四面體內共點線及共線點的研究
（原為：四面體內直線共點之性質與應用）

高中組數學科第三名

省立台南第一高級中學　　作　　者：梁東尼、謝書維、劉育廷、莊育權
指導教師：朱國頌

一、研究動機

以前在解題時，常用到塞瓦定理及孟氏定理等平面三角形中的定理，因而對四面體也產生興趣，因為塞瓦及孟氏定理都是把〝共點〞這種不易使用和想像的條件換到〝線段的乘積〞這種易於利用和理解的條件，因此我們便想研究是否四面體也有類似性質。

二、研究目的

找出在四面體中類似塞瓦定理及孟氏定理的一些性質與應用。

三、研究過程

我們先看幾個楔子，這些楔子將會應用在所發現的性質中，最後是這些性質的應用。

四、研究結果

(一)楔子

楔子1.

若ABCA'為四面體，D為內部一點，平面BCD交直線$\overline{AA'}$於O，則

$$\frac{\text{四面體}ABCD}{\text{四面體}A'BCD}=\frac{\overline{AO}}{\overline{A'O}}\text{。（圖一）}$$

楔子2.

(1)若ABCD為四面體，△ACE為△ABC、△ACD兩面之平分面（以後稱為兩面角平分面），E在$\overline{BD}$上，則△ABC：△ACD＝△BCE：△CDE＝△ABE：△ADE＝$\overline{BE}$：$\overline{DE}$

(2)△ABC和△BCD之兩面角平分面與△ABC和△ACD之兩面角平分面與△

ACD和△BCD之兩面角平分面會交於一直線，稱之為〝三面平分線〞。（圖二）

楔子3.

令ABCD為四面體且E、H、G、F分別為$\overline{AD}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$、$\overline{BD}$上的點，則$\overline{EG}$和$\overline{FH}$有交點的充分條件為$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}\times\frac{\overline{AH}}{\overline{CH}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{BG}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{DF}}=1$…（＊），且$\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}\geqq\frac{\overline{CH}}{\overline{AH}}$；必要條件為條件（＊）。（圖三、圖四）

楔子4.

令ABCD為四面體，J、K分為△BCD和△ABD上二點，若且唯若$\overline{AJ}$、$\overline{CK}$相交、則$\frac{aceg}{bdfh}=1$。（$\overline{DJ}$與$\overline{BC}$交於E點，$\overline{BJ}$與$\overline{CD}$交於F點，$\overline{BK}$與$\overline{AD}$交於G點，$\overline{DK}$與$\overline{AB}$交於H點，令$\overline{BE}=a$，$\overline{CE}=b$，$\overline{CF}=c$，$\overline{DF}=d$，$\overline{DG}=e$，$\overline{AG}=f$，$\overline{AH}=g$，$\overline{BH}=h$)（圖五）

楔子5.

△ABC中，若D在$\overline{AB}$上，E在$\overline{AC}$上，$\overline{BE}$和$\overline{CD}$交於F，$\overline{AF}$和$\overline{DE}$交於G，則$\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\times\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}\times\frac{\overline{DG}}{\overline{EG}}=1$（令$\overline{AE}=a$，$\overline{CE}=b$，$\overline{AD}=c$，$\overline{BD}=d$，$\overline{DG}=e$，$\overline{EG}=f$)註：(此為塞瓦定理的推廣)。（圖六）

楔子6.

空間中兩△ACD、△ABC，點E、F分別在$\overline{CD}$、$\overline{BC}$上，點G、H分別在$\overline{AE}$、$\overline{AF}$上，$\overline{DG}$交$\overline{AC}$於N，$\overline{BH}$交$\overline{AC}$於N'，則N＝N' $\Longleftrightarrow$ $\frac{\overline{DG}}{\overline{GN}}\times\frac{\overline{HN'}}{\overline{BH}}\times\frac{\overline{BF}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{DE}}=1$。（圖七）

㈡四面體內直線共點性質的探討

1.討論$\overline{AJ}$、$\overline{BL}$、$\overline{CK}$、$\overline{DI}$之關係

設ABCD為四面體，I、J、K、L、分別為△ABC、△BCD、△ABD、△ACD面上的點，$\overline{DJ}$交$\overline{BC}$於E，$\overline{BJ}$交$\overline{CD}$於F，$\overline{BK}$交$\overline{AD}$於G．$\overline{DK}$交$\overline{AB}$於H。(令$\overline{BE}=a$，$\overline{CE}=b$，$\overline{CF}=c$，$\overline{DF}=d$，$\overline{DG}=e$，$\overline{AG}=f$，$\overline{AH}=g$，$\overline{BH}=h$)則$\overline{AJ}$、$\overline{CK}$、$\overline{DI}$、$\overline{BL}$交於一點之充要條件為不失一般性取$\overline{AJ}$、$\overline{CK}$交於一點，即$\frac{aceg}{bdfh}=1$(由楔子4.)，而I、L分別在$\overline{AE}$、$\overline{CH}$和$\overline{CG}$、$\overline{AF}$之交點上。（圖八）

2.若$\overline{AJ}$與$\overline{CK}$交於O點，$\overleftrightarrow{DJ}$交$\overline{BC}$於E，$\overleftrightarrow{BJ}$交$\overline{CD}$於F，$\overleftrightarrow{BK}$交$\overline{AD}$於G，$\overleftrightarrow{DK}$交$\overline{AB}$於H，I為$\overline{AE}$、$\overline{CH}$交點，L為$\overline{CG}$、$\overline{AF}$交點，又$\overleftrightarrow{BI}$交 $\overline{AC}$ 於M，$\overleftrightarrow{CJ}$交$\overline{BD}$於N，則$\overline{EG}$、$\overline{FH}$、$\overline{MN}$

三線共點O。(令 $\overline{BE}=a$，$\overline{CE}=b$，$\overline{CF}=c$，$\overline{DF}=d$，$\overline{DG}=e$，$\overline{AG}=f$，$\overline{AH}=g$，$\overline{BH}=h$，$\overline{BN}=i$，$\overline{DN}=j$，$\overline{AM}=x$，$\overline{CM}=y$)（圖九）

結論：配合楔子3.我們也可得到如下結論：$\overline{EG}$、$\overline{FH}$、$\overline{MN}$交於一點之充要條件為 $\frac{aceg}{bdfh}=1$ ，且 $\frac{biex}{ajfy}=1$，且 $\frac{cjhx}{digy}=1$ 。

前面我們是討論O點(即$\overline{AJ}$、$\overline{BL}$、$\overline{CK}$、$\overline{DI}$交點)在四面體內部，即類似塞瓦定理的性質，若O點在四面體外，即類似塞瓦定理的推廣(楔子5.)。很顯然，I、J、K、L必有一點在四面體一平面上，另三點在此平面同側。

3.ABCD為四面體，不失一般性設點I、J、K分別在平面ABC、BCD、ABD上，點L在△ACD內，$\overline{DJ}$交$\overline{BC}$於E點，$\overleftrightarrow{DK}$交$\overleftrightarrow{AB}$於H點，$\overleftrightarrow{BJ}$交$\overleftrightarrow{CD}$於F點，$\overleftrightarrow{BK}$交$\overleftrightarrow{AD}$於G點。$\overline{AJ}$、$\overline{BL}$、$\overline{CK}$、$\overline{DI}$四線段任取其二令其有交點O不失一般性取$\overline{AJ}$與$\overline{CK}$交於O點，則有以下結論：

點I、L分別是$\overline{CH}$與$\overline{AE}$、$\overline{AF}$與$\overline{CG}$之交點

$\Longleftrightarrow$ $\overline{AJ}$、$\overline{BL}$、$\overline{CK}$、$\overline{DI}$交於一點O（圖十）

以上是四面體中類似塞瓦定理及其推廣的性質，接著我們就聯想到是否四面體中也有類似孟氏定理的性質。

(三)四面體中點共線的性質的探討

1.四面體ABCD，點E在△ABD內，點F在△ABC內，G在$\overleftrightarrow{CD}$上，令$\overline{DE}$、$\overline{CF}$交於N在$\overline{AB}$上，設$\overline{DI}$與$\overline{CH}$交於K，$\overline{BK}$交$\overline{CD}$於J，則點E、F、G共線 $\Longleftrightarrow \frac{\overline{DJ}}{\overline{CJ}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{DG}}=1$

（若$\overline{DE}$、$\overline{CF}$不相交，則點F就不在平面DEG上，自然E、F、G不共線）。（圖十一）

有趣的是若從證明(1)中的(＊)式與 $\frac{\overline{DE}}{\overline{EN}}\times\frac{\overline{FN}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{CD}}=1$，會得到 $\frac{\overline{BI}}{\overline{CI}}\times\frac{\overline{DH}}{\overline{BH}}\times\frac{\overline{CG}}{\overline{CD}}=1$，即H、I、G會共線。另外，我們也發現若連$\overline{DF}$、$\overline{CE}$交於M，則N、M、J共線且A、M、K也共線，以下是證明與相關的一些性質。

2.△BEG與△CEG為空間中二平面，A在$\overleftrightarrow{BC}$上，H、D、I、K分別為$\overline{CG}$、$\overline{CE}$、$\overline{BE}$、$\overline{BG}$上的點，$\overline{GI}$、$\overline{EK}$交於J，$\overline{DG}$、$\overline{EH}$交於L，$\overline{BJ}$交$\overline{EG}$於F，則點A、K、H共線且點A、I、D分別共線 $\Longleftrightarrow$ 點A、J、L共線且點C、L、F共線。(圖十二)

由上可知，四面體確實也有類似孟氏定理這種把〝點共線〞轉換成〝比例乘積為1〞的性質，而把抽象的概念換成代數關係正是我們主要的目標，接下來，我們來看這些性質的運用。

(四)應用

1.四面體四個面之重心與對應頂點連線交點(四面體重心)

(1)ABCD為四面體，G_1、G_2、G_3、G_4分別為△BCD、△ACD、△ABD、△ABC之重心，則$\overline{AG_1}$、$\overline{BG_2}$、$\overline{CG_3}$、$\overline{DG_4}$交於一點。

(2)若ABCD為四面體，且點E、F、G、H、M、N分別在$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$、$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BD}$上，J、L、K、I為△BCD、△ACD、△ABD、△ABC之重心，則$\overline{AJ}$、$\overline{CK}$、$\overline{DI}$、$\overline{BL}$交於一點。

(3)事實上，我們若配合第11頁3.之結論，又可得三對不相鄰兩稜線中點的連線交於 O且互相平分。

(4)ㄅ、四面體與此四面體各面之重心所構成的小四面體的重心重合。

ㄆ、承上述，四面體與小四面體中，任意歪斜兩稜之中點連線會交於一點，且此兩點與重心重合。（圖十三）

2.四面體之內心（與四面相切之球的球心）

△ABD、△BCD、△ACD有一條三面平分線，令其與△ABC交點為I。

同理，令$\overline{AJ}$為△ABC、△ABD、△ACD三面平分線，$\overline{BL}$為△ABD、△BCD、△ABC三面平分線，$\overline{CK}$為△BCD、△ABC、△ACD三面平分線，J、L、K分別在△BCD、△ACD、△ABD上，$\overleftrightarrow{DJ}$交$\overline{BC}$於E點，$\overleftrightarrow{BJ}$交$\overline{CD}$於F點，$\overleftrightarrow{BI}$交$\overline{AC}$於M點，$\overleftrightarrow{DK}$交$\overline{AB}$於H點，$\overleftrightarrow{BK}$交$\overline{AD}$於G點，$\overleftrightarrow{CJ}$交$\overline{BD}$於N點，則$\overline{AJ}$、$\overline{CK}$、$\overline{DI}$、$\overline{BL}$、$\overline{MN}$、$\overline{EG}$、$\overline{FH}$交於一點。

3.(1)四面體ABCD中的六個稜線框架上，可以"塞"入一個"內切球"（註：不同於前面的內切球)，設此球與各框架$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$、$\overline{AD}$依次切於E、F、G、H、I、J，令$\overline{AF}$、$\overline{CE}$、$\overline{BG}$交點為K_1，$\overline{AI}$、$\overline{CJ}$、$\overline{DG}$交點為K_2，$\overline{DE}$、$\overline{BJ}$交點為K_3，$\overline{DF}$、$\overline{BI}$交點為K_4，則$\overline{DK_1}$、$\overline{BK_2}$、$\overline{CK_3}$、$\overline{AK_4}$、$\overline{EI}$、$\overline{FJ}$、$\overline{GH}$交於一點。（圖十四）

而我們找到了四面體六稜線內塞一球的充要條件，證明如下。

(2)四面體ABCD，P_1、P_2是△BCD、△ACD之內心，並分別對其所在△的三邊作垂線，垂足分別是N_1、N_2、N_3與M_1、M_2、M_3，則此四面體六稜內塞一球＜＝＞不失一般性取$M_3=N_3$且$\overline{BN_1}+\overline{AM_1}=\overline{AB}$。（圖十五）

4.完成上述幾項應用探討後，我們又發現了幾個相關性質，不過時間緊迫，下列四項結論，是我們在交件之前和時間競賽的結果，雖然都已完成證明，但來不及一併送交打字，只好先列結論及部分性質的證明。

(1)一個四面體的各邊(三角形)的九點圓是共球面的

(註：空間上任意不共面的兩圓若交於相異兩點，則這兩個圓必可決定

一個球面)

(2)若四面體的任意兩歪斜線的方向向量互相垂直，則四個三角形旳垂心與其對頂點的四條連線共點。

(3)過四面體各面的外心而垂直於各平面的直線，會交於一點，此點即爲四面體的外接球球心。

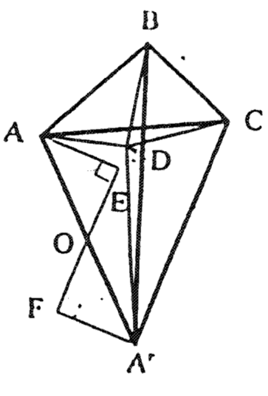
(4)四面體還有四個"傍切球"在四面體外部，與一個平面外切，而與另三個平面內切。

五、改進與展望

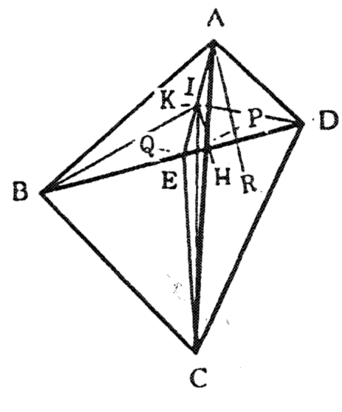
其實我們還可將上述結論應用在檢驗四面體各個平面(包含四面體外)，與其相對頂點之連線是否會共點，以及檢驗通過任兩不相交稜線所構成二直線的四條直線是否共點，或者共點所產生的性質，而四面體又是多面體之基礎，因此這對我們以後遇到共點問題會有莫大助益，我們確實把"共點"這不易運用之條件轉換爲"線段乘積"這種易於利用之條件，而我們希望日後再將其應用推廣到多面體，甚至推廣到多面體和圓、球中線點的關係。

六、參考資料

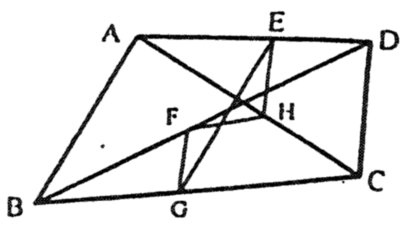
1.高中基礎數學第三冊第一章，國立編譯館。



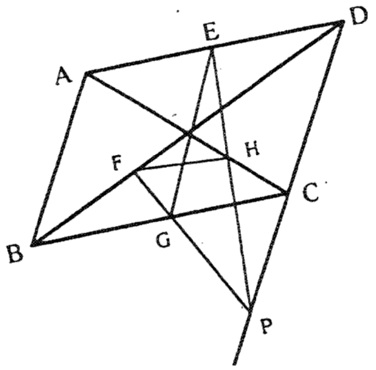
圖一



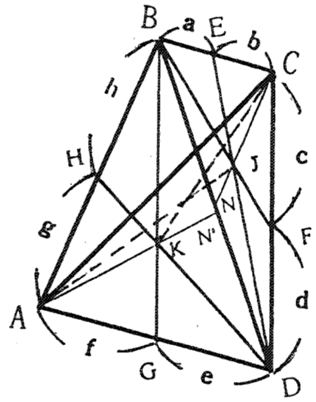
圖二



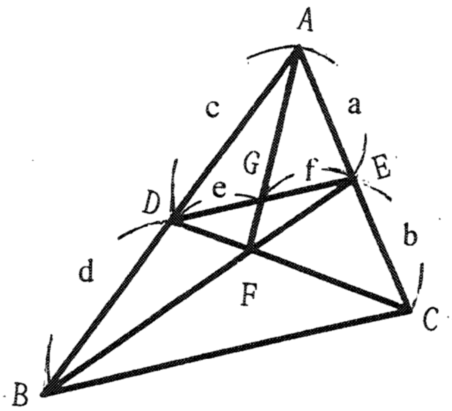
圖三



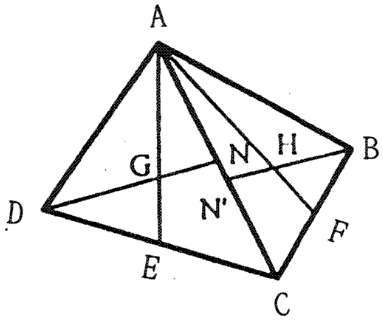
圖四



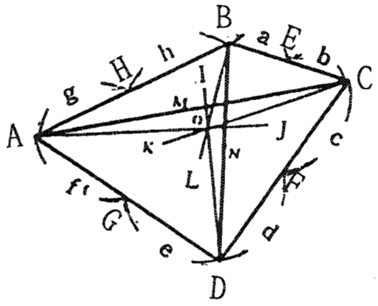
圖五



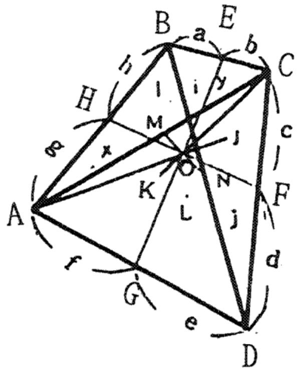
圖六



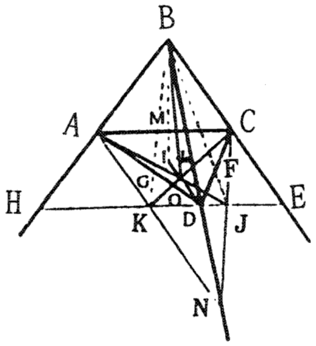
圖七



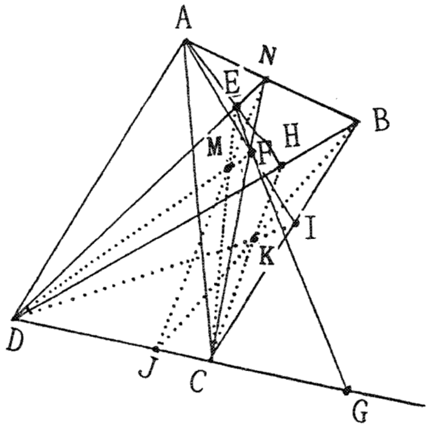
圖八



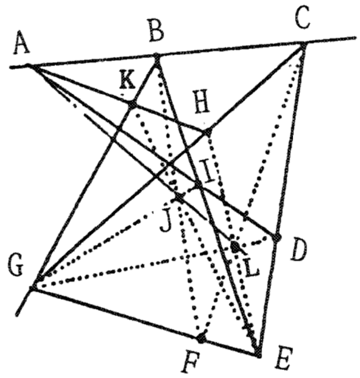
圖九



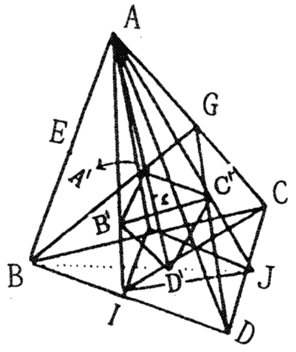
圖十



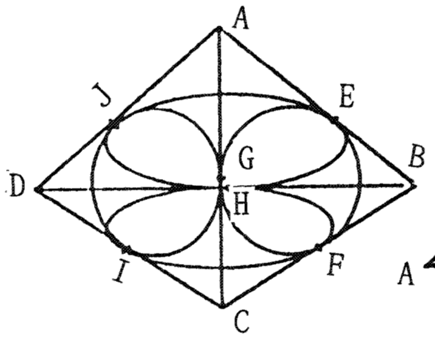
圖十一



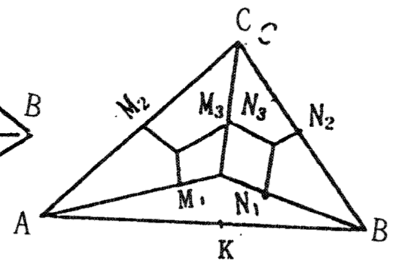
圖十二



圖十三



圖十四



圖十五

評　語

本作品屬立體幾何的範圍，將平面幾何中共點共線之塞瓦定理、孟氏定理延伸到四面體，旨在找出四面體中類似之塞氏及孟氏定理之一些有用性質與相關應用；研究過程完整，思考程序亦佳，且有其進一步推廣之可能性；惟在參考資料之引用欠完整，有待更進一步補強。