

立體平衡配號與空間結構之探討

國中組數學科第二名

基隆市中正國民中學

作者：張子晉

指導教師：林耀南

一、研究動機

有次上數學課，老師談到我們以前常玩的九宮遊戲，如圖(-)，老師說各行、列、對角線的平衡配號常隱含一些有趣的現象在裡頭，只要同學仔細觀察即可發現，而在立體圖中也應有很多特殊現象待我們去發掘，我突然想起用四面體來觀察看看，也許能發現什麼，底下即為我的研究。

6	1	8
7	5	3
2	9	4

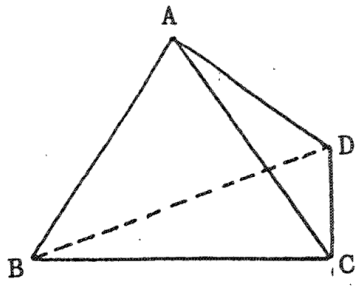
圖(-)

二、研究目的

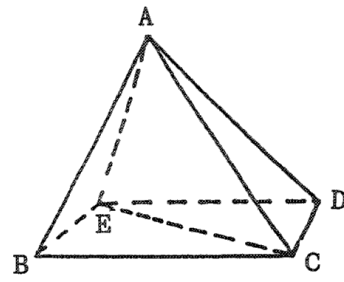
1. 由四面體所組成的主要型態有哪些？
2. 將各面加以配號，使各四面體配號面總和相等，共有多少種組合情形？
3. 將上列排列組合情形以重覆面和之多少來分組，觀察其組數和與空間型態變化情形。
4. 觀察上列數字變化是否有其規律性。
5. 除基本的二粒構圖外，三粒、四粒、五粒甚至於多粒四面體，其組合而成的各種相似型態，是否其組數和各有一定的關係呢？

三、研究過程

下圖(二)是一粒四面體，它有四個面，分別叫ABC, ACD, ABD, BCD, 我們將在各面給一個數字（從1開始的自然數），下圖(三)是兩粒合併在一起的四面體，其中有一面重疊在一起的稱為重覆面（只算一面），共七面，我們將在各面各給一個從1開始的自然數，共7個數字，同理三粒，四粒，五粒…各給對應個數的數字。

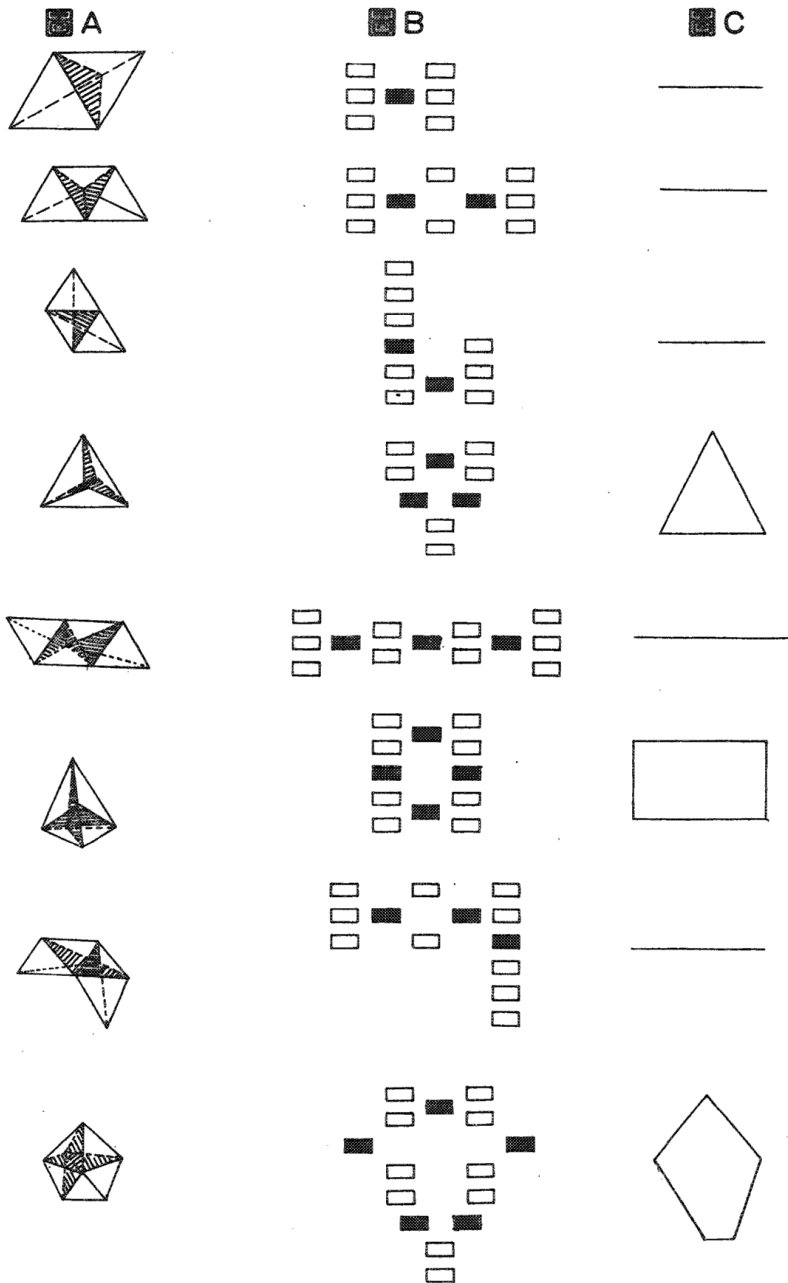


圖(二)
一粒視圖

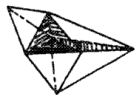
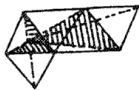
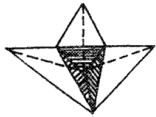
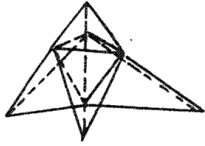


圖(三)
兩粒視圖

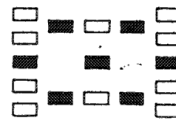
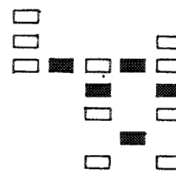
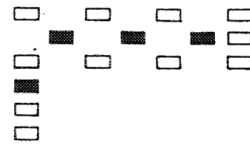
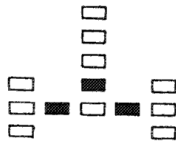
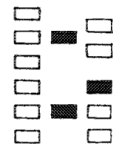
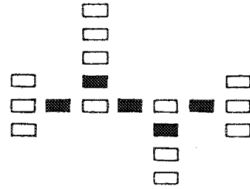
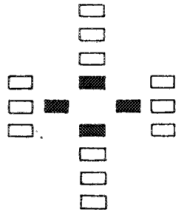
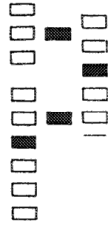
因為當粒數愈來愈多時，立體視圖將愈來愈複雜，爲了充份了解其結構，我們先將視圖平面化，即由圖A化成圖B，每一“□”代表一個面，中間那個“■”代表重覆面，圖C是將本結構歸類爲“一”類，底下即爲各種組合的歸類。



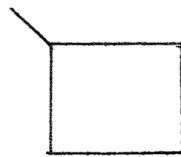
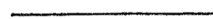
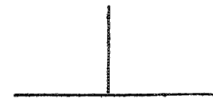
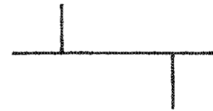
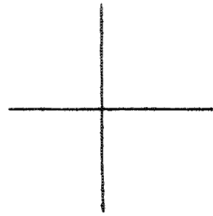
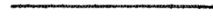
■ A



■ B



■ C



由以上各種組合的圖C中，主要可分為一字形，T字形，多邊形……等，當粒數愈來愈多時，它的型態除原先的三種基本型態外，其餘是兩個以上的型態相互連接，接下來我們要探討各圖形平衡配號的可能性。

1. 當粒數等於二時（圖四），若三點為一面則共七個面，包括一重覆面ABE及ABC, ACE, BCE, ABD, BDE, ADE共七面，將1~7各數字代入各面，使四面體ABDE及四面體ABCE的配號和相等。

方法：(1) 1~7的和： $(1+7) \times 7 \times 1/2 = 28$

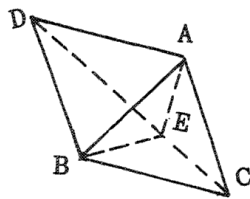
(2) $(28 + ABE) \times 1/2 = \text{正整數}$ ，且 $1 \leq ABE \leq 7$ 。∴ ACE = 2, 4, 6

（表(一)為各種重覆面數字達成平衡之一種可能性）

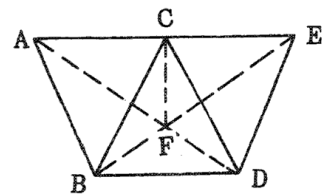
☆

	ACE	ABC	BCE	ABE	ADE	ACD	CDE
1	5	7	2	3	4	6	
1	5	6	4	2	3	7	
1	3	7	6	2	4	5	

表(一) “☆” 表重覆面



圖(四)



圖(五)

2. 在這三個四面體中（圖五），共有十個面，包括BCF, CDF兩重覆面及ABC, ACF, ABF, CBD, BFD, CED, EFD, CEF八面，將1~10的數字代入各面，使各四面體ABCF, CDBF, CDEF之配號和相等。

方法：(1) 1~10的和： $(1+10) \times 10 \times 1/2 = 55$

(2) $(55 + BCF + CDF) \times 1/3 = \text{正整數}$ ，且 $3 \leq BCF + CDF \leq 19$ 。∴ BCF + CDF = 5, 8, 11,

14, 17（表(二)為各種重覆面和達成平衡之一種可能性）

☆ ☆

	ABC	ABF	ACF	BCF	BCD	BDF	CDF	CDE	DEF	CEF
5	2	8	9	1	5	10	4	3	6	7
8	4	7	8	2	3	10	6	1	5	9
11	4	5	10	3	2	9	8	1	6	7
14	3	7	9	4	1	8	10	2	5	6
17	3	5	9	7	1	6	10	3	4	8

表(二) “☆” 表重覆面

3. 在這三個四面體中（圖六），包括三重覆面ADE, CDE, BDE及ADC, ACE, BCD, BCE, ABD,

ABE六面，將1~9的數字代入各面，使各四面體ABDE, ACDE, BCDE之配號總和相等。

方法：(1)1~9的和： $(1+9) \times 9 \times 1/2 = 45$

(2) $(45 + ADE + CDE + BDE) \times 1/3 = \text{正整數}$ ，且 $6 \leq ADE + CDE + BDE \leq 24$

$\therefore ADE + CDE + BDE = 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$ (表(三)為各種重覆面和達成平衡配號之一種可能性)

重覆面和	☆		☆			☆			
	ABD	ABE	ADE	ACD	ACE	CDE	BCD	BCE	BDE
6	6	7	1	9	5	2	4	8	3
12	2	9	1	6	8	4	3	5	7
15	1	9	2	6	7	5	3	4	8
18	1	8	3	5	7	6	2	4	9
24	1	5	7	2	6	8	3	4	9

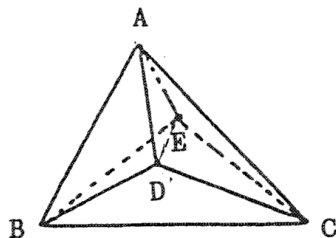
表(三) “☆” 表重覆面

4. 在圖(七)的四個四面體中，共有13個面，包括BCG, CDG, DEG三重覆面及ABC, ABG, ACG, BCD, BDG, CDE, CEG, EFD, EFG, DFG共13面。將1~13的數字代入各面，使各四面體ABCG, CBDG, DECG, DEFG的配號總和相等。

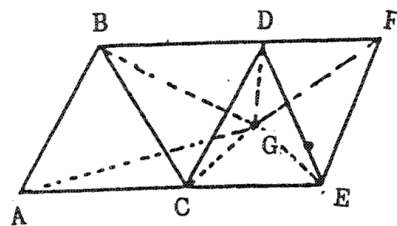
方法：(1)1~13的和： $(1+13) \times 13 \times 1/2 = 91$

(2) $\therefore (91 + BCG + CDG + DEG) \times 1/4 = \text{正整數}$ ，且 $6 \leq BCG + CDG + DEG \leq 36$

$\therefore BCG + CDG + DEG = 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33$ (表(四)為各種重覆面和達成平衡配號之一種可能性)



圖(六)



圖(七)

		☆	☆	☆										
		ABC	ABG	ACG	BCG	BDG	BCD	CDG	CEG	CED	DEG	EFD	EFG	DFG
重覆面	9	4	8	12	1	13	9	2	10	7	6	3	5	11
	13	4	8	13	1	12	11	2	5	9	10	3	6	7
	17	11	10	4	2	9	13	3	5	7	12	1	6	8
	21	7	8	9	4	13	6	5	1	10	12	2	3	11
	25	6	9	10	4	5	12	8	1	7	13	2	3	11
	29	3	7	8	12	2	5	11	4	9	6	1	10	13
	33	2	4	13	12	3	5	11	1	9	10	6	7	8

表四 “☆” 表重覆面

5. 在圖(八)的四個四面體中，有十二個面，包括AEF, BEF, CEF, DEF四重覆面及ABF, ABE, BCE, BCF, CDE, CDF, ADE, ADF八面。將1~12的數字代入各面，使各四面體ABEF, BCEF, CDEF, ADEF的配號總和相等。

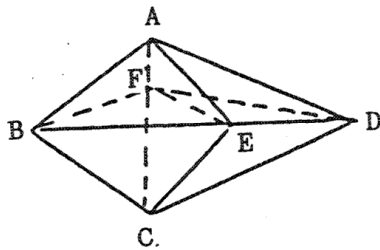
方法：(1) 1~12的和： $(1+2) \times 12 \times 1/2 = 78$

(2) $(78 + AEF + BEF + CEF + DEF) \times 1/4 = \text{正整體}$ ，且 $10 \leq AEF + BEF + CEF + DEF \leq 42$

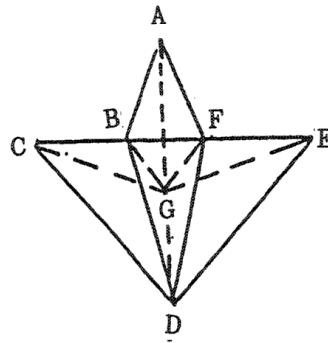
$\therefore AEF + BEF + CEF + DEF = 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 38, 42$ 。（表(五)為各種重覆面和達成平衡配號之一種可能）

		☆	☆	☆	☆								
		ABF	ABE	AEF	ADF	ADE	DEF	CDE	CDF	CEF	BCE	CBF	BEF
重覆面	10	5	12	1	10	9	2	6	11	3	7	8	4
	14	4	10	1	11	9	2	6	12	3	5	7	8
	18	3	9	1	12	8	2	7	10	4	5	6	11
	22	2	12	1	11	9	4	6	8	7	3	5	10
	26	1	12	2	9	10	5	6	7	8	3	4	11
	30	10	2	3	11	7	6	4	8	9	1	5	12
	34	1	10	5	8	9	6	4	7	11	2	3	12
	38	3	9	5	8	6	10	1	7	11	2	4	12
	42	1	8	9	5	6	10	2	7	11	3	4	12

表(五) “☆” 表重覆面



圖(八)



圖(九)

6. 在圖(九)的四個四面體中，共有13個面，包括BGF, DFG, BDG三重覆面及ABF, ABG, AFG, BDF, BCD, CDG, BCG, EFG, EFD, EDF十面。將1~13各數字代入各面，使各四面體ABFG, BCDG, BDEG, DEFG之配號總和相等。

方法：(1) 1~13的和： $(1+13) \times 13 \times 1/2 = 91$

(2) $\therefore (91 + \text{BGF} + \text{BDG} + \text{DFG}) \times 1/4 = \text{正整體}$ ， $6 \leq \text{BGF} + \text{BDG} + \text{DFG} \leq 36$

$\therefore \text{BDG} + \text{BGF} + \text{DFG} = 9, 13, 17, 21, 25, 29$ 。(表(六)為各種重覆面和達成平衡配號之一種可能)

① 當 $\text{BGF} + \text{BDG} + \text{DFG} = 9$ 時，則 $1/4(91+9) = 25$ ， $\text{BDF} = 25 - 9 = 16$ (不合)

② 當 $\text{BGF} + \text{BDG} + \text{DFG} = 33$ 時，則 $1/4(91+33) = 31$ ， $\text{BDF} = 31 - 33 = -2$ (不合)

重覆面和	條件限制
17	$\therefore \text{BGF} + \text{BDG} + \text{DFG} = 17$ ， $(91+17) \times 1/4 = 27$ $\text{BDF} = 27 - 17 = 10$ ， $\therefore \text{BGF} + \text{BDG} + \text{DFG}$ 的組合方式不可用 10
21	$\therefore \text{BGF} + \text{BDG} + \text{DFG} = 21$ ， $(91+21) \times 1/4 = 28$ $\text{BDF} = 28 - 21 = 7$ ， $\therefore \text{BGF} + \text{BDG} + \text{DFG}$ 的組合方式不可用 7
25	$\therefore \text{BGF} + \text{BDG} + \text{DFG} = 25$ ， $(91+25) \times 1/4 = 29$ $\text{BDF} = 29 - 25 = 4$ ， $\therefore \text{BGF} + \text{BDG} + \text{DFG}$ 的組合方式不可用 4

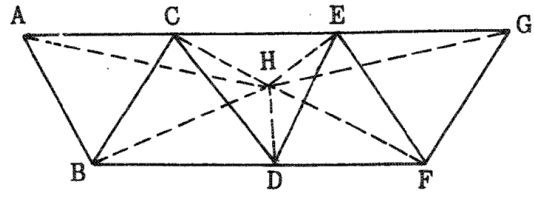
☆ ☆ ☆

ABF AGF AGB BFG BFD BDG BCD CDG BCG DFG EFG DEG DEF

13	5	9	11	1	13	2	4	7	12	10	3	6	8
17	5	8	12	2	10	4	1	9	13	11	3	6	7
21	2	9	12	5	7	6	3	8	11	10	1	4	13
25	1	9	12	7	4	8	3	5	13	10	2	6	11
29	7	8	9	6	1	10	4	5	11	13	2	3	12

表(六) “☆” 表重覆面

7. 在圖(+)的五個四面體中，共有16個面，包括BCH, CDH, DEH, EFH四重覆面及ABC, ABH, ACH, BCD, BDH, CDE, CEH, DFH, DEF, GHF, GEF, GEH共十六面，將1~16各數字代入各面，使各四面體ABCH, BCDH, CDEH, EFGH之配號總和相等。



圖(十)

方法：(1)1~16的和 $(1+16) \times 1/2 = 136$

(2) $(136 + \text{BCH} + \text{CDH} + \text{DEH} + \text{EFH}) \times 1/5 = \text{正整數}$ ，且 $10 \leq \text{BCH} + \text{CDH} + \text{DEH} + \text{EFH} \leq 58$

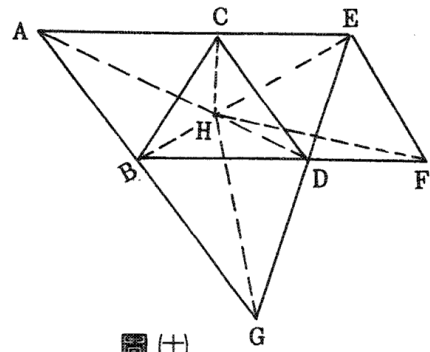
$\therefore \text{BCH} + \text{CDH} + \text{DEH} + \text{EFH} = 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54$.

(表七)為各種重覆面和達成平衡配號之一種可能)

			☆		☆		☆		☆		☆					
	ABC	ABH	ACH	BCH	BCD	BDH	CDH	CDE	CEH	DEH	DEF	DFH	EFH	EFG	EGH	GFH
14	4	12	13	1	11	16	2	10	15	3	5	14	8	6	7	9
重覆面																
19	6	8	15	2	10	16	3	11	12	5	13	4	9	1	7	4
和																
24	8	9	12	3	11	13	5	7	14	6	1	15	10	2	16	4
29	7	9	15	2	16	12	3	5	14	11	1	8	13	4	6	10
34	4	5	15	10	1	12	11	14	3	6	8	13	7	2	9	16
39	2	7	14	12	3	4	16	1	13	5	9	15	6	10	11	8
44	1	5	14	16	2	3	15	4	11	6	10	13	7	8	9	12
49	1	8	12	16	2	4	15	6	9	7	14	5	11	3	10	13
54	1	8	13	16	3	4	15	2	7	14	10	5	9	6	11	12

表(七)

8. 在圖(±)的五個四面體中，包括BCH, CDH, DEH, BDH四重覆面及ABC, ABH, ACH, BCD, CDE, CEH, DEF, EFH, DFH, BDG, GHD, GBH十二個面，將1~16各數字代入各面，使各四面體ABCH, BCDH, CDEH, BGDH之配號總和相等。



圖(十)

方法：(1)1~16的和： $(1+16) \times 16 \times 1/2 = 136$

(2) $\therefore (136 + \text{BCH} + \text{CDH} + \text{DEH} + \text{BDH}) \times 1/5 = \text{正整數}$ ，且 $10 \leq \text{BCH} + \text{CDH} + \text{DEH} + \text{BDH}$

$$\leq 58$$

$\therefore \text{BCH} + \text{CDH} + \text{DEH} + \text{BDH} = 14, 19, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54$. (表(八)為各1種重覆面和達成平衡配號之一種可能)

	ABC	ACH	ABH	BCH	BCD	CDH	CDE	CEH	DEH	DEF	DFH	EEH	BDH	BDG	DHG	BGH
19	6	8	16	1	14	7	10	12	2	5	11	13	9	3	4	15
24	15	6	10	1	13	2	11	14	5	7	8	12	16	3	4	9
29	14	11	5	3	10	4	15	8	6	13	2	12	16	1	7	9
39	3	6	12	14	7	13	2	9	11	4	15	5	1	16	10	8
44	2	11	7	16	4	15	6	3	12	10	9	5	1	14	13	8
49	11	9	1	16	3	10	7	5	15	12	6	4	8	14	13	2

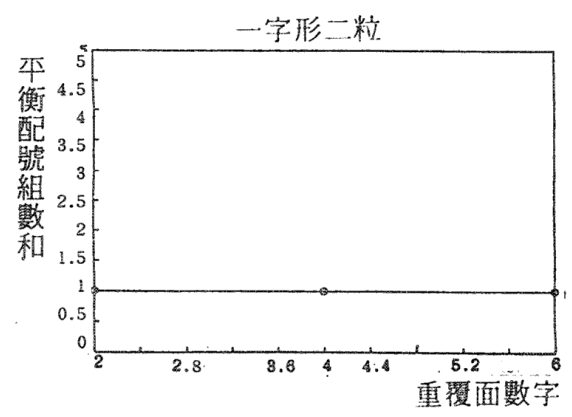
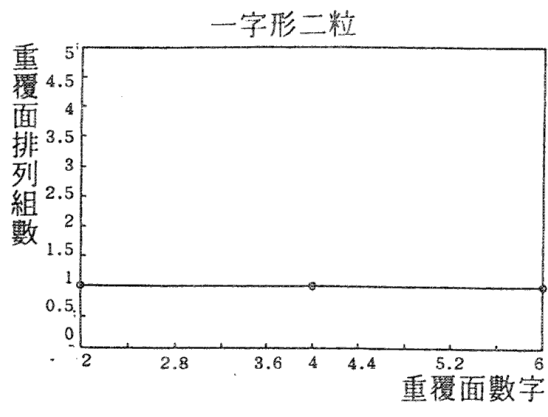
表(八)

- ①當重覆面和等於14時， $(136+14) \times 1/5 = 30$ ， $\text{DEH} \geq 1$ ， $\therefore \text{BCH} + \text{CDH} + \text{BDH} \leq 13$ 。
 $30 - 13 = 17$ (不合)
- ②當重覆面合為34時， $(136+34) \times 1/5 = 34$ ， $\text{BCD} = 34 - \text{BCH} - \text{CDH} - \text{BDH} = \text{DEH}$ (不合)
- ③當重覆面合為54時， $(136+54) \times 1/5 = 38$ ， $\text{DEH} \leq 16$ ， $\therefore \text{BCH} + \text{CDH} + \text{BDH} \geq 38$ 。
 $38 - 38 = 0$ (不合)

以上平衡配號的可能性觀察雖然只做到五粒四面體，但我們已可看出各種結構組合達成平衡的方式，接下來我們要做一件很繁重的事，就是依一字形，多邊形，T字形等歸類計算各類平衡配號組數和，藉以觀察當重覆面和由小至大排列時，相對的平衡配號組數和的分佈情形。

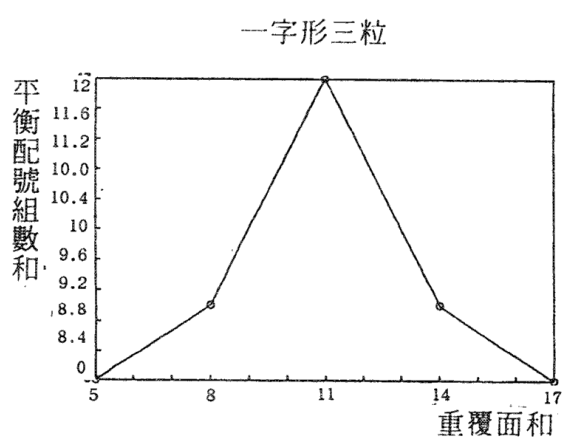
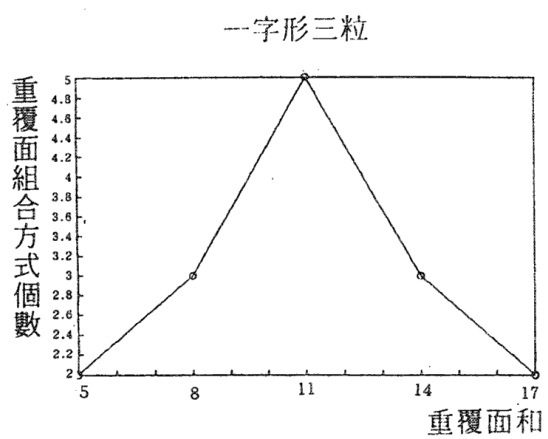
1. 下列為一字形之各種粒數之平衡配號組數和分配情形。

A：二粒		
重覆面	重覆面排列組數	平衡配號組數和
2	1	1
4	1	1
6	1	1



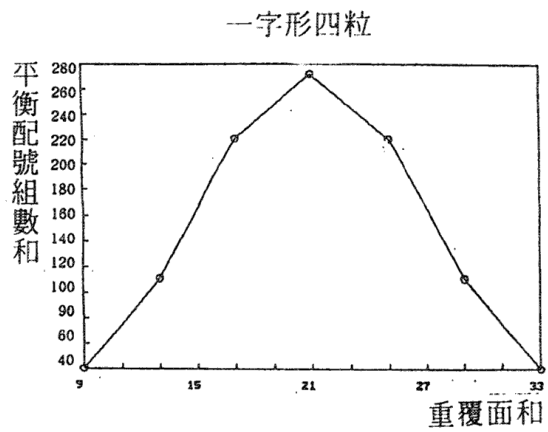
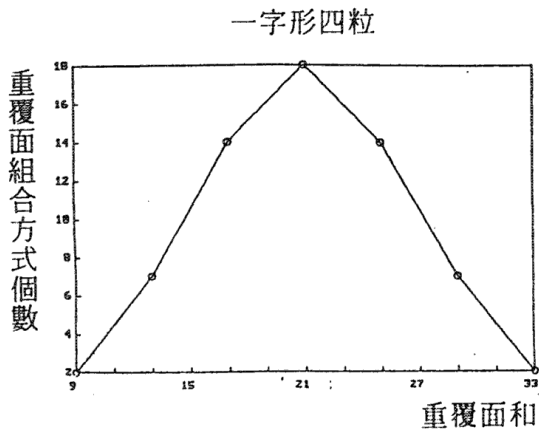
B : 三粒

重覆面和	重覆面組合方式個數	平衡配號組數和
5	2	8
8	3	9
11	5	12
14	3	9
17	2	8



C : 四粒

重覆面和	重覆面組合方式個數	平衡配號組數和
9	2	40
13	7	111
17	14	221
21	18	272
25	14	221
29	7	111
33	2	40

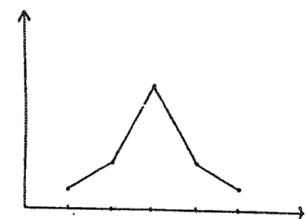


分析：由上表可看出，一字形型態之平衡配號組數和與重覆面組合方式個數均成兩兩相稱，且其平衡配號組數和高低分配圖呈一金字塔形，中間時最高峰，並向前後逐漸降低，也均有線對稱的關係，如圖(廿)

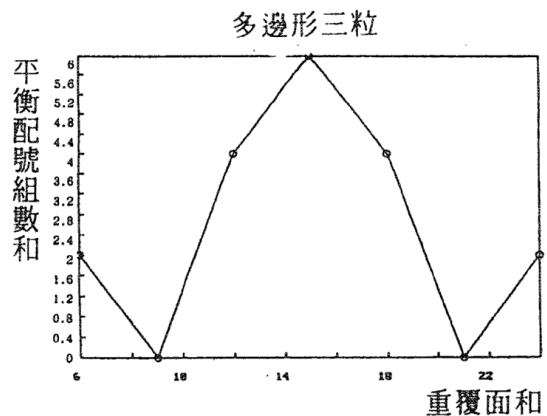
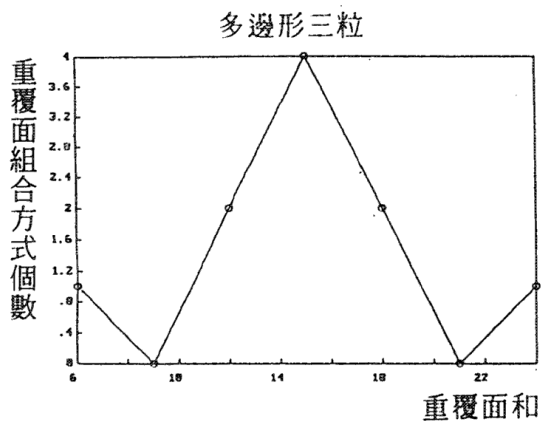
2. 下列為多邊形型態之各種粒數之平衡配號組數和分佈情形

A：三粒

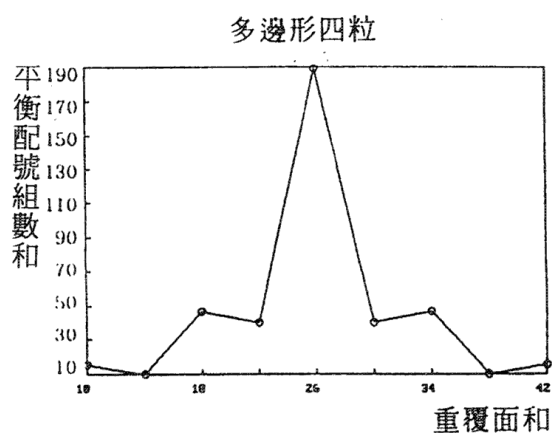
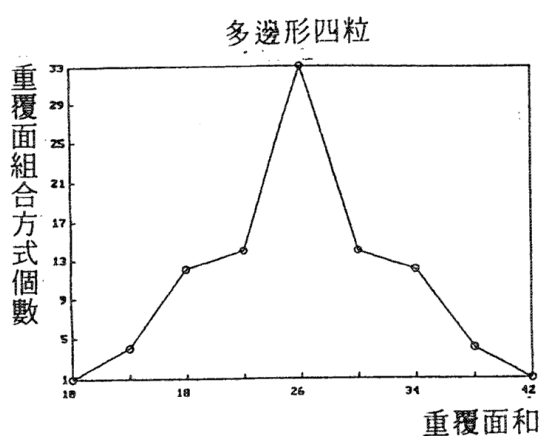
重覆面和	重覆組合方式個數	平衡配號組數和
6	1	2
9	0	0
12	2	4
15	4	6
18	2	4
21	0	0
24	1	2



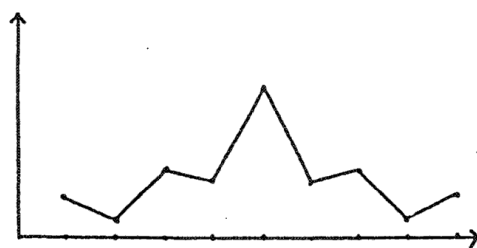
圖(十二)



重覆面和	重覆面組合方式個數	平衡配號組數和
10	1	15
14	4	10
18	12	47
22	14	40
26	33	189
30	14	40
34	12	47
38	4	10
42	1	15

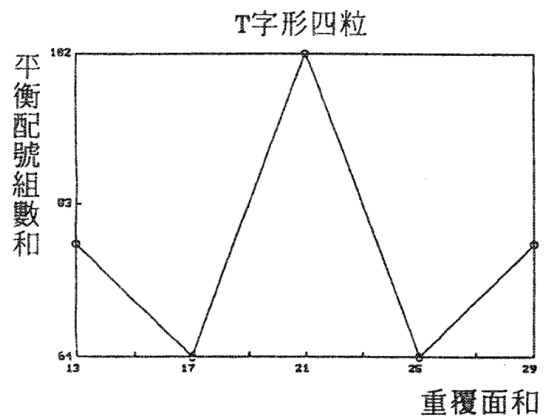
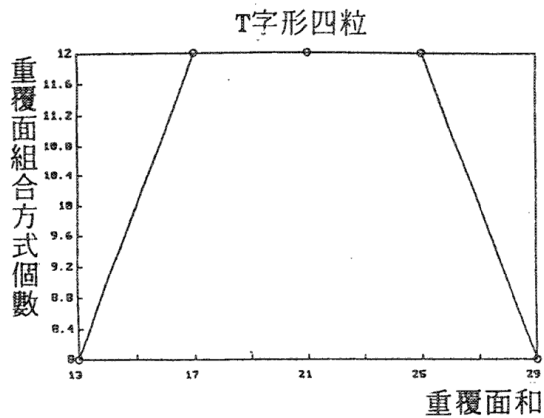


分析：由上表可看出，多邊形型態之圖形，其重覆面組合方式個數與平衡配號組數和均如一字形型態般兩兩相稱，而其重覆面組合方式個數高低次數分配圖呈金字塔形，平衡配號組數和高低次數分配圖則有大—小—大—小—大的關係，並於中間達最高峰，呈連綿山峰狀，且均有線對稱的關係如圖(三)



3. 下列為 T 字形之各種粒數的平衡配號可能性之組數和

重覆面和	重覆面和組合方式個數	平衡配號組數和
13	8	78
17	12	64
21	12	102
25	12	64
29	7	78

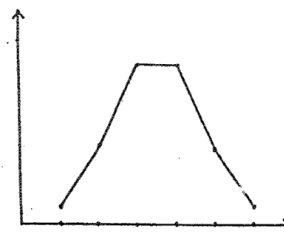
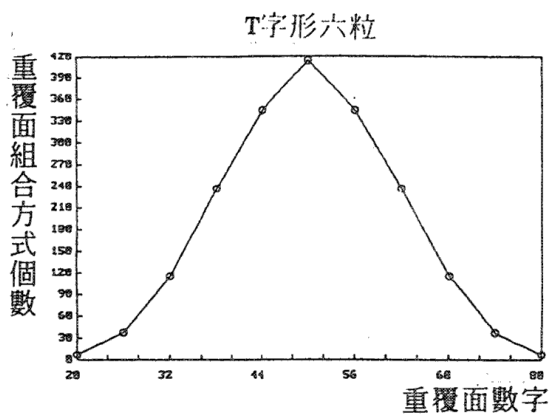
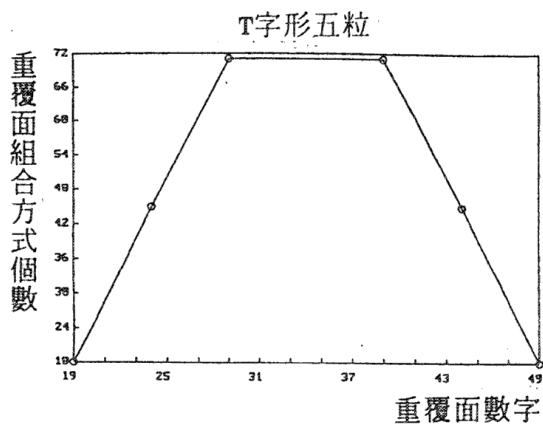


B : 五粒

重覆面和	重覆面和組合方式個數
19	18
24	45
29	71
39	71
44	45
49	18

C : 六粒

重覆面和	重覆面和組合方式個數
20	7
26	37
32	115
38	236
44	344
50	414
56	344
62	236
68	115
74	37
80	7



分析：上表中之B, C二表，因其平衡配號組數和太多了，所以改以重覆面組合方式個數來觀察；我們可以發現在T字形之型態中，其重覆面組合方式個數也如一字形或多邊形型態般有兩兩相稱的平衡關係，我們還可推測出其平衡配號組數和也有兩兩相稱的關係，如在五粒的圖形中，當其重覆面和為19時，有一種組合方式是 $1+2+3+13$ ，與19相對的重覆面和49，有一種組合方式是 $16+15+14+4$ ，而 $1+16=2+15=3+14=13+4=17$ ，因此若我們知道19有一種組合方式 $1+2+4+12$ ，則49必有一種組合方式 $(17-1)+(17-2)+(17-4)+(17-12)=16+15+13+5$ ，而其餘配號面也有此情況，故我們推測其平衡配號組數和也可兩兩相稱；其重覆面和組合方式高低次數分配圖則是呈金字塔形，並有線對稱的關係，如圖(齒)

四、結 論

1. 將立體視圖平面化後，可將其空間結構區分為一字形，多邊形，T字形等。
2. 當四面體粒數愈來愈多，其型態除原本的三種基本型態外，其餘是由任兩種以上基本型態組合而成的型態。
3. 平衡配號重覆面和成等差數列，公差即為粒數。
4. 各種不同粒數的重覆面組合方式皆成高山形或高原形的分佈情形。
5. 其平衡配號組數和卻有不同的分佈情形表現，簡述如下：
 - (1) 在一字形態中，其重覆面組合方式個數與平衡配號組數和皆有兩兩相稱之平衡關係，且兩者組數高低分配圖均成金字塔形，即中間時最高峰，向前後逐漸降低，並有線對稱的關係。
 - (2) 在多邊形型態中，其重覆面組合方式個數與平衡配號組數和也有兩兩相稱之平衡關係；而其重覆面組合方式個數高低次數分配圖呈金字塔形，平衡配號組數和高低次數分配圖則有大—小—大—小—大的關係，並於中間時達最高峰，呈連綿山峰狀，但都呈線對稱。
 - (3) 在T字形的型態中，其重覆面組合方式個數與平衡配號組數和有兩兩相稱的平衡關係，而其重覆面組合方式個數的高低次數分配圖形呈金字塔形，並呈線對稱。
 - (4) 因為一字形，多邊形型態，T字形之平衡配號組數和及重覆面組合方式個數皆可平衡相稱，我們推測，發展下去的兩種以上的型態接合成的型態，除某些型態之最原始狀態有數字限制外，皆有此情況，且其高低次數分配分皆於中間時達最高峰，並呈線對稱。

五、參考資料

- 1.國民中學數學第一、二、三、四冊（國立編譯館）

評 語

本件參展作品係利用四面體來探討立體圖形平衡配號問題。作者運用平面模型圖表示立體空間圖形結構，然後將空間圖形結構作有系統的分類，再用來討論並發現各類型模型圖滿足平衡配號的規則。本件參展作品表達很有系統並善用數學模型解決複雜抽象問題，整個問題處理很完整。