幻方研究

高中組數學科第三名

作　　者：李彥頡
指導教師：黃呈明

一、研究動機

在學校中閱讀趣味數學書籍時，對於其中幻方（魔術方陣）特殊的性質，感到十分有興趣，於是便做了以下的研究。

二、研究目的

(一)討論、計算幻方的個數。

(二)尋找幻方的造法便證明之。

(三)尋找特殊形式的幻方，並討論其性質。

(四)將找到的魔術方陣加以分類計數。

(五)將平面的幻方造法推廣到三次元。

三、研究設備器材

(一)紙、筆。

(二)電腦（Turbo C++、Quick basic、Derive）

四、研究過程方式

(一)電腦的計算：

1.利用電腦尋找幻方、反幻方、拉丁方陣。

2.利用電腦做簡單的計算。

3.利用電腦分類、計算方陣的數目。

(二)歸納與推想：

1.將現有的事實加以歸納，並找出通則。

2.將現有的資料中的方法加以發揚推展。

3.推測可能結果。

(三)公式的推演與驗證：

1.證明基本公式以利研究。

2.將歸納出的性質加以證明。

3.找出幻方的一般構造模式。

五、研究結果

(一)幻方的個數

1.由排列組合計算，可以發現，由整數所組成的n階方陣的數目爲(n^2)！種，成階層式的增加，所以我們也預測幻方的數目應是隨著階數的增加而大幅增加。若由已知條件和未知變數來看，在三階以上的方陣，未知數的數目都大於已知條件，而且條件增加的速度遠比未知數數目增加得慢，若不發生矛盾的現象，解因該是隨階數而增加的。

由電腦計算，測試出的結果如下：

階	方 陣 排 列 組 合 數 目	幻方數目
1	1 種	1 個
2	24 種	0 個
3	362880 種	8 個
4	20922789888000 種	7040 個
5	37199332678990121746799944815083520000000	? 個

2.魔數的公式：

一個n階幻方中因爲每行的數字和相等，所以可以得到：

數字和＝各行數字和（魔數）*行數

$$\rightarrow \frac{(n^2)(n^2+1)}{2} = M * N \rightarrow M = \frac{n(n^2+1)}{2}$$

3.二階幻方的個數證明：

a	c
b	d

由公式可知

魔數＝5

→ a＋c＝5　a＋d＝5

→ a＝5－c＝5－d　→ c＝d（不合）可得二階幻方無解

4.由幻方的旋轉，我們可以得到四種變化：

(1)0度　(2)90度　(3)180度　(4)270度　旋轉

若將幻方整個翻轉過來，又可以的到另外的四個不同的幻方，可知幻方的

個數必為八的個數。

(1)順時針旋轉270度、180度、90度；
(2)依照鉛直、水平對稱軸鏡射；
(3)依照左上→右下、右上→左下對角線鏡射；
總共有八種。

我們可以以3階方陣為例，可求出其他7個幻方：

原方陣

8	1	6
3	5	7
4	9	2

90 度

4	3	8
9	5	1
2	7	6

180 度

2	9	4
7	5	3
6	1	8

270 度

6	7	2
1	5	9
8	3	4

鉛 直

6	1	8
7	5	3
2	9	4

水 平

4	9	2
3	5	7
8	1	6

左上右下

8	3	4
1	5	9
6	7	2

右上左下

2	7	6
9	5	1
4	3	8

(二)幻方的造法：

1.三階幻方

若列出所有已知條件可以解得左邊的結果，於是我們可以利用討論的方式來得出幻方。

a	$10-h$	$h+5-a$
$h+10-2a$	5	$2a-h$
$5-h+a$	h	$10-a$

(1)若 $a=2k+1$ →

A.若 h 為偶數，則 $10-h$, $h+4-2k$, $h+8-4k$, $4k+2-h$, $6-h+2k$, h為偶數→有六個偶數不合。

$2k+1$	$10-h$	$h+4-2k$
$h+8-4k$	5	$4k+2-h$
$6-h+2K$	h	$9-2k$

B.若 h 為奇數，則所有的數字都是奇數→不合所以a不為奇數。

(2)若　a=2,4,6,8 則各可以造出兩個幻方→三階幻方的個數爲八個。

2.四階幻方：

將4階方陣表爲下圖

1	2	3	4
5	6	7	8
17−8	17−7	17−6	17−5
17−4	17−3	17−2	17−1

34　34−6　34−2　34+2　34+6　34

可看出兩對角線已經是相等且等於魔數，所以將對角線上的數字固定。

由直列和的關係可以將方陣加以調整：

↓

1	2	3	4	← 34−24
8	7	6	5	← 34− 8
17−5	17−6	17−7	17−8	← 34+ 8
17−4	17−3	17−2	17−1	← 34+24

由橫列和的關係可以將方陣再做調整：

↓

1	17−3	17−2	4
17−5	7	6	17−8
8	17−6	17−7	5
17−4	2	3	17−1

→

即可得出下圖之結果

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

得出的方陣可以以中心點爲軸，將對稱的部份對換，而成爲另一個幻方。

例如：

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

⟶

1	14	15	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	2	3	16

3.四階幻方造法推廣－偶數階幻方的造法

1	2	3	⋯	n	← n(n+1)/2
n+1	n+2	n+3	⋯	2n	← n(n+1)/2+n*n
⋮	⋮	⋮		⋮	
(n−1)*n+1	n(n−1)*n+2	n(n−1)*n+3	⋯	n*n	← n(n+1)/2 +(n−1)*n*n
↑	↑	↑			
$n+n^2(n-1)/2$	$2n+n^2(n-1)/2$	$3n+n^2\ (n-1)/2$			

$n*n+n^2(n-1)/2$

由上面的計算可以發現，各行各列的和是成等差數列，若 n 為偶數可得下面的關係：

1	2	⋯	n/2	n/2+1	⋯	n	→ n(n+1)/2
n+1	n+2	⋯	n+n/2	n+n/2+1	⋯	2n	→ n(n+1)/2+n*n
⋮	⋮		⋮	⋮		⋮	
n(n−1)+1	n(n−1)+2	⋯	n(n−1)+n/2	n(n−1)+n/2+1	⋯	n*n	← n(n+1)/2 +(n−1)*n*n
			↑	↑			
			n*(n/2)+n2(n−1)/2	n*(n/2+1)+n2(n−1)/2			
可以化為 →			n3/2	n(n2+2)/2			
→			n(n2+1)/2−n/2	n(n2+1)/2+n/2			

可以得到一個左右對稱的和（若以上下各數之和來討論，也可以得到上下對稱的結果）且兩對角線的和恰等於魔數。

因此，我們應該也可以仿造四階方陣的原理，將對稱的和修正，而得到幻方。

4.四與四倍數階幻方之均勻造法：

若我們以類似攪拌的方式來將四階自然方陣做翻轉的工作，我們也可以得到魔術方陣。

（原理：利用上面的對稱關係而來）

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

→

1	14	15	4
5	10	11	8
9	6	7	12
13	2	3	16

上 下 翻 轉

→

1	14	15	4
8	11	10	5
12	7	6	9
13	2	3	16

左 右 翻 轉

在我們做翻轉的時候，一且以「平均」為出發點。所以我試著以中間的兩

列上下互換於是得到了一個對角線、橫行數字和相同的方陣。繼續以此方法處理第二個方陣，我們可以得到以上的結果。

為什麼我們可以由這種方法來造出幻方？因為在一個自然方陣中，若我們以中心為軸，互換數字，其合一加一減，正好可以抵銷對角線上的變化，所以我們在做翻轉時，可以不用在意對角線是否相等，只需要將各行成等差的差值修正即可得到幻方。

這種方法若應用到八階、十二階、十六階……等四倍數階之幻方上，都可以得到完美的結果。例如以八階為例：

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

→

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
24	23	22	21	20	19	18	17
32	31	30	29	28	27	26	25
40	39	38	37	36	35	34	33
48	47	46	45	44	43	42	41
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

→

1	2	59	60	61	62	7	8
9	10	51	52	53	54	15	16
24	23	46	45	44	43	18	17
32	31	38	37	36	35	26	25
40	39	30	29	28	27	34	33
48	47	22	21	20	19	42	41
49	50	11	12	13	14	55	56
57	58	3	4	5	6	63	64

5. 我們可以將翻轉的行或列改變，經過調整後也可以得到幻方。（調整時為了符合對角線相同的條件，必須成對的翻轉，而且即使翻轉的行、列相同，而翻轉的順序不同，所得到的幻方也不同）。

例如以下的八階幻方，都是利用這種方法造出來的：

（* 表示翻轉的行或列）

1	58	59	4	5	62	63	8
16	55	54	13	12	51	50	9*
24	47	46	21	20	43	42	17*
25	34	35	28	29	38	39	32
33	26	27	36	37	30	31	40
48	23	22	45	44	19	18	41*
56	15	14	53	52	11	10	49
57	2	3	60	61	6	7	64
	*	*			*	*	

57	2	59	4	5	62	7	64
49	10	51	12	13	54	15	56
48	23	46	21	20	43	18	41*
40	31	38	29	28	35	26	33*
32	39	30	37	36	27	34	25*
24	47	22	45	44	19	42	17*
9	50	11	52	53	14	55	16
1	58	3	60	61	6	63	8
*		*			*		*

利用排列組合，我們可以推算出這種造法可以造出的幻方數目。

4n階幻方可造出的幻方數目為：

$$2 * C_{n}^{4n/2} * C_{n}^{4n/2}$$

例如：4階為　8種

8階為 72種

12階為800種

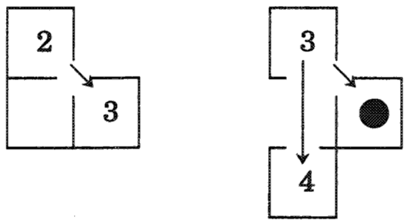
以上所造出的幻方都具有和 **2** 中相同的特點：

* 得出的方陣可以以中心點爲軸，將對稱的部份對換，而成爲另一個幻方。

6. 奇數幻方的建構法，中西方都有不同的成就，最著名的方法有楊輝法和達拉盧庇法，以下依序說明：

(1)楊輝法：

楊輝在「續古摘奇算法」中有一種建立奇數幻方的方法是以方陣的中間位置之下一格做爲出發點，向右下方依序填入數字。若右下格已有數字，則往下退兩格，再繼續往下塡數字，直到塡完爲止；若超出格子便跳到方陣的另一頭。



下面是一個例子：

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

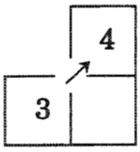
魔數＝65

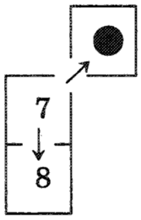
↗ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↖

65 65 65 65 65 65 65

(2)達拉盧庇法：

達拉盧庇在1693年從暹邏帶回這個製作幻方的方法。這個方法事實上和楊輝的方法十分類似，是以方陣中間一行最上方的一格爲出發點，向右上方依序塡入數字。若右上格已有數字，則往下退一格，再繼續往下塡數字，直到塡完爲止；若超出格子便跳到方陣的另一頭。





(3)楊輝法與達拉盧庇法的推廣：

在我們利用楊輝法填入魔術方陣時，若把數字改成以下的代數型態可以得到下面的結果：

利用楊輝法填入

Ca	Ed	Bb	De	Ac
Ad	Cb	Ee	Bc	Da
Db	Ae	Cc	Ea	Bd
Be	Dc	Aa	Cd	Eb
Ec	Ba	Dd	Ab	Ce

利用達拉盧庇法填入

Db	Ed	Aa	Bc	Ce
Ec	Ae	Bb	Cd	Da
Ad	Ba	Cc	De	Eb
Be	Cb	Dd	Ea	Ac
Ca	Dc	Ee	Ab	Bd

若將A,B,C,D,E分別以0,5,10,15,20代入，將a,b,c,d,e,f分別以1,2,3,4,5代入，兩數相加，便可以得到楊輝和達拉盧庇所得到的兩個魔術方陣。

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

12	24	1	8	25
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

由改寫的方陣中可以看出，每行、每列的和都相同，所以若我們代入其他數字，並配合對角線的要求，應該也可以得到魔術方陣：

例：(A,B,C,D,E)＝(5,15,10,0,20)　　(a,b,c,d,e)＝(1,4,3,2,5)

ps. 配合楊輝法的對角線 =>C＝10

配合達拉盧庇法的對角線 =>c＝3

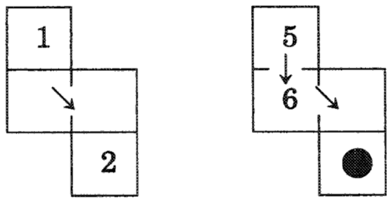
11	22	19	5	8
7	14	25	18	1
4	10	13	21	17
20	3	6	12	24
23	16	2	9	15

4	22	6	18	15
23	10	19	12	1
7	16	13	5	24
20	14	2	21	8
11	3	25	9	17

(4)我們發現仿照楊輝法與達拉盧庇法，如果我們用以下的規則來填入數字，也可以得到幻方：（原理：改變平移的次序）

Ec	Cb	Aa	De	Bd
Ad	Dc	Bb	Ea	Ce
Be	Ed	Cc	Ab	Da
Ca	Ae	Dd	Bc	Eb
Db	Ba	Ee	Cd	Ac

<=



右下隔一格　　有阻礙

＊ 若我們將大寫和小寫的字母分開，便可以得到兩個不同的拉丁方陣

E	C	A	D	B
A	D	B	E	C
B	E	C	A	D
C	A	D	B	E
D	B	E	C	A

c	b	a	e	d
d	c	b	a	e
e	d	c	b	a
a	e	d	c	b
b	a	e	d	c

7.若配合兩個幻方，可以造出新的高階幻方：

例：現有一四階鬼幻方和一三階幻方

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

2	7	6
9	5	1
4	3	8

可做下面的組合：

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

↑ 加16

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

↑ 加96

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

↑ 加80

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

↑ 加128

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

↑ 加64

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

↑ 加0

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

↑ 加48

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

↑ 加32

4	5	16	9
15	10	3	6
1	8	13	12
14	11	2	7

↑ 加112

12階幻方的魔數

$=12*(12*12+1)/2=870$

2	7	6
9	5	1
4	3	8

↓ 減 1

1	6	5
8	4	0
3	2	7

↓ 乘以16

16	96	80
128	64	0
48	32	112

8.如果我們手上有許多不同的幻方，便可以隨意的擺入這個大型的方陣中，可以造出更多不同的幻方。

例如：已知一個三階方陣，四階方陣總數共有7040種（包括旋轉、翻轉），則可以組成：

$7040^9=4247700937018688577889894400000000$種

㈢拉丁方陣與魔術方陣的探討：

1.拉丁方陣中的符號若改以1,2,3,....等連續整數代替，可以得到一個每行、每列數字和都相等的方陣，與魔術方陣的性質十分相近。

a	b	c
c	a	b
b	c	a

=>

1	2	3
3	1	2
2	3	1

2.普通的兩個正交拉丁方陣（兩個方陣之中的符號兩兩配對後，沒有重複的配對，稱為正交）可以造出一個魔術方陣。

將符號成數字後可得下面的結果：

1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

＋

2

0	6	3
6	3	0
3	0	6

＝

2	7	6
9	5	1
4	3	8

但是普通的拉丁方陣對角線常常沒有達到魔術方陣的要求，所以在構作魔術方陣時要留意對角線是否符合我們的要求。

3.拉丁方陣的延伸：

在上面的結果中，無論是由楊輝或是達拉盧庇的方法都有對角線的困擾，如果我們將其修正為更完美的“對角線拉丁方陣”，對角線的問題便可輕鬆的迎刃而解。

若能找到一對正交的對角線拉丁方陣魔術方陣的製作便更加容易了。只要將數字依照字母代換入方陣中便可造出。

a	b	c	d
d	c	b	a
b	a	d	c
c	d	a	b

4.正交方陣對的推廣：

依照魔術方陣的定義，只有要求各行各列各對角線的和相等，所以我們只要找到兩個符合各行各列各對角線相等條件的正交方陣，也可以造出魔術方陣。

以下是電腦的測試例子（程式於附錄）：

1	3	4	2
4	3	2	1
1	2	3	4
4	2	1	3

＋

0	0	12	12
4	12	0	8
12	4	8	0
8	8	4	4

＝

1	3	16	14
8	15	2	9
13	6	11	4
12	10	5	7

5.鬼幻方與鬼拉丁方陣：

鬼幻方除了具有魔術方陣的性質之外，還具有截斷對角線之和相同的性質。若我們以特殊的正交鬼拉丁方陣對來構做幻方，便可以造出特殊的鬼幻方。下邊是一個鬼幻方的例子。

依樣的，鬼幻方的製作除了以鬼拉丁方陣來構做外，也可以用其他的鬼方陣來構做。

例：

6	3	16	9
15	10	5	4
1	8	11	14
12	13	2	7

(1)鬼拉丁方陣＋鬼拉丁方陣：

方陣一

1

1	4	3	2
3	2	1	4
2	3	4	1
4	1	2	3

＋

方陣二

2

0	4	8	12
12	8	4	0
4	0	12	8
8	12	0	4

＝

1	8	11	14
15	10	5	4
6	3	16	9
12	13	2	7

(2)鬼方陣＋鬼方陣：

1

1	4	1	4
2	3	2	3
4	1	4	1
3	2	3	2

＋

2

0	4	12	8
12	8	0	4
0	4	12	8
12	8	0	4

＝

1	8	13	12
14	11	2	7
4	5	16	9
15	10	3	6

6. 利用電腦的計算與分類，我們大致上可以將 **4** 階幻方依照組成的正交方陣分成如下：

方　　陣　　2

	分類	普通方陣	鬼方陣	拉丁方陣	對角線拉丁方陣	鬼拉丁方陣	鬼對角線拉丁方陣
方	普通方陣	3200 個	384 個	512 個	0 個	256 個	0 個
陣	鬼方陣	384 個	128 個	128 個	0 個	0 個	0 個
1	拉丁方陣	128 個	128 個	0 個	0 個	128 個	0 個

對角線拉丁方陣	0 個	0 個	0 個	512 個	0 個	256 個
鬼拉丁方陣	256 個	0 個	128 個	0 個	128 個	0 個
鬼對角線拉丁方陣	0 個	0 個	0 個	256 個	0 個	128 個

7.利用電腦對四階鬼幻方做分類，結果如下：

四階鬼幻方總數：384種

方　　陣　　2

	分類	普通方陣	鬼方陣	拉丁方陣	對角線拉丁方陣	鬼拉丁方陣	鬼對角線拉丁方陣
方陣1	普通方陣	0 個	0 個	0 個	0 個	0 個	0 個
	鬼方陣	0 個	128 個	0 個	0 個	0 個	0 個
	拉丁方陣	0 個	0 個	0 個	0 個	0 個	0 個
	對角線拉丁方陣	0 個	0 個	0 個	0 個	0 個	0 個
	鬼拉丁方陣	0 個	0 個	0 個	0 個	128 個	0 個
	鬼對角線拉丁方陣	0 個	0 個	0 個	0 個	0 個	128 個

表中的鬼方陣＋鬼方陣、鬼拉丁方陣＋鬼拉丁方陣、鬼對角線拉丁方陣＋鬼對角線拉丁方陣，所造出的幻方都是屬於鬼幻方。而其他的組合方法，都沒有辦法得到鬼幻方。

利用這種關係，以電腦計算可以得出五階鬼對角線拉丁方陣＋鬼對角線拉丁方陣型的結果，可以大概了解鬼方陣增加的情形。

五階鬼對角線拉丁方陣數目：240個

五階正交鬼對角線拉丁方陣對數：14400對

可得：

鬼方陣（對角線拉丁方陣型）數目＝14400 * 2!＝28800種

㈣多次元之魔術方陣

1.若將魔術方陣的定義推廣，我們可以定義出多次元的魔術方陣。魔術方陣的定義為各行各列各對角線的數字和都相等。若我們改變這種文字敘述的

方式以座標的方式來代表，可以表爲：

S11＝(1,1)＋(1,2)＋(1,3)＋......＋(1,n)
S12＝(2,1)＋(2,2)＋(2,3)＋......＋(2,n)
S13＝(3,1)＋(3,2)＋(3,3)＋......＋(3,n) 直行
· ＝ · ＋ · ＋ · ＋......＋ ·
S1n＝(n,1)＋(n,2)＋(n,3)＋......＋(n,n)

S21＝(1,1)＋(2,1)＋(3,1)＋......＋(n,1)
S22＝(1,2)＋(2,2)＋(3,2)＋......＋(n,2) 橫行
S23＝(1,3)＋(2,3)＋(3,3)＋......＋(n,3)
· ＝ · ＋ · ＋ · ＋......＋ ·
S2n＝(1,n)＋(2,n)＋(3,n)＋......＋(n,n)

S31＝(1,1)＋(2,2)＋(3,3)＋......＋(n,n) 對角線
S32＝(1,n)＋(2,n－1)＋(3,n－2)＋......＋(n,1)

S11＝S12＝S13＝.....＝S1n＝S21＝S22＝.....S2n＝S31＝S32

三次元或三次元以上的魔術方陣只要改變括弧內的元素數目即可得到類似的關係式。由這種方法我們可以訂出多次元魔術方陣的基本定義。

2.多次元魔術幻方之魔數：

設一m次元n階幻方

$$魔術=\frac{數字和}{數字列數}=\frac{n^m * (n^m+1)}{2 * n^(m-1)}=\frac{n(n^m+1)}{2}$$

3.三次元魔術方陣的數目及實例：

由 **1** 中的座標表示法中可以定義出魔術立方體的定義：

(1)各行各列各高之數字和相等

(2)大對角線之數字和相等

由 **2** 中推出的公式可以算出三階魔術立方體的魔數爲42。右邊便是利用電腦計所得到的一個三階魔術立方體。

01	23	18
15	07	20
26	12	04

17	03	22
19	14	09

06 25 11

24 16 02
08 21 13
10 05 27

經過電腦的計算，得知三階三次元魔術方陣的種數爲：192

（所有三次元三階魔術方陣皆列於附件中）

4.拉丁方陣的推廣：立體、多次元拉丁方陣

多次元拉丁方陣的定義爲每行每列每高中，各元素均出現一次。同樣的，我們可以利用這種原理，來造出魔術方陣。

下面是利用電腦計算出三個正交的三次元拉丁方陣，可以造出一個魔術立方體。

$$\begin{matrix}1&0&2\\0&2&1\\2&1&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}2&0&1\\1&2&0\\0&1&2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&2&3\\2&3&1\\3&1&2\end{matrix}\qquad\begin{matrix}16&02&24\\05&27&10\\21&13&08\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}0&2&1\\2&1&0\\1&0&2\end{matrix}\;+\;\begin{matrix}1&2&0\\0&1&2\\2&0&1\end{matrix}\;+\;\begin{matrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{matrix}\;=\;\begin{matrix}06&25&11\\19&14&09\\17&03&22\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}2&1&0\\1&0&2\\0&2&1\end{matrix}\qquad\begin{matrix}1&2&0\\2&0&1\\1&2&0\end{matrix}\qquad\begin{matrix}2&3&1\\3&1&2\\1&2&3\end{matrix}\qquad\begin{matrix}20&15&07\\18&01&23\\04&26&12\end{matrix}$$

$$*9\qquad\qquad *3\qquad\qquad *1$$

5.奇數階魔術方陣之普遍造法：

由前面平奇數階面幻方的探討中，我們分析了達拉盧庇的幻方造法的原理，發現是利用這種斜向的數字填法，造出由兩個正交拉丁方陣所構成的幻方。

下面的方法，是由楊輝的平面造法原理所推廣出來的。我們知道達拉盧庇利用斜向的填入順序，可以得到每一橫行均有一大寫字母之元素（如下圖）。

在碰到已填過字母的格子時，便往下一格，繼續填下去，這時小寫字母的排列便產生了一個位移，使得各直行、各直列之小寫字母也如斜向填入一

Db	Ed	Aa	Bc	Ce
Ec	Ae	Bb	Cd	Da
Ad	Ba	Cc	De	Eb
Be	Cb	Dd	Ea	Ac

般。

Ca	Dc	Ee	Ab	Bd

經過不斷的試驗，求出了一種類似於達拉盧庇的立體填入法。我將他取名爲「斜線填入法」。

定義 x 軸、 y 軸、 z 軸。

a.在最後一層的中間格填入 1

b.一般情況下的填法（沒有障礙物時）　　=>z－1, y＋1

c.當斜向填入發生阻礙時（已填過數字）　　=>x－1, y＋1

d.當b.、c.的填法都無法填入數字時（都有障礙物）=>y－1

例：以五階魔術立方體爲例：

以公式算出：

$$魔術=\frac{n(n^m+1)}{2}$$

$$=\frac{5(5^3+1)}{2}$$

$$=315$$

78	66	34	22	115
71	39	2	120	83
44	7	125	88	51
12	105	93	56	49
110	98	61	29	17

72	40	3	116	84
45	8	121	89	52
13	101	94	57	50
106	99	62	30	18
79	67	35	23	111

41	9	122	90	53
14	102	95	58	46
107	100	63	26	19
80	68	31	24	112
73	36	4	117	85

15	103	91	59	47
108	96	64	27	20
76	69	32	25	113
74	37	5	118	81
42	10	123	86	54

109	97	65	28	16
77	70	33	21	114
75	38	1	119	82
43	6	124	87	55
11	104	92	60	48

6.同樣的，我們也可以利用前面所發現的攪拌法來構作立體的幻方　*是指對調的行或列

	* *				* *	
1 2 3 4	1 14 15 4	1 14 15 4	1 14 15 4	1 14 15 4	1 62 63 4	1 62 63 4
5 6 7 8	5 10 11 8	8 11 10 5*	56 59 58 53*	56 59 58 53	56 11 10 53	56 11 10 53
9 10 11 12	9 6 7 12	12 7 6 9*	60 55 54 57*	60 55 54 57	60 7 6 57	60 7 6 57
13 14 15 16	13 2 3 16	13 2 3 16	13 2 3 16	13 2 3 16	13 50 51 16	13 50 51 16

17 18 19 20	17 30 31 20	17 30 31 20	17 30 31 20	29 18 19 32	29 34 35 32	32 35 34 29
21 22 23 24	21 26 27 24	24 27 26 21	40 43 42 37	44 39 38 41	44 23 22 41	41 22 23 44
25 26 27 28	25 22 23 28	28 23 22 25	44 39 38 41	40 43 42 37	40 27 26 37	37 26 27 40
29 30 31 32	29 18 19 32	29 18 19 32	29 18 19 32	17 30 31 20	17 46 47 20	20 47 46 17
					*	*

33 34 35 36	33 46 47 36	33 46 47 36	33 46 47 36	45 34 35 48	45 18 19 48	48 19 18 45
37 38 39 40	37 42 43 40	40 43 42 37	24 27 26 21	28 23 22 25	28 39 38 25	25 38 39 28
41 42 43 44	41 38 39 44	44 39 38 41	28 23 22 25	24 27 26 21	24 43 42 21	21 42 43 24
45 46 47 48	45 34 35 48	45 34 35 48	45 34 35 48	33 46 47 36	33 30 31 36	36 31 30 33
					*	*

49 50 51 52	49 62 63 52	49 62 63 52	49 62 63 52	49 62 63 52	49 14 15 52	49 14 15 52
53 54 55 56	53 58 59 56	56 59 58 53	8 11 10 5	8 11 10 5	8 59 58 5	8 59 58 5
57 58 59 60	57 54 55 60	60 55 54 57	12 7 6 9	12 7 6 9	12 55 54 9	12 55 54 9
61 62 63 64	61 50 51 64	61 50 51 64	61 50 51 64	61 50 51 64	61 2 3 64	61 2 3 64
⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	⇒	

魔數為 130

㈤拉丁方陣觀念的再行推廣—應用於幻圓上

1.幻圓的定義：

幻圓是一種類似於幻方的陣列，具有下列的性質：

a.各對角線數字的和相等

b.圓上的數字和相等

2.幻圓的造法（正交拉丁圓）：

利用拉丁幻方的原則，我們可以構製兩個不同的圓形陣。

若我們要構造一個 n 階的幻圓，我們可以先造出下列的圓形陣：

a.各對角線各圓上元素各出現一次的圓形陣一個（拉丁圓）

b.各對角線各圓上元素各出現兩次的圓形陣一個（次拉丁圓）

以下是一個 4 階幻圓的構造實例：

c　　b　　B　　A　　Bc　　Ab

a c　＋　A A　＝　Aa Ac

d b　　　B B　　　Bd Bb

a　　d　　B　　B　　Ba　　Ad

以數字代入（A,B）＝0,4　(a,b,c,d)＝1,2,3,4可得

7　　　2

1　3　　魔數為18

8　6

5　　　4

㈥反幻方的造法、數量：

1. 反幻方的造法奇數、偶數都有一些特殊的造法，因為反幻方的數量很多所以造法並不侷限於下面的方法，以三階反幻方為例，隨意書寫方陣出現反幻方的機率大約為7％，所以很容易就能找出新的反幻方。

(1)偶數階反幻方的造法，可以利用自然方陣來修改。

1	2	3	…	n	→ $n(n+1)/2$
$n+1$	$n+2$	$n+3$	…	$2n$	→ $n(n+1)/2+n*n$
⋮	⋮	⋮		⋮	
$(n-1)*n+1$	$(n-1)*n+2$	$(n-1)*n+3$	…	$n*n$	→ $n(n+1)/2+(n-1)*n*n$
↑	↑	↑		↑	
$n+n^2(n-1)/2$	$2n+n^2(n-1)/2$	$3n+n^2(n-1)/2$		$n*n+n^2(n-1)/2$	

由方陣中可以發現各橫行的總和為等差級數，公差為$n*n$

各縱列的總和為等差級數，公差為n

所以可以知道各行的總和不同、各列的總和不同

即　$an+n^2(n-1)/2=(b-1)n^2+n(n+1)/2$

→　$a+n(n-1)/2=(b-1)n+(n+1)/2$

→　$a-(b-1)n=(n+1)/2-n(n-1)/2$

$$\underbrace{(n+1)/2-n(n-1)/2}_{\text{必為整數}}$$

因為a、b、n為整數，所以當n為偶數時，a、b無解，可得知當方陣為偶數階時各橫行和各直列的總合不相等。

但由方陣中可以發現兩個對角線的總和都相等，若選擇一個對角線上的、數字和旁邊的數字（不可在對角線上）交換則可調整使方陣中的所有橫行、直列、對角線的總和都不相同。

以下是一個例子：

由圖中可知各行、各列、各對角線的和都不相同

	1	6	3	4	← 14
	5	2	7	8	← 22
	9	10	11	12	← 42
	13	14	15	16	← 58
↗	↑	↑	↑	↑	↖
34	28	32	36	40	30

2.反幻方的數量：

以電腦測試結果如下：

二階反幻方零個

三階反幻方24960個

四階反幻方＞2200000個

以電腦分類三階反幻方發現皆爲普通方陣組成，其他的組合都沒有反幻方出現

六、結　論

(一)由電腦測試的結果知道，二階幻方不存在，當階數由三階增至四階時，幻方個數由8個增至7040個，可見幻方數目增加得十分快速。

(二) 1.由楊輝與達拉盧庇法可以得到兩對正交的拉丁方陣，可以推出許多不同的魔術方陣。但是仍然受到對角線的限制，若我們改以正交對角線拉丁方陣構做，應該可以產生更多種幻方。

2.由偶數階自然方陣中各行各列之和成等差的關係，可以利用行與行、列與列（對稱於中心軸）的互換而造出幻方。

3.利用發現的混合法可以造出四倍階數的幻方，並估計可造出的總種數。

4.利用幻方組合成新幻方的方法，可以造出許多不同的幻方，也可以了解高階幻方的數目實在是非常的多。

(三)在四階方陣的分析中，可以得知：

1.四階方陣中的鬼幻方必定是由相同性質的鬼方陣所構成的。如鬼方陣＋鬼方陣、鬼拉丁方陣＋鬼拉丁方陣、鬼對角線拉丁方陣＋鬼對角線拉丁方陣，所造出的幻方都是屬於鬼幻方。而其他的組合方法，都沒有鬼幻方出現。

2.一對正交的方陣（具有各行各列各對角線和相同性質者）可以造出2!種不同的幻方。若是應用到三次元空間中，三個正交的方陣應該也可以造出3!種不同的立體幻方。

3.利用對五階鬼對角線拉丁方陣正交對數的測試，可以得到對角線拉丁方陣型鬼方陣數目＝144000 * 2!＝28800種

㈣多次元幻方的討論：

1.應用電腦的計算，得到三次元三階魔術方陣的數量共為192種。

2.以達拉盧庇法為靈感，經過不斷的嚐試後，得到三次元奇數階方陣的普遍造法。

3.將平面上所發現的混合法加以應用推廣，可以得到三次元四倍數階的幻方普遍造法。

4.推廣拉丁方陣到三次元空間上，並利用電腦來尋找正交立體拉丁方陣對，也獲得了成功。

㈤拉丁方陣原理的再行推廣：應用到幻圓上

利用拉丁方陣的原則構作拉丁圓，若以成對的正交拉丁圓來製造幻圓，依樣也可以得到很好的結果。

㈥反幻方：

1.得到簡單的普遍造法，直接將幾乎為反幻方的自然方陣加以修改即可得之。

2.由電腦測試結果知道，反幻方的數量遠比幻方多，四階的反幻方數目竟然高於 2000000種。

七、參考資料

㈠1,2,3....以外一數學奇趣錄　作者：蕭文強　書林出版有限公司。

㈡寓數學於遊戲　第一輯　作者：趙文敏　九章出版社。

㈢趣味數學365　作者：任現淼　北京廣播學院出版社。

㈣趣味數學問題集　譯者：張良杰、游耿能　凡異出版社。

㈤中學生數學　教學參考　1995.8。

㈥中學生數學123　1991。

㈦神祕有趣的數學　譯者：孫文先

㈧數學遊戲　凡異出版社。

㈨數學樂園之茅塞頓開　Brian Bolt著　林傑斌　譯。

評　語

幻方是通俗數學的常見題材，也因此常成爲科展的常見題目，但因爲幻方很少能做較有數學味道的處理，因此對評審來說有點頭痛。本作品對幻方做了很有效的整理，包括生成方法以及分類。並提出圓幻方和立體幻方的案例，是此類少見的好作品。幻方通常也不是數學研究的主流，但因爲古人對幻方賦予一種神秘性，因而突顯它的形象。