m_1 表由b順時針方向數起之k+1個點內除b外之任意點，以t_1 表示由a逆時針方向數起之k個點內除a外之任意點。

若$a\leqq k, b>k$

以m_2表由b順時針方向數起之k個點內除b外之任意點，以t_1表由a逆時針方向數起之k個點內除a外之任意點。

若$a>k$, $b\leq k$

以m_1表由b順時針方向數起之k+1個點內除b外之任意點，以t_2表由a逆時針方向數起之k+1個點內除a外之任意點。

若$a>k$，$b>k$

以m_2表由b順時針方向數起之k個點內除b外之任意點，以t_2表由a逆時針方向數起之k+1個點內除a外之任意點。

由此，我們只要知道$m_1=t_1$，$m_1=t_2$，$m_2=t_1$，$m_2=t_2$ 之所有情況即可。

（註：$m_1=t_1$ 表同時符合「m_1點」和「t_1點」之所有點，其它亦同）

①包含p之完美△：

以p, $\overrightarrow{p+1}$爲邊：when $m_1=t_1$，有$m_1=t_1=k+p+1$

以p, $\overrightarrow{p+2}$爲邊：when $m_1=t_1$，有$m_1=t_1=k+p+1, k+p+2$

以p, $\overrightarrow{p+3}$爲邊：when $m_1=t_1$，有$m_1=t_1=k+p+1,$
$k+p+2, k+p+3$

⋮

以p, $\overrightarrow{k}$爲邊：when $m_1=t_1$,

有$m_1=t_1=k+\underbrace{p+1, k+p+2, \cdots, k+k}_{k-p個}$

以p, $\overrightarrow{k+1}$爲邊：when $m_2=t_1$,

有$m_2=t_1=\underbrace{k+p+1, k+p+2, \cdots, k+k}_{k-p個}$

以p, $\overrightarrow{k+2}$爲邊：when $m_2=t_1$,

有$m_2=t_1=\underbrace{k+p+1, k+p+2, k+p+3, \cdots, k+k, 1}_{k-p+1個}$

以p, $\overrightarrow{k+3}$爲邊：when $m_2=t_1$,

有$m_2=t_1=k+\underbrace{p+1, k+p+2, k+p+3, \cdots, k+k, 1, 2}_{k-p+2個}$

⋮

以p, $\overrightarrow{p+k}$爲邊：when $m_2=t_1$,

有$m_2=t_1=\underbrace{k+p+1, k+p+2, k+p+3\cdots, k+k, 1, \cdots, p-1}_{k-1個}$

共有 $[1+2+3\cdots+(k-p)]$

$+[(k-p)+(k-p+1)+(k-p+2)+\cdots+(k-1)]$

$=[1+2+3+\cdots+(k-1)]+(k-p)$

$=\frac{1}{2}k(k-1)+(k-p)$

②包含k+p之完美△：

以k+p, $\overrightarrow{k}$+p+1爲邊：when $m_2=t_2$ ，有$m_2=t_2=p$

以k+p, $\overrightarrow{k}$+p+2爲邊：when $m_2=t_2$ ，有$m_2=t_2=p, p+1$

以k+p, $\overrightarrow{k}$+p+3爲邊：when $m_2=t_2$ ，有$m_2=t_2=p, p+1, p+2$

⋮

以k+p, $\overrightarrow{k}$+k爲邊：when $m_2=t_2$,

有$m_2=t_2=p, \underbrace{p+1, p+2, \ldots, k-1}_{k-p\text{個}}$

以k+$\overrightarrow{p}$, 1爲邊：when $m_2=t_1$,

有$m_2=t_1=p, \underbrace{p+1, p+2, \cdots, k+1}_{k-p+2\text{個}}$

以p+$\overrightarrow{k}$, 2爲邊：when $m_2=t_1$,

有$m_2=t_1=p, \underbrace{p+1, p+2, \cdots, k, k+1, k+2}_{k-p+3\text{個}}$

以k+$\overrightarrow{p}$, 3爲邊：when $m_2=t_1$,

有$m_2=t_1=p, \underbrace{p+1, p+2, \cdots, k, k+1, k+2, k+3}_{k-p+4\text{個}}$

⋮

以k+$\overrightarrow{p}$, p-1爲邊：when $m_2=t_1$,

有$m_2=t_1=p, \underbrace{p+1, p+2\cdots, k+p-1}_{k\text{個}}$

共有 $[1+2+3\cdots+(k-p)]$

$+[(k-p+2)+(k-p+3)+(k-p+4)+\cdots+k]$

$=(1+2+3+\cdots k)-(k-p+1)$

$=\frac{1}{2}k(k-1)-(k-p+1)$

$=\frac{1}{2}k[(k-1)+2]-(k-p+1)$

$=\frac{1}{2}k(k-1)+k-(k-p+1)$

$=\frac{1}{2}k(k-1)+k-k+p-1$

$=\frac{1}{2}k(k-1)+(p-1)$

③：利用①、②計數，我們知道完美△若有重覆計算有

$$\left\{\left[\frac{1}{2}k(k-1)+(k-1)\right]+\left[\frac{1}{2}k(k-1)+(k-2)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{2}k(k-1)+(k-3)\right]+\cdots.+\left[\frac{1}{2}k(k-1)+(k-k)\right]\right\}$$
$$+\left\{\left[\frac{1}{2}k(k-1)+(1-1)\right]+\left[\frac{1}{2}k(k-1)+(2-1)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{1}{2}k(k-1)+(3-1)\right]+\cdots+\left[\frac{1}{2}k(k-1)+(k-1)\right]\right\}$$
$$=\frac{1}{2}k(k-1)2k+(k-1)+(k-2)+(k-3)+\cdots+(k-k)+[(1-1)+(2-1)+(3-1)+\cdots$$
$$+(k-1)]$$
$$=k^2(k-1)+k^2-(1+2+3+\cdots+k)+(1+2+3+\cdots+k)-k\times 1$$
$$=k^3-k$$
$$=k(k^2-1)$$
$$=k(k+1)(k-1)$$

但在統計時，因每△均有三點，又每點都計過一次完美△，所以完美△重覆了兩次，也就是說，所得值爲眞正的3倍，故完美△個數最多爲

$\frac{1}{3}k(k-1)(k+1)$個

在when $n=2k$（$k\in N, k\geqq 2$）

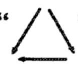
五、結　論

(1)偶數點$(2k)$完美△最多個數爲$\frac{1}{3}k(k-1)(k+1)$；奇數點$(2k+1)$完美△最多個數爲$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

(2)n點$(n\geqq 3)$之完美△最少個數爲0

(3)有趣的是，偶數點$n=2k$之完美△最多個數$\frac{1}{3}k(k-1)(k+1)=\sum_{\ell=1}^{k}\ell(\ell-1)$；奇數點$n=2k+1$完美△最多個數$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)=\sum_{\ell=1}^{k}\ell^2$

(4)偶數點$n=2k$完美△最多個數$\frac{1}{3}k(k-1)(k+1)=\sum_{\ell=1}^{k}\ell(\ell-1)$，所以一定是偶數

(5)定義加箭號且不爲「完美△」之△爲「不完美△」，則它的形式爲“”“”。其個數範圍：

①在when $n=2k+1$（n爲奇數，$n\in N$且$k\geqq 1$）

則其最多在「完美△爲0個」，有$C_3^n=\frac{1}{3}k(2k+1)(2k-1)$個；最少時完美△個

數為最多，其個數有$\frac{1}{2}k(k-1)(2k+1)$個

②在when $n=2k$（n為偶數，$k\in N$且$k\geqq 2$）

則其最多在「完美△為0個」，有$c_3^n=\frac{2}{3}k(2k-1)(k-1)$個；最少時完美△個

數為最多，其個數有$k(k-1)^2$個。

(6)$\because \frac{1}{2}k(k-1)(2k+1)-\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)=\frac{1}{3}k(k-2)(2k+1)\ldots(1)$

$k(k-1)^2-\frac{1}{3}k(k-1)(k+1)=\frac{2}{3}k(k-1)(k-2)\cdots(2)$

$\therefore$在$k\geqq 2$時，(1)、(2)式值不小於0（完美△最多個數不多於非完美△最少個數），

即$n=2k+1\geqq 5$（奇數）或$n=2k\geqq 4$（偶數）$\Rightarrow$ $n\geqq 4$時，完美△個數恆不多於

非完美△個數。

(7)應用：

此研究我認為在交通網路、電信網路、網際網路有潛在的應用性，但由於學識不足，無法深入探討，希望有更多感興趣的讀者加入研究行列。

六、展　望

(1)對於證明此公式，我心有餘而力不足。希望以後能繼續研究，讓此作品更完整周詳臻於完善。

(2)若分別令「」或「」、「」或「」

為完美四邊形及完美五邊形，那麼同樣問題，它們的「最多」和「最少數」為何？一般地，n點時（$n\geqq t$），完美t邊形的最多最少數為何？在此由於學識有限，推廣此力有未逮，希望更多高明的讀者能加入研究行列。

（註：完美t邊形只t個頂點之箭號為一進一出之t邊形而言）

評　語

本文作者在班際籃球賽中，若a隊勝b隊，b勝c隊，c勝a隊，而產生和局，因此稱△abc為一完美三角形，此時若有n隊參加，採單循環賽，因此隊與隊間就會有勝負關係，因此就產生一些完美三角形，本文作者就n=2k證明完美三角形最多個數為$\frac{1}{3}k(k+1)(k+1)$。當$n=2k+1$時，完美三角形，最多個數為$\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$，並求最

少完美三角形之個數，證明偶數點之完美三角形最多個數必爲偶偶，當$n \geq 4$時完美三角形個數恆不多於非完美三角形個數。本文作者能將數學應用於從日常生活中，解決日常生活問題，用組合數學方法來處理。這些問題，且處理方法非常細膩，能學以致用、內容很有創意，符合科學精神。