藉線性插值法求作內接等邊多邊形

國中組數學科第一名

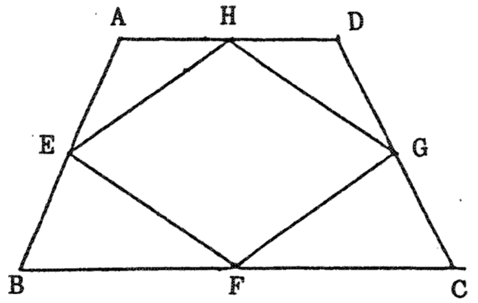
基隆市立中正國民中學

作　　者：李偕瑋

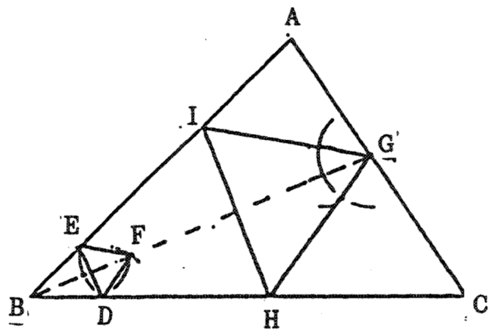
指導教師：林耀南

一、研究動機

數學課老師談到等腰梯形的性質時，老師說等腰梯形四邊中點所連成的四邊形必爲菱形，如圖(1)，菱形四邊等長，觀察原等腰梯形，其四邊不全等長，而連接四邊中點後，卻輕易的找到一個等邊四邊形，且看起來此等邊四邊形是所有內接等邊四邊形中面積最小的，那對不規則的四邊形要如何作出內接等邊四邊形呢？其他多邊形又如何？這引起我極大的興趣，於是我開始著手研究。



圖(1)



圖(2)

二、研究目的

1.尋找一種較有效率的作凸多邊形，內接等邊多邊形之作法。

2.尋找任一凸多邊形各邊上可作出的內接等邊多邊形的範圍。

3.尋找三角形中，最大，最小內接等邊三角形的位置並推廣至多邊形。

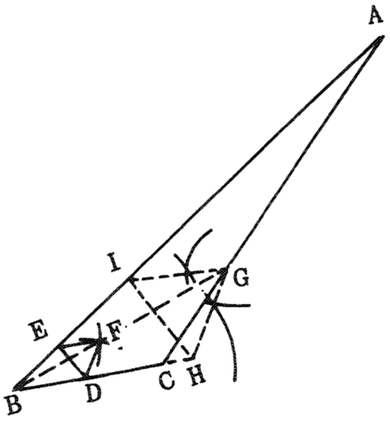
三、研究過程

PART. A：三角形

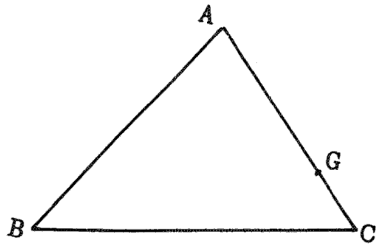
如圖(2)，在△ABC中，求作一個內接等邊三角形，以前的作法是先在$\overline{BC}$與$\overline{AB}$之間取一適當的線段$\overline{DE}$，接著以$\overline{DE}$爲邊長作一等邊三角形FDE，最後利用相似形作圖法，

作出內接等邊三角形GHI。這雖然是一種很方便的作法，但我們仔細的觀察，會發現仍有許多問題待我們去克服，例如：

(1)$\overline{DE}$傾斜的程度有一定的限制，如圖(3)，當三角形ABC爲鈍角三角形，且$\overline{DE}$與$\overline{AC}$未搭配好時，三角形FDE無法投影出一個內接於△ABC之等邊三角形GHI。



圖(3)



圖(4)

(2)如圖(4)，若我們希望投影出的內接等邊三角形的一頂點固定於$\overline{AC}$的G點上，欲利用相似形作圖法，或其他基本尺規作圖法作出來，經常是一件很困難的工作，因爲此點G不一定存在一個內接等邊三角形。

(3)當我們在四邊形，五邊形，……等的圖形上欲作出內接等邊多邊形時，我們發現相似形投影法越來越困難使用，不但作不出來的機會越來越大，且欲在固定點上作圖根本不可能。

爲了克服以上的困難，我們想出一種較有效率可去尋找並判別內接等邊多邊形是否存在的方法，現在介紹如下：

預備定理〔 1 〕

已知：直線L及L1，P爲L上一點. H. I. J同在L1上，△PDH與△PEI與△PFJ皆爲正三角形，如圖(7)

求證：D. E. F共線

證明：(1)∵△PDH與△PEI與△PFJ皆爲正三角形

∴$\overline{PD}=\overline{PH}$, $\overline{PE}=\overline{PI}$, ∠IPE=∠HPD=60°

(2)∵∠IPE=60° ，∠HPD=60°

∴∠1+∠2+∠3=∠2+∠3+∠4，∴∠1=∠4

(3)在△PIH與△PED中

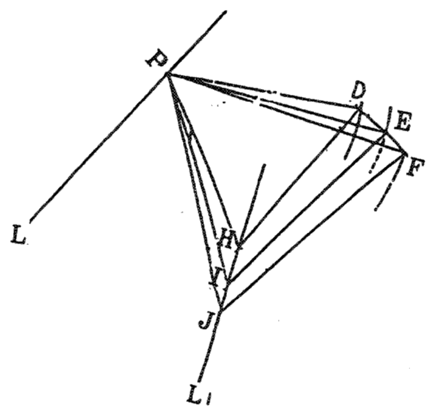
∵$\overline{PH}=\overline{PD}$, ∠1=∠4, $\overline{PI}=\overline{PE}$

∴△PIH ≅ △PED(SAS)，∴∠PIH=∠PED

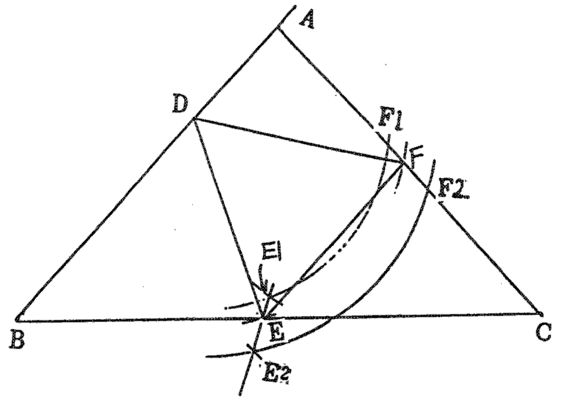
(4)同理，∠PIJ=∠PEF

(5)∵H. I. J. 皆在L1上，∠PIH+∠PIJ=180°

∴∠PED+∠PEF=180° ∴D. E. F共線



圖(7)



圖(8)

現在我將新作法及證明述說一遍：

已知：△ABC中，D爲$\overline{AB}$上一點，如圖(8)

求作：內接等邊△DEF

作法：(1)以D爲圓心，適當長爲半徑，畫弧交$\overline{AC}$於F1

(2)以F1爲圓心，同前半徑爲半徑，畫弧交前弧於E1

(3)再用大於$\overline{DE1}$（小於亦可）的線段爲半徑，仿(1)(2)的方法，最後交於E2

(4)連$\overline{E2E1}$，並延長交$\overline{BC}$於E

(5)以E爲圓心，$\overline{DE}$爲半徑畫弧交$\overline{AC}$於F（若以D爲圓心，也可）

(6)連$\overline{DE}$, $\overline{FE}$, $\overline{DF}$, 則內接等邊△DEF即爲所求

證明：(1)連$\overline{DE1}$, $\overline{DF1}$, $\overline{E1F1}$, $\overline{DE2}$, $\overline{DF2}$, $\overline{E2F2}$

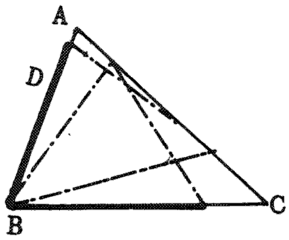
(2)由預備定理〔1〕知

當正角形DE1F1，正三角形DEF，正三角形DE2F2之三對應頂點E1, E, E2共線時，則另一組對應頂點F1, F, F2必共線

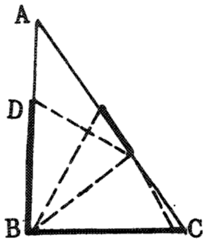
∴△DEF爲△ABC之一內接等邊三角形

由以上的作圖方式，我們簡稱爲插圖操作法，利用此法我們可以隨意的在三角形邊上一點快速的作出其內接等邊三角形，但對三角形邊上任一點是否都可做出一內接等邊三角形？還是有些地方不存在內接等邊三角形呢？以下即爲我的探討：

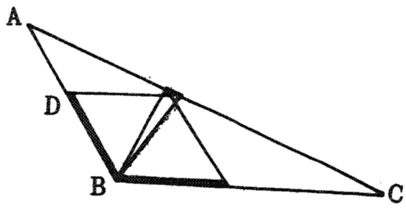
如圖(9)(10)(11)分別以銳角，直角，鈍角三角形爲例，依插圖操作法我們可以看出D點存在的範圍，（三邊上粗線部分）



圖(9)



圖(10)



圖(11)

接下來，我們嘗試找出

任一三角形的內接最大，最小等邊三角形，先以三角形的頂點爲P點，一邊靠在三角形的邊上，作內接等邊三角形，區分如下：

(1)已知：△ABC，如圖(16)

求作：內接最大及次大正三角形

作法：(1)以A爲圓心，適當長爲半徑，畫弧交$\overline{AB}$, $\overline{AC}$於Z, N

(2)以Z, N各爲圓心，同前半徑爲半徑，畫弧交前弧於X, Y

(3)依(1)，(2)，最後交於X1, Y1

(4)連$\overline{XX1}$, $\overline{YY1}$並延長各交$\overline{BC}$於D, F

(5)以A爲圓心，$\overline{AD}$爲半徑畫弧交$\overline{AB}$於E

(6)以A爲圓心，$\overline{AF}$爲半徑畫弧交$\overline{AC}$於G

(7)連$\overline{DE}$, $\overline{FG}$則最大三角形ADE，次大內接三角形AFG即爲所求

(2)已知：△ABC，如圖(17)

求作：內接最大及次大正三角形

作法：(1)以B爲圓心，適當長爲半徑，畫弧交$\overline{AB}$, $\overline{BC}$於Z, N

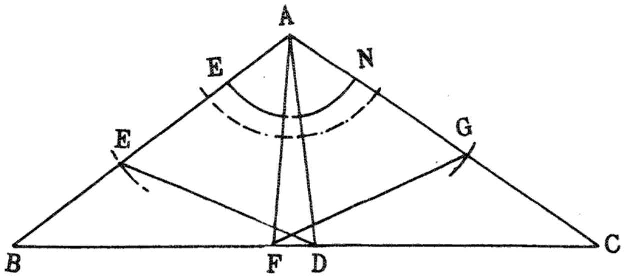
(2)以Z, N爲圓心，同前半徑爲半徑，畫弧交前弧於X, Y

(3)連$\overline{BX}$, $\overline{BY}$並延長交$\overline{AC}$於E, E1

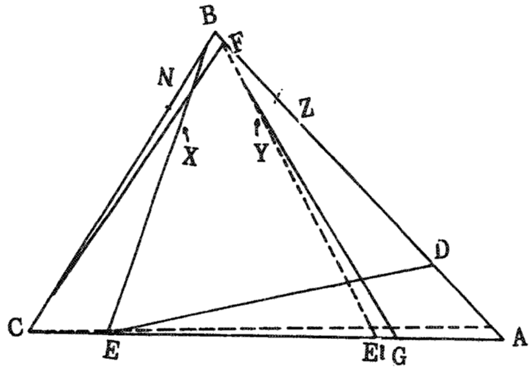
(4)以B爲圓心，$\overline{BE}$爲半徑，畫弧交$\overline{AB}$於D

(5)連$\overline{DE}$

(6)以C爲頂點，仿(1)，(2)，(3)，(4)，(5)，也能作出一個內接正三角形，則最大爲△DBE，次大爲△FGC，即爲所求



圖(16)



圖(17)

我們已經知道求出任意三角形中，最大內接正三角形及第二大內接正三角形，然後可利用這兩個三角形找出內接正三角形的範圍。

現在我們要繼續探討如何做出最小內接等邊△；敘述如下：

已知：△ABC及最大內接等邊△ADE及第二大內接等邊△AFG

求作：最小內接等邊△PQR，如圖(25)

作法：(1)做$\overline{DG}$中點Q

(2)做$\overline{AF}$中點P

(3)以P爲圓心，$\overline{PQ}$爲半徑畫弧交$\overline{AC}$於R（可直接做$\overline{AE}$中點R）

(4)連$\overline{PQ}$. $\overline{PR}$. $\overline{QR}$. 則最小內接等邊三角形即爲所求

上述之作法證明，我們引入三角函數，並先做了兩個預備定理，先證明連接三範圍中點是內接正三角形，再證明其爲最小。

預備定理〔1〕

若$\overline{AQ}$爲△ABC之中線，則$\overline{AQ}$=(1/2a)+bc cosA，如圖(26)

證明：由餘弦定理知

b+c-2bc cosA=a

∴.2bc cosA=b+c-a

bc cosA=1/2b+1/2c-1/2a

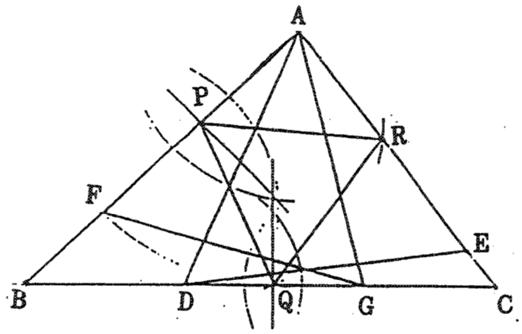
(1/2a)+bc cosA=1/2b+1/2c-1/4a-①（左右同加1/4a）

但由中線定理知

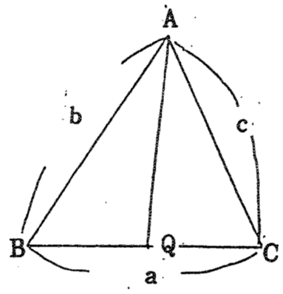
b+c=2$\overline{AQ}$+1/2a

也就是1/2b+1/2c-1/4a=$\overline{AQ}$代入①式

得(1/2a)+bc cosA=$\overline{AQ}$得證



圖(25)



圖(26)

預備定理〔 2 〕

若$\overline{AQ}$為△ABC之中線，則

$1/4bc\ \cos A=(b/2)+1/2c-(a/2)-1/2c^{*}\overline{AQ}^{*}\cos\beta$ ，如圖(27)

證明：由預備定理〔 1 〕

$(1/2a)+bc\ \cos A=AQ$

$\therefore bc\ \cos A=\overline{AQ}-1/4a$

$\therefore bc\ \cos A=2\overline{AQ}+1/2a-3/4a-\overline{AQ}$（$\because 1/2a-3/4a=-1/4a$）

但由中線定理，$b+c=2\overline{AQ}+1/2a$代入

$\therefore bc\ \cos A=b+c-3/4a-\overline{AQ}$

$\therefore bc\ \cos A=b+c+c-a+a/4-\overline{AQ}-c$（消去c，合併a）

但由△AQC之餘弦定理 $(a/2)=\overline{AQ}+c-2c^{*}\overline{AQ}^{*}\cos\beta$ 代入上式右邊

$\therefore bc\ \cos A=b+c+c-a-2c\overline{AQ}^{*}\cos\beta$

$\therefore bc\ \cos A=b+2c-a-2c\overline{AQ}^{*}\cos\beta$

∴左右同除以4得$1/4bc\ \cos A=(b/2)+1/2c-(a/2)-1/2c^{*}\overline{AQ}^{*}\cos\beta$ 得證

已知：△AST中在$\overline{AS}$, $\overline{AT}$上分別做兩正△AFC，正△AEB且P. Q. R各為$\overline{AF}$. $\overline{BC}$. $\overline{AE}$之中點，如圖(28)

求證：△PQR為正三角形

證明：連$\overline{AQ}$

設正△AFC之邊長為c，正△AEB邊長b，$\angle\overline{BAQ}=\alpha$ ，$\angle CAQ=\beta$ ，$\angle BAC=A$

由於餘弦定理，在△APR中

$\overline{PR}=\overline{AP}+\overline{AR}-2\overline{AP}^{*}\overline{AR}^{*}\cos(120^{\circ}-A)$ $\{\because \cos(120^{\circ}-a)$

$=(c/2)+(b/2)-2^{*}b/2^{*}c/2^{*}\cos(120^{\circ}-A)$ $=\cos[180^{\circ}-(60^{\circ}+A)]$

$=(c/2)+(b/2)+1/2bc^{*}\cos(60^{\circ}+A)$ $=-\cos(60^{\circ}+A)$,

$=(c/2)+(b/2)+1/2bc^{*}[1/2\cos A-3/2\sin A)$ $[\cos(180^{\circ}\pm\theta)=-\cos\theta\ ]\}$

$=1/4c+1/4b+1/4bc\ \cos A-3/4bc\sin A$ $\{\because \cos(\alpha+\beta)$

$=c/4+b/4+1/4bc\ \cos A-3/2*\triangle ABC$ $\qquad =\cos\alpha\ \ \cos\beta\ \ -\sin\alpha*\sin\beta\}$

$\{\because\triangle ABC=1/2bc\ \sin A\}$

同理，由餘弦定理，在△ARQ中

$\overline{RQ}=\overline{AR}+\overline{AQ}-2AR*\overline{AQ}*\cos(60^\circ-\alpha)$

$\quad =(b/2)+\overline{AQ}-2*b/2*\cos(60^\circ-\alpha)$

$\quad =b/4+b/2+c/2-a/4-b*\overline{AQ}*(1/2\cos\alpha+3/2\sin\alpha)$

$\quad =b/4+b/2+c/2-a/4-b/2*\overline{AQ}*\cos\alpha-3/2*b*\overline{AQ}*\sin\alpha$

$\quad =b/4+b/2+c/2-a/4-b/2*\overline{AQ}*\cos\alpha-3/2\triangle ABC$

現在由預備定理2知

$\overline{PR}=c/4+b/4+1/4bc\ \cos A-3/2\triangle ABC$

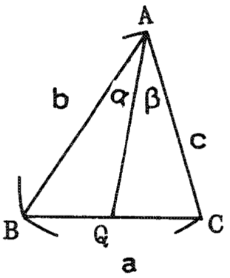
$\quad =c/4+b/4+(b/2)+1/2c-(a/2)-a/2c*\overline{AQ}*\cos\beta-3/2\triangle ABC$

$\quad =c/4+b/2+c/2-a/4-a/2c*\overline{AQ}*\cos\beta-3/2\triangle ABC$

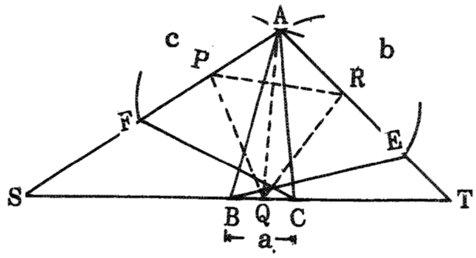
$\quad =\overline{PQ}$

$\therefore\overline{PR}=\overline{PQ}$　同理$\overline{PR}=\overline{RQ}$　$\therefore\overline{PQ}=\overline{PR}=\overline{PQ}$

∴△PQR爲正三角形，得證



圖(27)



圖(28)

我們接下來把圖放大如圖(29)，在Q點左右皆任意取一點，若能證都比出△PQR大，則此三角形最小。

已知：$\overline{AF},\overline{AE},\overline{BC}$爲各邊上的範圍，△PQR爲連接三範圍中點所形成的三角形，Q1爲任取之一點。△P1Q1RQ1內接正三角形，如圖(29)

求證：△P1Q1R1>△PQR

證明：(1)過Q1，作$L//\overline{PQ}$

(2)在L上，作$\overline{Q1I}=\overline{PQ}$

(3)連$\overline{P1I}$

(4)作$\overline{P1I}$之中垂線交$\overline{P1Q1}$於K，$\therefore\overline{KI}=\overline{KP1}$

(5)連$\overline{KI}$

(6)在△KIQ1中，$\overline{KI}+\overline{KQ1}>\overline{IQ1}, \overline{KP1}+\overline{KQ1}>\overline{IQ1}$

∴$\overline{P1Q1}>\overline{PQ}$，∴△P1Q1R1>△PQR

同理，在Q右邊所任取的點也可以用此方法證出皆大於△PQR，因此我們得到一個重要的結論：

連接任一△AST內的最大內接正△ABE與第二大內接正△AFC的三對應頂點之中點所連成之△PQR必爲最小的內接正三角形。

PART B：四邊形

接下來我們觀察四邊形的情形

已知：四邊形ABCD，P爲$\overline{BC}$上的任一點，如圖(30)

求作：一內接等邊四邊形PQRK

作法：(1)以P爲圓心，適當長爲半徑，畫弧交$\overline{CD}$於Q'

(2)以Q' 爲圓心，前半徑爲半徑，畫弧交$\overline{AD}$於R'

(3)以R' 爲圓心，前半徑爲半徑，畫弧交(1)所畫的弧於K1

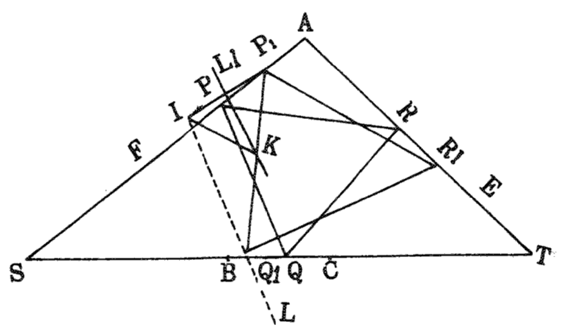
(4)依(1)，(2)，(3)的方法，以P爲圓心，大於前半徑爲半徑，最後交於K2

(5)連$\overline{K1K2}$並延長交$\overline{AB}$於K

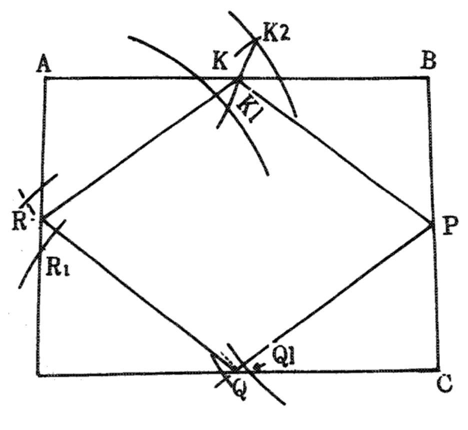
(6)以P, K各爲圓心，PK爲半徑，畫弧分別交$\overline{DC}$, $\overline{AD}$於Q, R

(7)連$\overline{KP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RK}$

內接等邊四邊形PQRK即爲所求



圖(29)



圖(30)

我們會對前述的方法產生懷疑，是否三個四個…的四邊形頂點固定A點，其於兩頂點固定於同一條直線上，但不共點，是否最後一個頂點會共線呢？請視察下述證明：

預備定理

已知：△PAD與△PBE與△PCF皆爲相似形，A. B. C三點共線

($\overline{PA}/\overline{PD}=\overline{PB}/\overline{PE}=\overline{PC}/\overline{PF}$)，如圖(31)

求證：D. E. F三點共線

證明：(1)∵△PAD～△PBE

∴∠APD=∠BPE

∴∠1+∠2+∠3=∠2+∠3+∠4

∴∠1=∠4

(2)在△PAB與△PDE中

∵$\overline{PA}/\overline{PD}=\overline{PB}/\overline{PE}$, ∠1=∠4

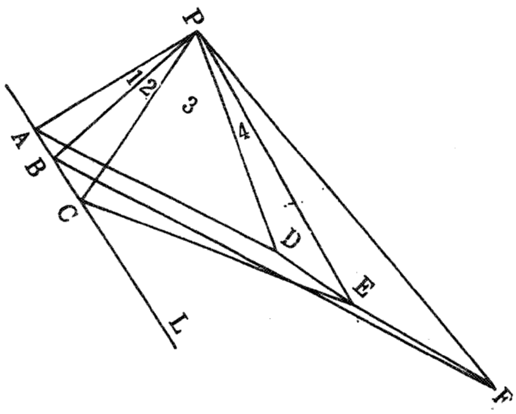
∴△PAB～△PDE(SAS)

∴∠PBA=∠PED同理∠PBC=∠PEF

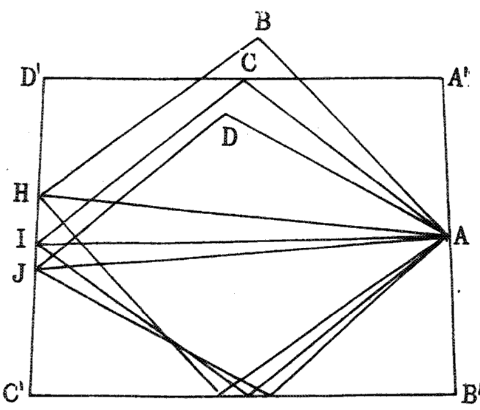
(3)∵A. B. C三點共線

∴∠PBA+∠PBC=180°

∴D. E. F共線



圖(31)



圖(32)

已知：一四邊形A' B' C' D' 及三個等邊四邊形，如圖(32)

求證：B, C, D共線

證明：(1)連$\overline{AH}$, $\overline{AI}$, $\overline{AJ}$

(2)在△ABH與△ACI與△ADJ皆爲相似形，由預備定理知一個頂點固定於A，另三個頂點共線，則B, C, D三點共線。

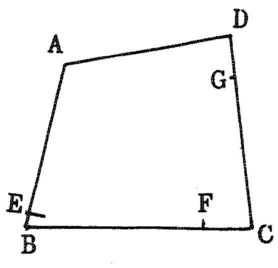
在三角形中，我們欲找出最大內接正△及次大內接正△都必須從頂點找出，那麼在四邊形中，也不例外。

一個四邊形，現在之中用頂點以插圖法作圖所取出的長度必須與每個邊上都有交點，如圖(33)(34)(35)

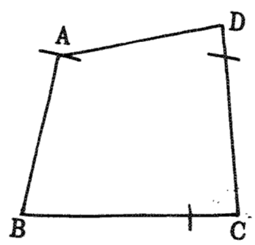
以A為圓心，$\overline{AD}$為半徑，畫弧交$\overline{AB}$於E，以E為圓心，$\overline{AD}$為半徑，畫弧交$\overline{BC}$於F，以F為圓心，$\overline{AD}$為半徑，畫弧交$\overline{CD}$於G，在$\overline{AD}$上的交點即為A, D。

在同一圖形內，若我們固定頂點B，以$\overline{AB}$為長操作上述方法，發現卻不能在每邊上找出交點（像$\overline{AD}$就是沒有交點），如果是如此，再繼續操作下去，雖也可以作出一等邊四邊形，但卻不是內接的。

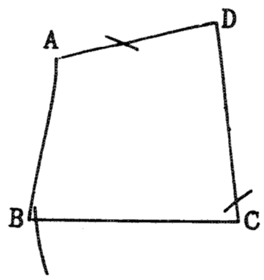
如此不斷地以C為圓心，B為圓心，發現如果以$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$為長來操作，皆不能在每邊上找到交點，意思就是無法找出內接等邊四邊形，所以我們可以歸納出，假使想在頂點上，畫出內接等邊四邊形，則必須是在最小邊的兩個頂點上。



圖(33)



圖(34)



圖(35)

已知：任意四邊形ABCD，$\overline{AD}$為最短的邊

求作：ABCD最大內接等邊四邊形及最小內接等邊四邊形

作法：(1)以A為圓心，適當長為半徑，畫弧交$\overline{AB}$於E

(2)以E為圓心，同前半徑為半徑，畫弧交$\overline{BC}$於E2

(3)以E2為圓心，同前半徑為半徑，畫弧交(1)所畫的弧於E3

(4)仿(1)，(2)，(3)最後交於F3

(5)連$\overline{B3F3}$並延長交$\overline{DC}$於G

(6)以A為圓心，$\overline{AG}$為半徑，畫弧交$\overline{AB}$於H

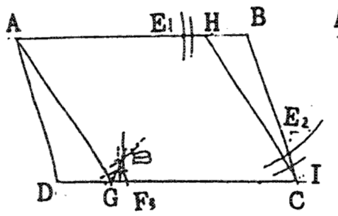
(7)以H為圓心，同前半徑為半徑，畫弧交$\overline{BC}$於I

(8)連$\overline{AG}$, $\overline{GI}$, $\overline{IH}$

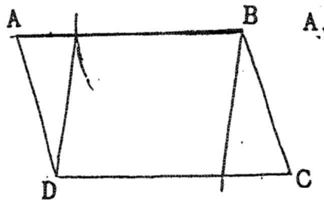
則最大內接等邊四邊形即為所求，如圖(36)

(9)同理則次大內接等邊四邊形，以D為圓心，操作(1)～(8)步驟，即可作出，如圖(37)

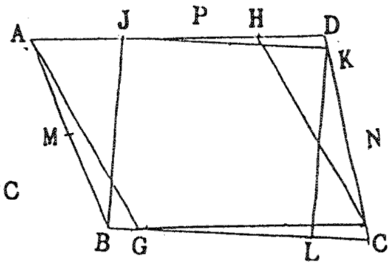
圖(36)



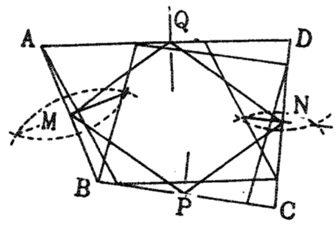
圖(37)



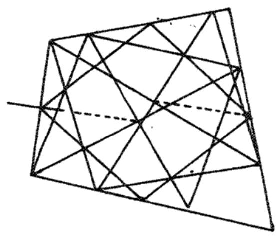
圖(38)



圖(38-A)



圖(38-B)



兩圖合併後就和△一樣在每邊上會形成一個範圍，如圖(38)

在AB上，就是以A點和B點形成的範圍。

在BC上，就是以G點和L點形成的範圍。

在DC上，就是以I點和K點形成的範圍。

在AD上，就是以J點和H點形成的範圍。

在這些範圍內皆可作出內接等邊四邊形，以外的則否。

接下來我們來找出最小的內接等邊四邊形

已知：四邊形ABCD, $\overline{AB}$爲最短邊，AGIH與BJKL皆是固定於最短邊的頂點所作出的內接等邊四邊形，如圖(38-A)

求作：最小內接等邊四邊形

作法：(1)作$\overline{AB}$, $\overline{KI}$, $\overline{JH}$, $\overline{GL}$中點M, N, P, Q

(2)連$\overline{MP}$, $\overline{NP}$, $\overline{NQ}$, $\overline{MQ}$，則四邊形MPNQ即爲所求

又如圖(38-B)，所有內接等邊多邊形的中心點共線，且最小四邊形的中心點爲最外的四邊形AGIH, BJKL中心點連線的中點。

PART C：五邊形

已知：ABCDE爲五邊形

求作：一內接等邊五邊形

作法：(1)以P爲圓心，適當長爲半徑，畫弧交$\overline{BC}$於X

(2)以X爲圓心，同前半徑爲半徑，畫弧交$\overline{AB}$於X1

(3)以X1爲圓心，同前半徑爲半徑，畫弧交$\overline{AE}$於X2

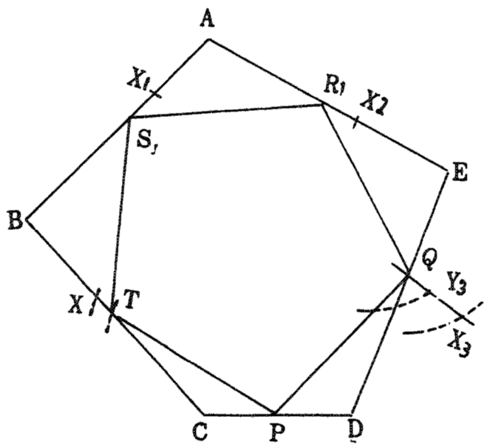
(4)以X2爲圓心，同前半徑爲半徑，畫弧交(1)畫的弧於X3

(5)以P爲圓心，小於前半徑爲半徑，仿(1)(2)(3)(4)最後交於Y3

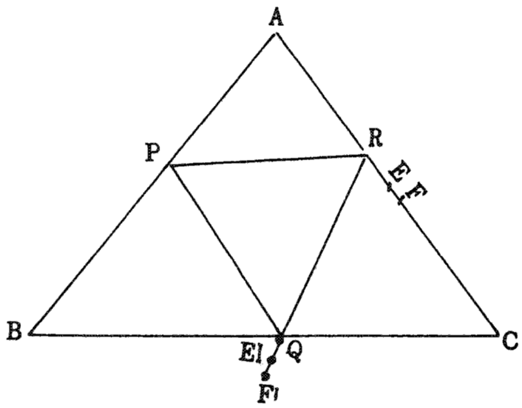
(6)連X3Y3，並延長交$\overline{ED}$於Q

(7)連$\overline{PQ}$

(8)以$\overline{PQ}$爲兩項點，$\overline{PQ}$爲長度，作出一五邊形PQRST則內接等邊五邊形PQRST即爲所求，如圖(39)



圖(39)



圖(40)

四、結　論

1.三角形

(一)插圖操作法：

已知：△ABC，P爲$\overline{AC}$上一點，如圖(40)

求作：一內接正三角形（等於一內接等邊三角形）

作法：(1)以P爲圓心，適當長爲半徑，畫弧交$\overline{AC}$於E

(2)以E爲圓心，相同的半徑畫弧交前弧於E'

(3)以O爲圓心，不同長度爲半徑，仿(1)，(2)最後交於F'

(4)連F' E' ，並延長交$\overline{BC}$於Q（若F' E' 與BC不相交，則需改P點位置，重新操作）

(5)以P爲圓心，$\overline{PQ}$爲半徑，畫弧交$\overline{AC}$於R

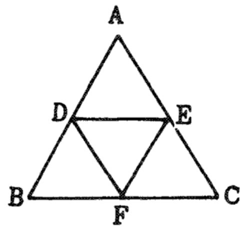
(6)連$\overline{PR}$, $\overline{PQ}$, $\overline{RQ}$則內接正△PQR即爲所求

(二)求任意三角形內最大內接正△及次大內接正△的作法只要固定於大於或等於六十度的角的兩夾邊上，或兩個大於等於六十度的角各一邊上，操作插

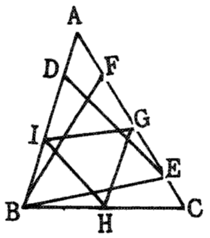
圖法即可。

㈢有的三角形並不是邊上任何一個地方都可作出內接正三角形，其範圍即是最大和次大內接正三角形在每一邊上圍成的區域，此區域內取的點，即可作出內接正三角形。

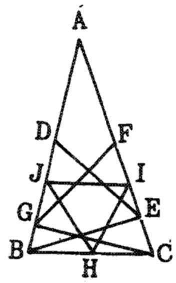
㈣最小內接正三角形即為各邊上範圍的中點連線。



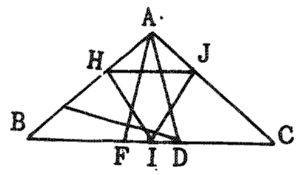
圖(41)



圖(42)



圖(43)



圖(44)

每個角都等於六十度，最大內接正△即為本身範圍：$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$如圖(41)

B>60°， C=60°， A<60°

最大內接正△：△FBC

次大內接正△：△DBE

範圍：$\overline{DB}$, $\overline{FE}$, $\overline{BC}$

最小內接正△：△IGH

如圖(42)

∠B>60°，∠C>60°，∠A<60°

最大內接正△：△FGC

次大內接正△：△DBE

範圍：$\overline{DG}$, $\overline{FE}$, $\overline{BC}$

最小內接正△：△HIJ

如圖(43)

∠B<60°，∠C<60°，∠A>60°

最大內接正△：△AED

次大內接正△：△AFG

範圍：$\overline{AE}$, $\overline{AG}$, $\overline{FD}$

最小內接任△：△HIJ

如圖(44)

2.四邊形

㈠四邊形插圖操作法

已知：ABCD，P為邊上一點，如圖(45)

求作：一內接等邊四邊形，P為其一頂點。

作法：(1)以P為圓心，適當長為半徑畫弧交$\overline{AD}$於E

(2)以E為圓心，同前半徑為半徑畫弧交$\overline{DC}$於E1

(3)以E1為圓心，同前半徑為半徑畫弧交(1)所畫的弧於E2

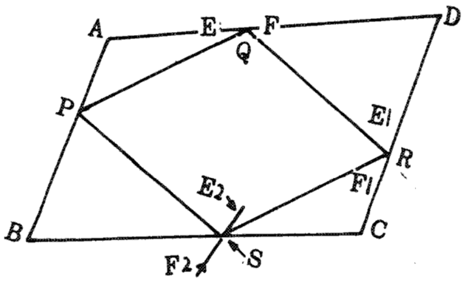
(4)以P為圓心，大於原半徑為半徑仿(1)(2)(3)交於F2

(5)連E2F2交BC於S

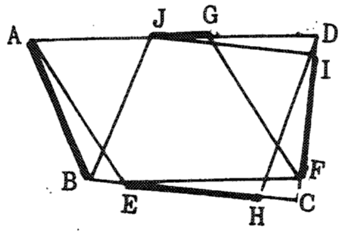
(6)以P爲圓心，$\overline{PS}$爲半徑畫弧交$\overline{AD}$於Q

(7)以Q爲圓心，$\overline{PS}$爲半徑畫弧交$\overline{CD}$於R

(8)連$\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RS}$, $\overline{SP}$則內接等邊四邊形PQRS即爲所求



圖(45)



圖(46)

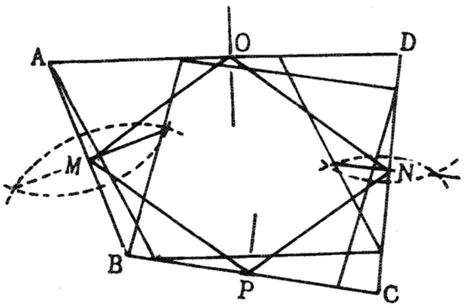
(二)求作任一四邊形的最大內接等邊四邊形和次大內接等邊四邊形只要選出最短邊之兩個頂點，使用插圖法即可（另外兩個頂點做不出來）

(三)範圍也是由最大，次大內接等邊四邊形在每邊上圍成的區域，如圖(46)，且可以發現此範圍沒有包含另外兩個頂點，表示眞的在那兩個頂點做不出內接等邊四邊形。

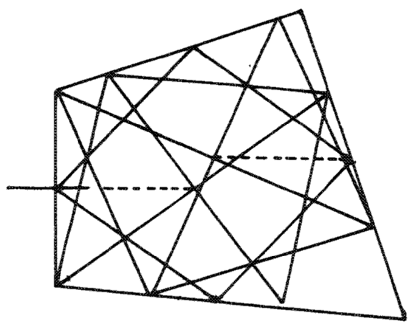
(四)做到此可發現一個觀念，並不是只有四邊形才取最短邊的兩個頂點，其實在三角形上亦是如此，如圖(42)，$\angle B>60^\circ$ $\angle C=60^\circ$ $\angle A<60^\circ$ $\therefore \angle B>\angle C\angle A$ $\therefore AC>AB>BC$，BC爲最短，此最大，次大內接正△是以B, C爲頂點作出，圖(43)也是如此，圖(44)只知$\angle B<60^\circ$，$\angle C<60^\circ$ $\angle A>60^\circ$ $\therefore \angle A$最大$\therefore BC$最長又以A爲頂點，無論$\overline{AB}$或$\overline{AC}$最小，A都在其上。

(五)以最短邊之兩頂點，依插圖法作出等邊四邊形存在範圍，分別取相對的各邊範圍的中點，最小內接等邊四邊形即爲所求，如圖(46-A)。

(六)四邊不等的四邊形，所有內接等邊四邊形的中心點共線，且最小等邊四邊形的中心點恰爲最外側兩個等邊四邊形中心點的中點，如圖(46-B)。

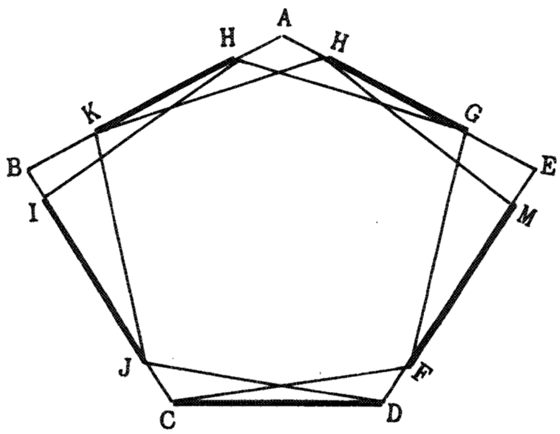


圖(46-A)



圖(46-B)

3.五邊，六邊……以上的任意凸多邊形，亦可用插圖法在最短邊的兩端點處操作出內接等邊多邊形而得到範圍（若存在的話），如圖(47)，而最小的內接等邊多邊形亦爲各範圍之中點所連成的等邊多邊形。



圖(47)

五、參考資料

1.國民中學數學選修科目上冊（國立編譯館）
2.高級中學數學第二冊（國立編譯館）

評　語

本作品首先在三角形中藉由線性插值方法尋找內接等邊三角形的位置，然後推廣至多邊形。作品中並證明任意三角形中最大內接正三角形及第二大內接正三角形的三對應頂點之中點所連成之三角形必爲最小的內接正三角形。研究結論具學術價值且有創新性，是近兩年來國中數學組難得的優良作品。