從垂足三角形到垂足多邊形

國中組數學科第三名

國立臺灣師範大學附屬高級中學國民中學部　　作　者：孫君儀
指導教師：連文財

一、研究動機

在偶然的機會中，於學校圖書館中發現了《幾何研究》一書，看到其中的「垂足三角形」（Pedal triangles）[1]「令P為已知三角形內之任一點，且令PB_1，PB_2，PB_3為作向三邊A_2A_3，A_3A_1，A_1A_2之垂直線，此等垂直線之足，為$\triangle B_1B_2B_3$(稱$\triangle B_1B_2B_3$為$\triangle A_1A_2A_3$之第一垂足三角形）之諸頂點，該三角形為對「垂足點」P，$\triangle A_1A_2A_3$之垂足三角形。第三垂足三角形$D_1D_2D_3$，與原來三角形$A_1A_2A_3$相似。」且最後說到有位新加坡的A. Oppenheim博士將之推廣為「n邊形中第n垂足n邊形相似於原n邊形」。心中產生了一些疑問：四邊形……n邊形的證明？P點在三角形外，此性質是否仍成立？對於凹n邊形及自交n邊形，此性質是否仍成立？第三垂足三角形$D_1D_2D_3$與原三角形$A_1A_2A_3$的面積比？第n垂足n邊形與原n邊形的面積比？什麼時候面積最大？有沒有其它的性質？於是利用課餘深入加以研究。

二、研究內容

本研究先從了解第三垂足三角形相似於原三角形的證明開始，研讀一些相關的幾何書籍，分成下面十二個主題探討：

問題 1.　當P點在三角形外部時，此性質是否仍成立？

問題 2.　如何證明第四垂足四邊形相似於原四邊形。P點在外部時，此性質是否成立？

問題 3.　如何證明第n垂足n邊形相似於原n邊形。P點在外部時，此性質是否成立？對於凹n邊形及自交n邊形，此性質是否也成立？

問題 4.　垂足n邊形的退化條件是什麼？

問題 5.　第三垂足三角形與原三角形的面積比。

問題 6.　第四垂足四邊形與原四邊形的面積比。

問題 7.　第n垂足n邊形與原n邊形的面積比。

問題 8.　垂足改為夾X°角時，此性質是否仍成立？

問題 9.　夾X°角時，二相似三角形的面積比。

問題 10.　夾X°角時，二相似n邊形的面積比。

問題 11.　當P點在三角形內部何處，第三垂足三角形面積最大？其與原三角形面積比極值爲何？

問題 12.　當P點在三角形外部何處，第三垂足三角形面積最大？其與原三角形面積比極值爲何？

三、研究工具

本研究運用到一些數學知識及工具，如下：

㈠直角三角形的性質；㈡平行線的性質；㈢圓的性質；㈣相似形的知識；㈤三角函數的性質；㈥三角形面積公式；㈦正弦定理；㈧矩陣的運算；㈨電腦繪圖軟體Geometer's Sketchpad。

四、研究過程

先理解《幾何研究》中「第三垂足三角形相似原三角形」的證明，並利用證明中主要的性質「對角互補的四邊形，其四頂點共圓」及「在一圓中，等弧對等圓周角」二性質，推導出當P點在三角形外部時，此性質仍成立。當P點在①三角形三邊所在的直線上；②$\triangle A_1A_2A_3$外接圓上，垂足三角形退化（Simon直線）。此外，沒有任何其它的P點使垂足三角形退化。

同樣的原理可證出「第四垂足四邊形相似於原四邊形（不論四邊形是凸的、凹的或自交的）」，並推論出「第n垂足n邊形相似於原n邊形」。但有退化情況：n邊形中，各邊所在之直線、任意兩兩互不平行之三邊所在直線的三交點之外接圓，即爲退化條件（P點可能在n邊形之內部及外部）。

我們利用了相似形的性質及三角函數、正弦定理、三角形面積公式，得到

$$\frac{\triangle D_1 D_2 D_3}{\triangle A_1 A_2 A_3} = \left(\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3}\right)^2$$

【已知】

$\triangle D_1 D_2 D_3$ 爲$\triangle A_1 A_2 A_3$ 之第三垂足三角形

【求證】

$$\frac{\triangle D_1 D_2 D_3}{\triangle A_1 A_2 A_3} = \sin\angle 1 \cdot \sin\angle 2 \cdot \sin\angle 3 \cdot \sin\angle 4 \cdot \sin\angle 5 \cdot \sin\angle 6 =$$

$$\left(\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3}\right)^2$$

【證明】因$\triangle PD_2D_3 \sim \triangle PA_2A_3$

$$\frac{\triangle D_1\ D_2\ D_3}{\triangle A_1\ A_2\ A_3} = \frac{\triangle PD_2D_3}{\triangle PA_2A_3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}PD_2 \cdot PD_3 \cdot \sin\angle D_2PD_3}{\frac{1}{2}PA_2 \cdot PA_3 \cdot \sin\angle A_2PA_3}$$

$$= \frac{PC_1\ \sin\angle 5}{PA_2} \cdot \frac{PC_1\ \sin\angle 4}{PA_3}$$

$$= \frac{PB_3\ \sin\angle 1\sin\angle 5}{PA_2} \cdot \frac{PB_2\ \sin\angle 2\sin\angle 4}{PA_3}$$

$$= \frac{PA_2\ \sin\angle 3\sin\angle 1\sin\angle 5}{PA_2} \cdot \frac{PA_3\ \sin\angle 6\sin\angle 2\sin\angle 4}{PA_3}$$

$$= \sin\angle 3\sin\angle 1\sin\angle 5\sin\angle 6\sin\angle 2\sin\angle 4$$

$$= \frac{PB_3}{PA_2} \cdot \frac{PB_2}{PA_1} \cdot \frac{PB_1}{PA_3} \cdot \frac{PB_2}{PA_3} \cdot \frac{PB_3}{PA_1} \cdot \frac{PB_1}{PA_2}$$

$$= \left(\frac{PB_1\ PB_2\ PB_3}{PA_1\ PA_2\ PA_3}\right)^2$$

證畢

同理第四垂足四邊形與原四邊形的面積比爲（ $\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3 \cdot PB_4}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3 \cdot PA_4}$ ）^{2}。

用相同的方法，我們推出第n垂足n邊形與原n邊形之面積比：

$$\left(\frac{(PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3 \cdots\cdots PBn)}{(PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3 \cdots\cdots PAn)}\right)^2$$

由於原證明主要用到四點共圓的性質，因此只要使得二「垂足」與P點及三角形中一頂點，這四點共圓，則「垂足」改爲逆時針方向夾X$^\circ$角時，此性質仍成立。

更進一步，如果把垂足三角形改爲「鏡射三角形」；即自P向$\triangle A_1A_2A_3$的三邊A_1A_2，A_2A_3，A_3A_1，作垂線，分別交於B_3, B_1, B_2並加倍延長至B'_3, B'_1, B'_2, $\triangle B'_1B'_2B'_3$即爲一「鏡射三角形」。因$B_1B_2 // B'_1B'_2$；$B_1B_3 // B'_1B'_3$；$B_2B_3 // B'_2B'_3$；所以$\triangle B'_1B'_2B'_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$且$\triangle B'_1B'_2B'_3$之面積爲$\triangle B_1B_2B_3$之4倍。由此可推出第三鏡射三角形相似於原三角形，且面積比爲（$8\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3}$）^{2}。鏡射n邊形也有相對應之

結果。

我利用一個數學繪圖軟體Geometer's Sketchpad把第三垂足三角形繪出，在$\triangle A_1A_2A_3$內移動P點，並利用其計算功能顯示出$\triangle D_1D_2D_3$面積與$\triangle A_1A_2A_3$面積的比值，觀察此值變化的情形。目前發現P點在$\triangle A_1A_2A_3$的內心附近時取最大值，因此我們猜測P點可能在內心時。可利用三角函數之和差化積等方法，證明出此結果。

同方法也證明出若P點在三角形外部，P點在傍心時，其面積比局部極大。

並利用三角函數積化和差等方法，推導出當P點在$\triangle A_1A_2A_3$大角所對之傍心時，第三垂足三角形之面積絕對極大。

利用幾何不等式：若$\angle A_1$，$\angle A_2$，$\angle A_3$為$\triangle A_1A_2A_3$之三個內角，

$0<\sin\frac{\angle A_1}{2}\cdot\sin\frac{\angle A_2}{2}\cdot\sin\frac{\angle A_3}{2}\leqq\frac{1}{8}$（當$\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=60^\circ$時等號成立）之

結果可得知當P點在$\triangle A_1A_2A_3$內部時

$$0\angle\frac{\triangle D_1D_2D_3}{\triangle A_1A_2A_3}=\sin\angle 1\cdot\sin\angle 2\cdot\sin\angle 3\cdot\sin\angle 4\cdot\sin\angle 5\cdot\sin\angle 6$$

$$\leqq\left(\sin\frac{\angle A_1}{2}\cdot\sin\frac{\angle A_2}{2}\cdot\sin\cdot\frac{\angle A_3}{2}\right)^2\leqq\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$$

這就是說當P點在三角形內部時，第三垂足三角形之面積不大於原三角形面積之$\frac{1}{64}$。當三角形爲正三角形，且P點在內心時，第三垂足三角形之面積等於原三角形面積之$\frac{1}{64}$。

再利用幾何不等式：若$\angle A_1$，$\angle A_2$，$\angle A_3$為$\triangle A_1A_2A_3$之三內角，

$\frac{3}{8}\leqq\sin\frac{\angle A_1}{2}\cdot\cos\frac{\angle A_2}{2}\cdot\cos\frac{\angle A_3}{2}\angle 1$

（$\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=60^\circ$時等號成立）之結果可知，當P點在$\triangle A_1A_2A_3$外部時，

$$1>\frac{\triangle D_1D_2D_3}{\triangle A_1A_2A_3}\geqq\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{9}{64}$$

無論P點在何處，第三垂足三角形之面積都不會大於原三角形。

五、研究成果

我們將十二個問題的結果列於下：

問題 1. P點在三角形外部（除三角形三邊延長線及外接圓上），第三垂足三角形亦相似於原三角形。

問題 2. 3.P點在n邊形（凸、凹、自交n邊形均可）內部及外部（除退化條件外），第n垂足n邊形都相似於原n邊形，n≧3。

問題 4. 退化條件爲P點在n邊形各邊所在直線上及任意三條兩兩互不平行邊所在直線三交點之外接圓上。

問題 5. 第三垂足三角形與原三角形的面積比：

$$\left(\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3}\right)^2$$

問題 6. 第四垂足四邊形與原四邊形的面積比：

$$\left(\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3 \cdot PB_4}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3 \cdot PA_4}\right)^2$$

問題 7. 第n垂足n邊形與原n邊形的面積比（n≧3）：

$$\left(\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3 \cdots\cdots PBn}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3 \cdots\cdots PAn}\right)^2$$

問題 8. 垂足改爲夾$x°$角時，此性質仍成立。甚至，第一垂足夾$x°$角，第二垂足夾$y°$角，第三垂足夾$z°$角，……此性質仍然成立。

問題 9. 垂足改爲夾$x°$角，二相似三角形的面積比仍爲：

$$\left(\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3}\right)^2$$

第一垂足夾$x°$角，第二垂足夾$y°$角，第三垂足夾$z°$角時，二相似三角形之面積比爲

$$\left(\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3}\right)^2 \left(\frac{\sin^3 x°}{\sin x° \ \sin y° \ \sin z°}\right)^2$$

問題10. 垂足改爲X 角時，二相似n邊形的面積比仍爲：

$$\left(\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot PB_3 \cdots\cdots PBn}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot PA_3 \cdots\cdots PAn}\right)^2$$

第一垂足夾$x_1°$角，第二垂足夾$x_2°$角，……第n垂足夾$x_n°$角時，二相似n邊形之面積比爲：

$$\left(\frac{PB_1 \cdot PB_2 \cdot \cdots PBn}{PA_1 \cdot PA_2 \cdot \cdots PAn}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sin x_1{}^\circ}{\sin x_1{}^\circ \cdot \sin x_2{}^\circ \cdots \sin x_n{}^\circ}\right)^2$$

問題11. 當P點在三角形內部時，P點在內心的位置，第三垂足三角形面積最大，且其與原三角形面積比

$$0 < \left(\sin\frac{\angle A_1}{2}\cdot\sin\frac{\angle A_2}{2}\cdot\sin\frac{\angle A_3}{2}\right)^2 \leqq \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$$

問題12. 當P點在三角形的大角（設$\angle A_1$）所對的傍心的位置時，第三垂足三角形面積絕對極大，且其與原三角形面積比

$$1 > \left(\sin\frac{\angle A_1}{2}\cdot\cos\frac{\angle A_2}{2}\cdot\cos\frac{\angle A_3}{2}\right)^2 \geqq \frac{9}{64}$$

六、研究心得

經歷了這次的研究，我得到了許多不曾知道的新知識，也獲得了一些經驗和教訓。發現許多看似高深的數學問題，可以用極容易的數學常識來解決；在研究中，有些問題，就像是二個不同的路線，但最後回到同一終點；因此，我了解到數學的天地是無邊無際的，其中蘊藏著無數的寶藏，正等待著我們去發掘。此外，由於我的幾何知識非常薄弱，需要許多資料，在找資料的過程中，也學到了一些作科研的方法與精神。

在參加校內科展時，我只作出問題1～3及問題5～10的結果，獲得特優獎，代表學校參加台北市科展。利用寒假期間，我在數位師長的指導下，獲得了問題4及問題11及問題12的結果。特別是問題11及12藉諸電腦的協助，先作出猜想，再尋求解答，這是科學研究的一個新利器。參加台北市科展獲得特優後，在評審教授的指點下，改進了問題3、問題9及10的結果。

此次研究，我受益良多！以垂足三角形為中心，尚有許許多多的問題可研究，諸如四邊形時，P點在何處第四垂足四邊形會最大？P點變動時，各頂點之軌跡為何？在空間中這些性質是否仍然成立？……都值得探討。我曾想利用問題11的想法，猜測第四垂足四邊形之極大值應與角平分線有關，但任意四邊形的4內角平分線並不交於一點（若交於一點，則四邊形有內切圓，極大值則發生在內切圓圓心上），而是交成另一小四邊形，此小四邊形之四頂點共圓，我又猜測P點可能在此圓之圓心上會產生極大值。但經使用Geometer's Sketchpad實驗，答案並不正確，但可以肯定答案就在此小四邊形內部，至於在何處呢？礙於預備知識與時間之不足，容以後再進

一步探究。

七、參考資料

(一)《幾何研究，Geometry Revisited》，H.S.M. Coxeter和Samuel L. Greitzer著，王昌銳譯，財團法人臺北市徐氏基金會出版部出版。

(二)《歐幾里得幾何原本》藍紀正、朱恩寬譯、九章出版社出版。

(三)《平面幾何新路》張景中著，九章出版社出版。

(四)《大陸現行初級中學數學課本—幾何第二冊（初三用）》鮑瓏、李慧君、許縵閣編，九章出版社出版。

(五)《標準奧林匹克數學教程—初三分冊》裘宗滬等編著，九章出版社出版。

(六)《三角學辭典》世部貞市郎著，九章出版社出版。

(七)《幾何學辭典》世部貞市郎著，九章出版社出版。

(八)《中學數學複習指導(二)三角》孫文先編著，九章出版社出版。

(九)《線性代數導引》林義雄、黃文達、洪萬生合著，森大圖書公司。

(十)《線性代數及其應用》居余馬、胡金德編，廣播電視大學出版社。

(十一)《極值漫筆》余新耀、黃靜英、張璇、梁玉慧編著，河南教育社。

(十二)《幾何不等式》單墫譯，北京大學出版社。

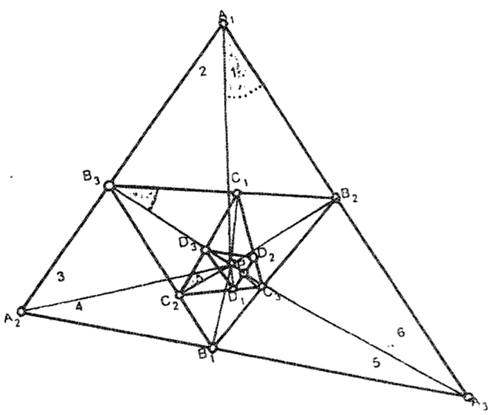

圖1　形$D_1\ D_2\ D_3$ ～$A_1\ A_2\ A_3$

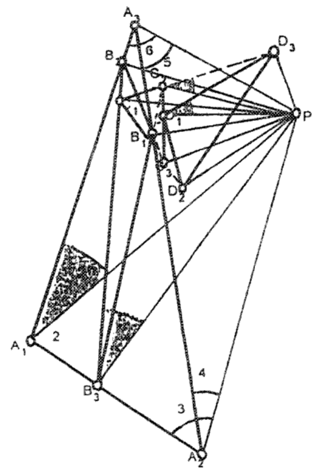

圖2
P點在三角形外部時，三角形$D_1\ D_2\ D_3$仍相似於三角形$A_1\ A_2\ A_3$

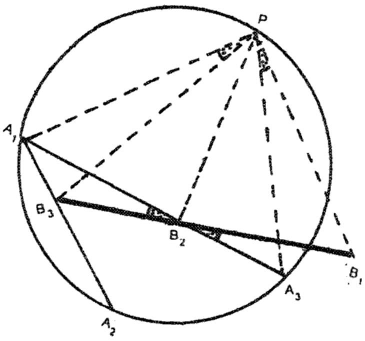

圖3
P點在外接圓上時，垂足三角形退化

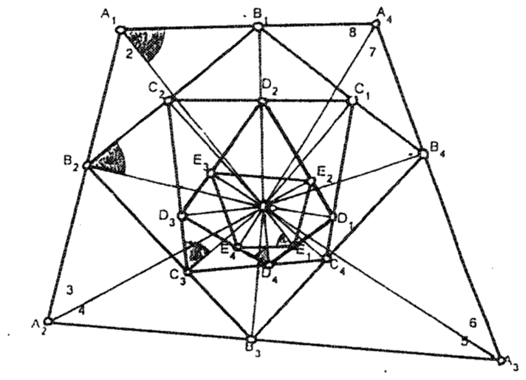

圖4
四邊形$E_1\ E_2\ E_3\ E_4$ ～四邊形$A_1\ A_2\ A_3\ A_4$

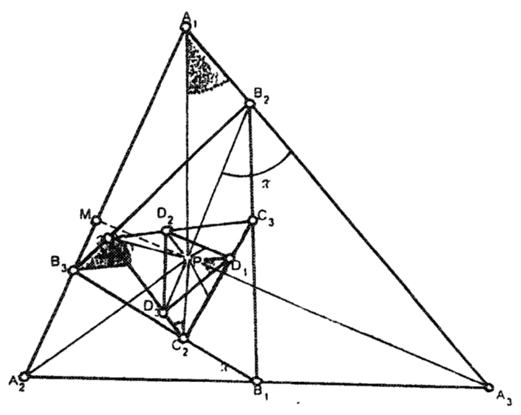

圖5
逆時針夾X度角時，三角形$D_1\ D_2\ D_3$ ～三角形$A_1\ A_2\ A_3$ 。

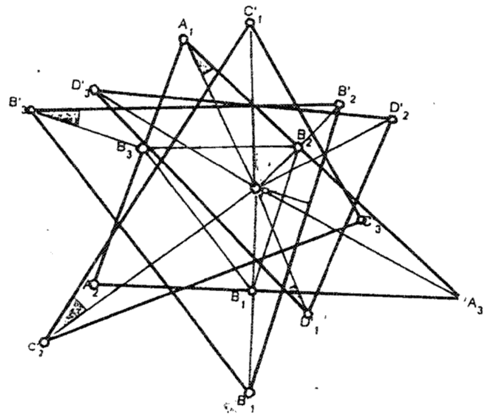

圖6
三角形$B'_1\ B'_2\ B'_3$ 為鏡射三角形

評　語

若P爲$\triangle A_1A_2A_3$內任一點且令PB_1，PB_2，PB_3爲作向三邊A_2A_3，A_3A_1，A_1A_2之垂直線，此等垂足線之足爲B_1，B_2，B_3則稱$\triangle B_1B_2B_3$爲$\triangle A_1A_2A_3$第一垂足三角形A. Qppenheim曾證當P在n邊形內部時，n邊形第n垂足n邊形相似於原n邊形，本作品先考慮P點在三角形外及四邊形外面時，上述結果是否仍然成立。凹n邊形及自交n邊形垂足n邊形退化條件，第三垂足三角形與原三角形面積的比，P點在何處，第三垂足三角形面積最大？其與原三角形面積比值如何？P點在三角形外部何處，第三垂足三角形面積最大？其與原三角形面積比如何？作者又考慮第四垂足四邊形面積比。作者能就P點位置討論其垂足三角形之性質及面積，又能作推廣至四邊形、n邊形。以一

個國中生能有此表現，實屬難能可貴，此位作者已學到研究數學方法，如繼續努力潛力無窮，值得鼓勵。

註 1：此處所指之pedal triangles比較好之譯名應該為「踏板三角形」，有別於一般所謂「垂足三角形」(orthic triangles)：設$\triangle A_1A_2A_3$三高之垂足為$B_1B_2B_3$，則$\triangle B_1B_2B_3$稱為$\triangle A_1A_2A_3$之垂足三角形。本文延襲《幾何研究》之譯法，稱Pedal triangles為「垂足三角形」。