# 如何在三角形內找一個含給定角且具有最小面積的內接三角形？

## 高中組數學科第二名

臺灣省立新竹高中

作　　者：曾兆廷、李維善

指導教師：許燦煌

## 一、研究動機

過去曾碰到「正方形的內接正三角形」這樣的問題，基於好奇心，便對三角形之內接三角形產生濃厚的興趣，於是開始著手研究。我們的目的是在任意三角形的一邊上取一點，由這點出發，做出此三角形的內接三角形，並求出所有同類型的相似內接三角形之最小面積。

## 二、研究內容

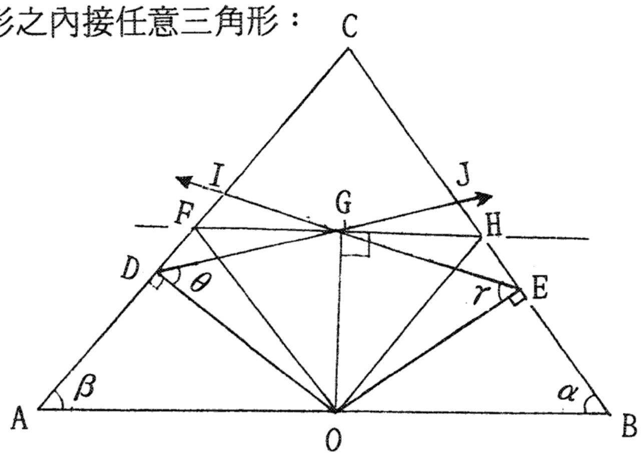
㈠定義：在我們的研究內容中，為了配合我們的研究，我們以兩個條件定義內接三角形。

1.內接三角形的三頂點需分別在原三角形的三邊上。

2.內接三角形的任一邊和原三角形的任一邊不重合。

㈡任意三角形之內接任意三角形之探討：

1.如何做出任意三角形之內接任意三角形：




圖一

(1)作法：參考圖一

a.在$\overline{AB}$上取一點O

b.過O作$\overline{OD}$垂直$\overline{AC}$於D、$\overline{OE}$垂直$\overline{BC}$於E c.過D、E作$\overrightarrow{DJ}$、$\overrightarrow{EI}$分別與$\overline{BC}$、$\overline{AC}$交於J、I二點，且$\angle JDO=\theta$，$\angle IEO=\gamma$，$\overline{DJ}$、$\overline{EI}$交於G

d.連接O、G，過G作$\overleftrightarrow{FH}$垂直$\overline{OG}$且交$\overline{AC}$、$\overline{BC}$於F、H

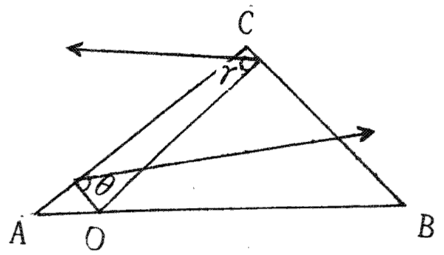
e.連接$\overline{OF}$、$\overline{OH}$，則$\triangle OFH$即爲一以$\theta$、$\gamma$、$\pi-\theta-\gamma$爲三內角的內接三角形

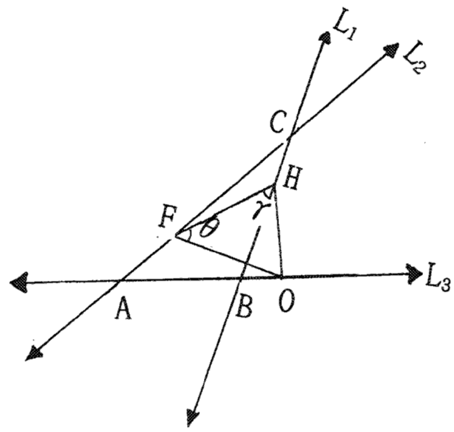
(2)證明：參考圖一

a.在四邊形OGHE中，因$\angle OGH=\angle OEH=\dfrac{\pi}{2}$ => $\angle OGH$與$\angle OEH$互補 => O、G、H、E四點共圓 => $\angle OEG=\angle OHG=\gamma$

b.同理，O、G、F、D亦四點共圓 => $\angle ODG=\angle OFG=\theta$

c.故$\triangle OFH$即爲一以$\theta$、$\gamma$、$\pi-\theta-\gamma$爲三內角的內接三角形



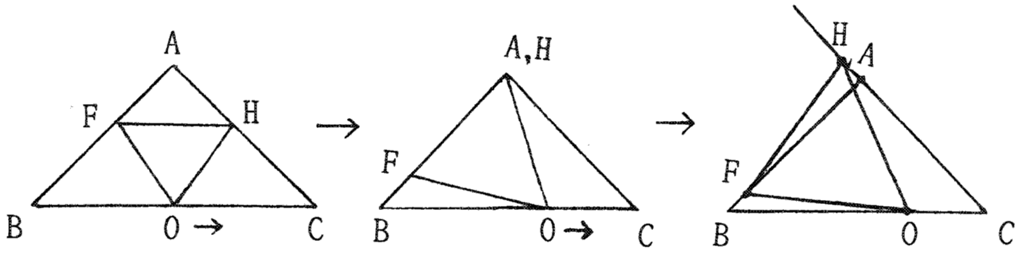

圖二

利用上面的作法，我們原本認爲，在三角形的一邊上任取一點，即可做出三角形的內接任意三角形，但是否任意取一點皆可以做出這樣的三角形呢？答案是否定的。如圖二的O點，雖利用(1)的作用，但仍然畫不出三角形的內接任意三角形。既然如此，那麼合理的O點就會有範圍。在討論範圍之前，我們要先說明一個概念，就是我們的作法不僅在三角形內成立，即使是在平面上三條兩兩相交的直線上亦成立，意思是說，在平面上三條兩兩相交的直線中（此三條直線圍成一三角形）任一直線上取一點，利用我們的作法，即可做出一含給定內角的任意三角形，使得這個三角形的三個頂點分別在三直線上，且在三直線上任取一點皆可以做出來，無範圍的限制（圖形如上）。圖二只因爲被限定必須是符合我們定義的三角形的內接三角形，故曰其做不出來，實際上它做得出來，只是頂點會在原三角形三邊的延伸線上，故不符合我們的定義。也就是說，既然限定要畫出三角形內含給定角的內接任意三角形，並不是在原三角形的任一邊上隨意取一點都可以畫得出，而是要在

邊上某特定的範圍內取點才可做得出來。接下來我們將討論其範圍。

㈢範圍論：

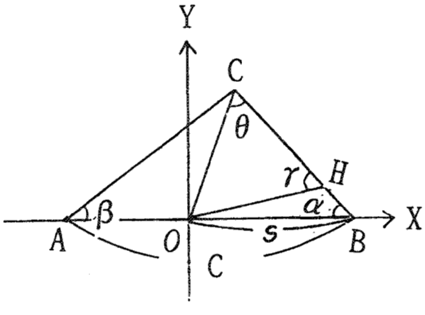
我們發現在任意三角形的任一邊上隨便取一點並不一定能做出內接三角形，我們便假設三角形之內接三角形的三個頂點在原任意三角形的各邊上皆有其範圍，而我們將利用「極限三角形」來求出其範圍。




圖三

如圖三，假設由O點可以做出△ABC的內接三角形，則將O點沿$\overline{BC}$邊向C點緩緩移動，一邊移動一邊由O點做三角形的內接三角形，當移動到做出的內接三角形（即△OFH）的一邊（或以上）恰與△ABC的一邊（或以上）重合時，若O點再往右移，則做出來的三角形其頂點就會跑出去而不在△ABC的邊上了（會在原三角形三邊的延伸線上），此時的△OFH我們稱之爲「極限三角形」，而此時的O點我們則稱之爲$\overline{BC}$上的「向C極限點」。同樣地，將O點沿$\overline{BC}$邊向B點移動，亦可以得到另一個極限三角形，此時的O點我們稱之爲$\overline{BC}$上的「向B極限點」。二極限點中間的線段即是O點在$\overline{BC}$的範圍，但二極限點不包括在內，因極限三角形並不符合我們所定義的內接三角形，而我們稱此範圍爲$R_{\overline{BC}}$。我們發現，任何一個三角形都只有兩個極限三角形，這兩個極限三角形的六個頂點決定了內接三角形的三個角頂點在△ABC三邊的範圍。極限三角形的位置和△ABC的三個內角角度有直接的關聯，我們現在將其位置和內接正三角形三個頂點的範圍分類如下，並請參考圖四。

§今討論內接三角形頂點在$\overline{AB}$上的向A極限點：




圖四－1

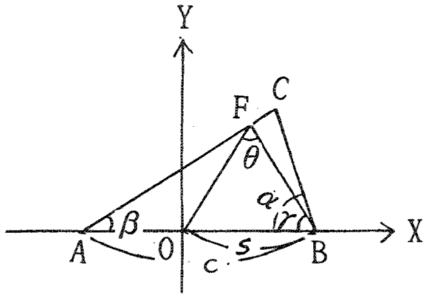
1.“∠B＜γ，∠C＞θ”（圖四-1）

$\angle ACB = \pi - \alpha - \beta$，$\angle BOC = \pi - \alpha - \theta$

$$\frac{\overline{BC}}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} \Rightarrow BC = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\alpha-\beta)}\, c$$

$$\frac{s}{\sin\theta} = \frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-\alpha-\theta)} \Rightarrow s = \frac{\sin\theta}{\sin(\pi-\alpha-\theta)}\overline{BC}$$

$$= \frac{\sin\beta\sin\theta}{\sin(\pi-\alpha-\beta)\sin(\pi-\alpha-\theta)}\, c$$




圖四－2

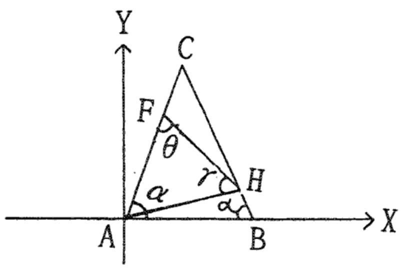
2. "$\angle A < \pi - \theta - \gamma$，$\angle B > \gamma$" （圖四－2）

$\angle AFB = \pi - \beta - \gamma$，$\angle BOF = \pi - \theta - \gamma$

$$\frac{\overline{BF}}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin(\pi-\beta-\gamma)} \Rightarrow \overline{BF} = \frac{\sin\beta}{\sin(\pi-\beta-\gamma)}\, c$$

$$\frac{s}{\sin\theta} = \frac{\overline{BF}}{\sin(\pi-\theta-\gamma)} \Rightarrow s = \frac{\sin\theta}{\sin(\pi-\theta-\gamma)}\overline{BF}$$

$$= \frac{\sin\beta\sin\theta}{\sin(\pi-\beta-\gamma)\sin(\pi-\theta-\gamma)}\, c$$




圖四－3

3. “∠A＜$\pi-\theta-\gamma$，∠C＜$\theta$”（圖四－3）

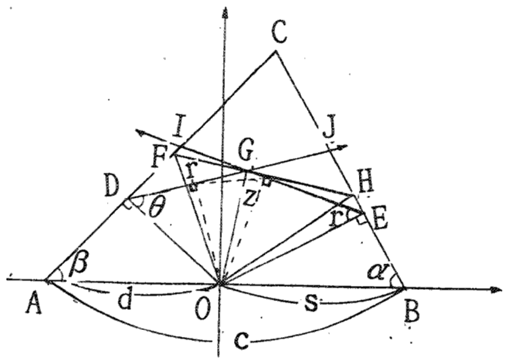
$s=c$

※這裡只求向A極限點，向B極限點的求法亦同。

以上三例，皆是觀察角度，畫出極限三角形，再加以判斷範圍。藉著求出s，我們便可知道向A極限點在$\overline{AB}$上的位置，進而求出範圍。

(四)內接任意三角形之最小面積：

接下來，我們將導出所有同類的內接任意三角形中之最小面積。




圖五

如圖五，今考慮$\overleftrightarrow{EI}$、$\overleftrightarrow{DJ}$之法線方程式：

$\overleftrightarrow{EI}$之法角為$\pi-\alpha-\gamma$，$\overleftrightarrow{DJ}$之法角為$\beta+\theta$

$\overleftrightarrow{EI}$：$x\cos(\pi-\alpha-\gamma)+y\sin(\pi-\alpha-\gamma)-s\sin\alpha\sin\gamma=0$

$\overleftrightarrow{DJ}$：$x\cos(\beta+\theta)+y\sin(\beta+\theta)-d\sin\beta\sin\theta=0$

設$\overleftrightarrow{EI}$、$\overleftrightarrow{DJ}$交點為 $G(x,y)$

$$\Rightarrow x=\frac{\triangle x}{\triangle}=\frac{\begin{vmatrix} s\sin\alpha\sin\gamma & \sin(\pi-\alpha-\gamma) \\ d\sin\beta\sin\theta & \sin(\beta+\theta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{con}(\pi-\alpha-\gamma) & \sin(\pi-\alpha-\gamma) \\ \cos(\beta+\theta) & \sin(\beta+\theta) \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{s\sin\alpha\sin\gamma\sin(\beta+\theta)-d\sin\beta\sin\theta\sin(\pi-\alpha-\gamma)}{\cos(\pi-\alpha-\gamma)\sin(\beta+\theta)-\cos(\beta+\theta)\sin(\pi-\alpha-\gamma)}$$

$$=\frac{s\sin\alpha\sin\gamma\sin(\beta+\theta)-d\sin\beta\sin\theta\sin(\pi-\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)}$$

$$y=\frac{\triangle y}{\triangle}=\frac{\begin{vmatrix} \cos(\pi-\alpha-\gamma) & s\sin\alpha\sin\gamma \\ \cos(\beta+\theta) & d\sin\beta\sin\theta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathrm{con}(\pi-\alpha-\gamma) & \sin(\pi-\alpha-\gamma) \\ \cos(\beta+\theta) & \sin(\beta+\theta) \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{d\sin\beta\sin\theta\sin(\pi-\alpha-\gamma)-s\sin\alpha\sin\gamma\cos(\beta+\theta)}{\cos(\pi-\alpha-\gamma)\sin(\beta+\theta)-\cos(\beta+\theta)\sin(\pi-\alpha-\gamma)}$$

$$=\frac{d\sin\beta\sin\theta\cos(\pi-\alpha-\gamma)-s\sin\alpha\sin\gamma\cos(\beta+\theta)}{\sin(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)}$$

※此時$\sin(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)\neq 0$，即$\angle C\neq\theta+\gamma$，$\angle C=\theta+\gamma$爲特殊情形，留待後面討論

$$\overline{OG}=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$$

$$=[s^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma\sin^2(\beta+\theta)-2sd\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\sin(\pi-\alpha-\gamma)\sin(\beta+\theta)+d^2\sin^2\beta\sin^2\theta\sin^2(\pi-\alpha-\gamma)+d^2\sin^2\beta\sin^2\theta\cos^2(\pi-\alpha-\gamma)-2sd\sin\alpha\sin\beta\times\sin\theta\sin\gamma\cos(\pi-\alpha-\gamma)\cos(\beta+\theta)+s^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma\cos^2(\beta+\theta)]^{\frac{1}{2}}/|\sin(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)|$$

$$=\{s^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma[\sin^2(\beta+\theta)+\cos^2(\beta+\theta)]+d^2\sin^2\beta\sin^2\theta[\sin^2(\pi-\alpha-\gamma)+\cos^2(\pi-\alpha-\gamma)]-2sd\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma[\sin(\pi-\alpha-\gamma)\sin(\beta+\theta)+\cos(\pi-\alpha-\gamma)\cos(\beta+\theta)]\}^{\frac{1}{2}}/|\sin(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)|$$

又 $$\overline{YZ}=[(s\sin\alpha\sin\gamma)^2+(d\sin\beta\sin\theta)^2-2\times s\sin\alpha\sin\gamma\times d\sin\beta\sin\theta\times\cos(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[s^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma+d^2\sin^2\beta\sin^2\theta-2sd\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)]^{\frac{1}{2}}$$

故 $$\overline{OG}=\frac{\overline{YZ}}{|\sin(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)|}$$

而 $$\overline{YZ}=[s^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma+d^2\sin^2\beta\sin^2\theta-2sd\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)]^{\frac{1}{2}}$$

（令$d=c-s$）

$$=[s^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma+(c-s)^2\sin^2\beta\sin^2\theta-2s(c-s)\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\times\cos(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)]^{\frac{1}{2}}$$

$$=[s^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma+c^2\sin^2\beta\sin^2\theta+s^2\sin^2\beta\sin^2\theta-2cs\sin^2\beta\sin^2\theta+2(s^2-cs)\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\{[\sin^2\alpha\sin^2\gamma+\sin^2\beta\sin^2\theta+2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos(\alpha+$$

$\beta+\theta+\gamma-\pi)]s^2-2[\sin^2\beta\sin^2\theta+\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)]cs+c^2\sin^2\beta\sin^2\theta\}^{\frac{1}{2}}$

令 $m=\sin^2\alpha\sin^2\gamma+\sin^2\beta\sin^2\theta+2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)$

$n=\sin^2\beta\sin^2\theta+\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)$

則 $\overline{YZ}=\sqrt{ms^2-2ncs+c^2\sin^2\beta\sin^2\theta}$

$$=\sqrt{m(s-\frac{n}{m}c)^2+(\sin^2\beta\sin^2\theta-\frac{n^2}{m})c^2}$$

※在這裡要說明一下$\sin^2\beta\sin^2\theta-\frac{n^2}{m}$一定且必須＞0，證明如下：

設$\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi=\phi$

因$m=\sin^2\alpha\sin^2\gamma+\sin^2\beta\sin^2\theta+2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos\phi$

$=\sin^2\alpha\sin^2\gamma+\sin^2\beta\sin^2\theta-2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma+2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma(1+\cos\phi)$

$=(\sin\alpha\sin\gamma-\sin\beta\sin\theta)^2+2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\times2\cos^2(\frac{\phi}{2})>0$

而 $m\sin^2\beta\sin^2\theta-n^2$

$=(\sin^2\alpha\sin^2\gamma+\sin^2\beta\sin^2\theta+2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos\phi)\sin^2\beta\sin^2\theta-(\sin^2\beta\sin^2\theta+\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos\phi)^2$

$=(\sin^2\alpha\sin^2\gamma+\sin^2\beta\sin^2\theta+2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos\phi)\sin^2\beta\sin^2\theta-\sin^4\beta\sin^4\theta+2\sin\alpha\sin\beta\sin\theta\sin\gamma\cos\phi-\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\theta\sin^2\gamma\cos^2\phi$

$=\sin^2\alpha\sin^2\gamma\sin^2\beta\sin^2\theta-\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\theta\sin^2\gamma\cos^2\phi$

$=\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\theta\sin^2\gamma(1-\cos^2\phi)$

$=\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\theta\sin^2\gamma\sin^2\phi>0$(此處因$\angle C\neq\theta+\gamma$，故不會＝0)

故知$m\sin^2\beta\sin^2\theta-n^2$恆＞0

故當 $s=\frac{n}{m}c$時，

$\overline{YZ}$ 有$\min=\sqrt{(\sin^2\beta\sin^2\theta-\frac{n^2}{m})c^2}=c\sqrt{\sin^2\beta\sin^2\theta-\frac{n^2}{m}}$

$$\text{內接三角形有最小的高}=\frac{c\sqrt{\sin^2\beta\sin^2\theta-\dfrac{n^2}{m}}}{|\sin(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)|}$$

內接三角形有最小面積$=\frac{1}{2}\times\overline{OG}\times(\overline{GF}+\overline{GH})$

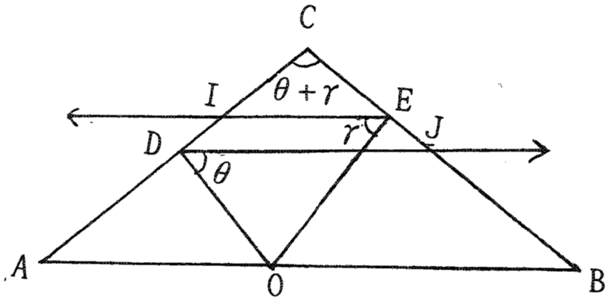
$$=\frac{1}{2}\times\frac{c\sqrt{\sin^2\beta\sin^2\theta-\dfrac{n^2}{m}}}{|\sin(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)|}$$

$$\times\left(\frac{c\sqrt{\sin^2\beta\sin^2\theta-\dfrac{n^2}{m}}}{|\sin(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)|}\times\cot\theta+\frac{c\sqrt{\sin^2\beta\sin^2\theta-\dfrac{n^2}{m}}}{|\sin(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)|}\times\cot\gamma\right)$$

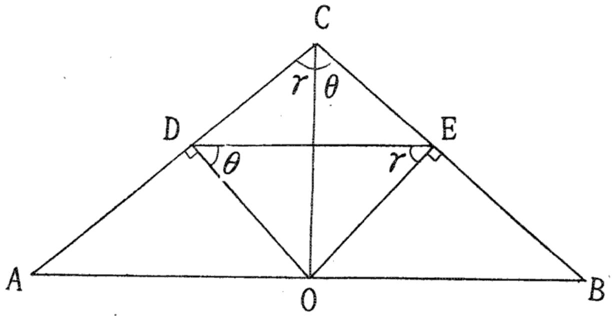
$$=\frac{1}{2}\times\frac{c^2\left(\sin^2\beta\sin^2\theta-\dfrac{n^2}{m}\right)}{\sin^2(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)}\times(\cot\theta+\cot\gamma)$$

(五)特殊情形：

1. 在討論內接任意三角形之最小面積時，發現$\angle C\neq\theta+\gamma$，其實理由很簡單，這是發生了折線（$\overrightarrow{DJ}$、$\overrightarrow{EI}$）平行或重疊的緣故。如圖六，$\angle C=\theta+\gamma$，$\angle CIE=\pi-(\theta+\gamma)-(\frac{\pi}{2}-\gamma)=\frac{\pi}{2}-\theta=\angle IDJ \Rightarrow \overline{DJ}//\overline{EI}$。故當原三角形頂角為$\theta+\gamma$時，折線會發生平行或重疊，而二折線可能無交點或有無限多個交點。若要取交點，則二折線要重疊。而$\overline{AB}$上只有一點可使二折線重疊，也就是說$R_{AB}$只有一點。現在，我們將說明它的另二個性質。




圖六




圖七`

如圖七，我們已知道在$\overline{AB}$上取點時，所做的折線不是平行，就是重疊。而重疊時，其重疊部份的每一個點皆可以畫出內接三角形。而當重疊時，其圖正如圖七所示，因$\overline{OD}\perp\overline{AC}$、$\overline{OE}\perp\overline{BC}$，故O、D、C、E四點共圓=>$\angle ODE=\angle OCE=\theta$，$\angle OED=\angle OCD=\gamma$ =>O($R_{\overline{AB}}$)就是與$\overline{AC}$夾$\gamma$角、和$\overline{BC}$夾$\theta$角的直線和$\overline{AB}$的交點。

由以上的結果，我們得知在一頂角$\angle C$爲$\theta+\gamma$的三角形內，其共有三個特殊性質：

(1)$R_{\overline{AB}}$只有一點

(2)$R_{\overline{AB}}$就是和$\overline{AC}$夾$\gamma$角、和$\overline{BC}$夾$\theta$角的直線和$\overline{AB}$的交點

(3)折線重疊部份的每一個點皆可以畫出內接三角形

2.由於在導最小面積時並未引入範圍的概念，故有時候算出的「具有最小面積的內接三角形」其頂點並不一定會在範圍內，此時若硬是要取最小面積，就只有取極限三角形中面積較小的那一個了，我們稱它爲「最小極限面積」。而通常面積較大的極限三角形其面積我們稱它爲「最大極限面積」其關係如下圖：（符號請參考圖五）

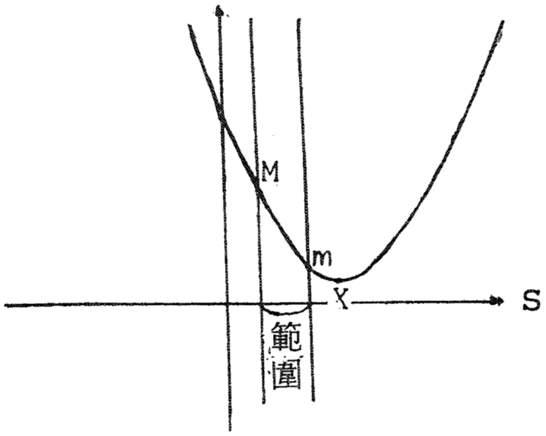
M：最大極限面積

m：最小極限面積

x：最小面積

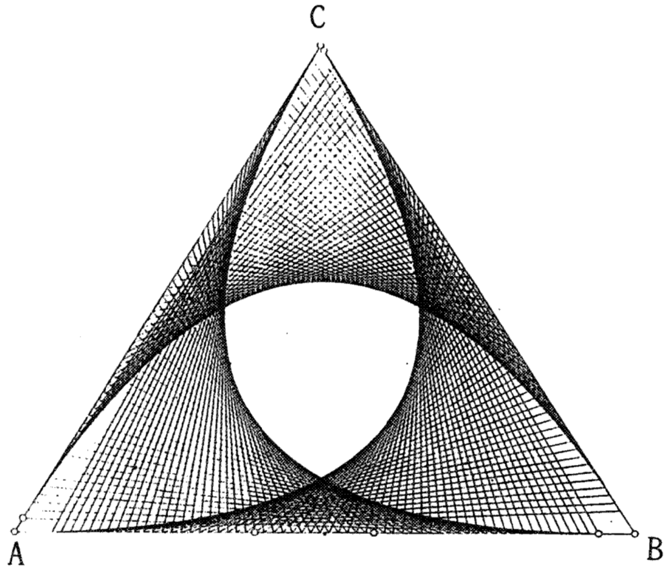
A：內接三角形面積

S：O點x座標—B點x座標




3.內接三角形三邊所形成之包絡線：

以內接正三角形為例，畫出一三角形之所有的內接正三角形，則會發現有三條曲線分別和所有的內接正三角形的三邊相切，此三條曲線就是這些曲線族（在此為直線族）的包絡線，圖形如下頁圖。（註：此包絡線與拋物線同類）




# 三、結　論

(一)內接三角形的三個頂點在原三角形的三邊上皆有其範圍。

(二)如圖五，在$\overleftrightarrow{AB}$上取一點O，利用我們的作法，做出△ABC的內接三角形△OFH，若△OFH的面積為同類三角形中最小的，則：

1.若O在$R_{\overline{AB}}$外，則△ABC中所有與△OFH同類的內接三角形有「最小極限面積」與「最大極限面積」而無「最小面積」。

2.若O在$R_{\overline{AB}}$內，則△ABC中所有與△OFH同類的內接三角形有「最大極限面積」與「最小面積」，且最小面積為：

$$\frac{c^2(\sin^2\beta\sin^2\theta-\dfrac{n^2}{m})(\cot\theta+\cot\gamma)}{2\sin^2(\alpha+\beta+\theta+\gamma-\pi)}$$

㈢如圖七，在△ABC中，$\angle C=\theta+\gamma$，內接三角形△DOE三頂點D、O、E分別在$\overline{AC}$、$\overline{AB}$、$\overline{BC}$上，$\angle ODE=\theta$，$\angle OED=\gamma$，則此時$R_{\overline{AB}}$只有一點，且就是與$\overline{AC}$夾$\gamma$角、與$\overline{BC}$夾$\theta$角的直線和$\overline{AB}$的交點。

# 四、參考資料


1. 孫文先編「解析幾何」，九章出版社。
2. 蔣聲著「幾何變換」，凡異出版社。


# 評　語

本作品尋求在三角形內找出含佔定角且具有最小面積的內接三角形，其研究動機才足，研究內容則以內接三角形之定義出發，探討任意三角形之內接正三角形，再推廣到三角形之內接任意三角形；透過動態幾何電腦補助尋求答案，其所涉及之三角幾何知識推導過程詳細，思考週密，獲致作法及最小面積的公式，誠屬難得之作品。