一個簡單現象的延伸

高中組數學科第一名

臺灣省立台南第一高級中學

作　者：張懷良、賴信弘、李卓諭

指導教師：黃重嘉、楊元宗

一、研究動機

培養數學情操、訓練科學的頭腦。

二、研究目的

從一個簡單的現象，給猜測，推廣及證明。

三、研究用語

(一)B_m表R^m上單位球及其內部。

(二)O爲原點。

(三)$x\in R^m$時，$\|x\|$表$\overrightarrow{ox}$長度。

(四)A有界。

三、研究內容

(一) 1. $\forall P_1\in[-1,1]$"顯然" $\exists P\in[-1,1]\ni\overline{PP_1}\geq 1$，又因$P_1$可能爲0，$\therefore\not\exists t>1$ $\ni$「$\forall P_1\in[-1,1]$ 有$\overline{PP_1}\geq t$」

2. 又發現「$\forall P_1, P_2, \cdots, P_n\in[-1,1]\ \exists P\in[-1,1]\ni\overline{PP_1}+\overline{PP_2}+\cdots\overline{PP_n}\geq k$」中，使其成立的最大k值＝n（讀者自證之。）

＜提示：考慮C＝−1，D＝1，和$\sum_{i=1}^{n}\overline{CP_i}$，$\sum_{i=1}^{n}\overline{DP_i}$。＞

(二) 1. 我們將[−1,1]（即B_1）推廣至B_m，定義：

當$A\subset R^m\wedge n\in N$時（此處A is closed），$f(A,n)=\mathrm{Max}\{h\geq 0\mid \forall P_1, P_2, \cdots, P_n\in A,\ \exists P\in A\ni\sum_{i=1}^{n}\overline{PP_i}\geq h\}$

（∵A is closed ∴maximum 存在）

2. 由(一)知$\forall n\in N$, $f(B_1, n)=n$，後來又用向量方法證明$f(B_m, n)=n$，因而我們推廣定義：

當$g: R^m \to R$為連續函數，A is closed，則$\int(A, g) = \mathrm{Max}\{h \geq 0 \mid \forall p_1, P_2, \cdots P_n \in B_m, \exists P \in A \ni g(\overline{PP_1}, \overline{PP_2}, \cdots, \overline{PP_n}) \geq h\}$

(三) 1.由前述可知當$g(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$時，我們有$\int(B_m, g) = n$，以下討論當$g = f_n^{<k>} = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$時的$\int(B_m, g)$，其中$k \in N$。

2.顯然$\int(B_m, f_n^{<1>}) = n$，又易證$\int(B_m, f_n^{<2>}) = n$，那$\forall m, n \in N$，是否有$\int(B_m, f_n^{<k>}) = n$ 呢？結論也是對的，簡述證明於下：

(1)定義$\Pi_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n$，先證明$\int(B_2, \Pi_n) = 1$，接下來$\forall P_1, P_2, \cdots, P_n \in B_m$，取$B_2 \subset B_m$，並令$Q_i$為$P_i$至$B_2$的投影，則$\exists$

$P \in B_2 \subset B_m$，使$\prod_{i=1}^{n} \overline{PQ_i} \geq 1$，又因$\forall i \in N$，$\overline{P_iP} \geq \overline{P_iQ}$ $\therefore \prod_{i=1}^{n} \overline{P_iP} \geq 1$，取$P_1 = P_2 = \cdots = P_n = 0$時有$1 \geq \int(B_m, \Pi_n)$，而有$\int(B_m, \Pi_n) = 1$。

(2)$\because \int(B_m, \Pi_n) = 1$，那麼$\forall P_1, P_2, \cdots, P_n \in B_m$, $\exists P \in B_m \to \prod_{i=1}^{n} \overline{PP_i} \geq 1$, 則

$\forall k \in N$, $f_n^{<k>}(\overline{PP_1}, \overline{PP_2}, \cdots, \overline{PP_n}) = (\overline{PP_1}^k + \overline{PP_2}^k + \cdots + \overline{PP_n}^k \geq n(\overline{PP_1}^k \cdot \overline{PP_2}^k$

$\cdot \cdots \cdot \overline{PP_n}^k)^{1/n} = n(\prod_{i=1}^{n} \overline{PP_i})^{k/n} \geq n \cdot 1 = n$(算幾不等式)$\Rightarrow \int(B_m, f_n^{<k>}) \geq n$

取$P_1 = P_2 = \cdots = P_n = 0$，有$\int(B_m, f_n^{<k>}) \leq n$，所以$\int(B_m, f_n^{<k>}) = n$

(四) 1.到目前為止，我們得到了

(1)$\forall m \geq 2$，$k, n \in N$，$\int(B_m, f_n^{<k>}) = n$

(2)$\forall m \geq 2$，$n \in N$，$\int(B_m, \Pi_n) = 1$

(3)$\int(B_1, f_n^{<1>}) = \int(B_1, f_n^{<2>}) = n$

2.往證$\int(B_1, \Pi_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

(1)讀者可參考三角函數的知識證明下列等式：

$\forall n$為≥ 3的奇數和$1 \leq i \leq n-1$ $(i \in N)$，有$\left[(\cos\frac{0}{n}\pi)^i, (\cos\frac{1}{n}\pi)^i, (\cos\frac{n}{n}\pi)^i\right] \cdot \left[\frac{1}{2}, -1, 1, -1, \cdots, 1, -\frac{1}{2}\right] = 0$ ………⊗

(2)為方便對n作歸納，我們把命題拓寬為：

$\forall P_1, P_2, \cdots, P_n \in R$, $\exists P \in [-1, 1] \ni \sum_{i=1}^{n} \overline{PP_i} \geq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

(ⅰ) $n=1$時，顯然成立。

(ⅱ)假設$\forall \ell\in N$, $1\leqq \ell\leqq k-1$ $(k\geqq 2,\ k\in N)$命題成立，往證$n=k$亦成立

(a)若$2\mid k$，令$k=2r$，$\forall P_1, P_2,\cdots,P_n\in R$，令$g_0(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-P_i)\in R[x]$，$g(x)=\frac{1}{2}(g_0(x)+g_0(-x))$知$g(x)$爲n次首一實多項式，且$\exists g_1(x)$爲r次首一實多項式，使$g_1(x^2)=g(x)$，再令$h(x)=2^r g_1(\frac{x}{2}+\frac{1}{2})$爲r次首一實多項式，並令其根爲$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\in C$，令$\beta_i=\dfrac{\alpha_i+\overline{\alpha_i}}{2}\in R$，即$\beta_i$爲$\alpha_i$在R軸上垂足，則$\exists P_0\in[-1,1]$，使得$\prod_{i=1}^{n}\overline{P_0B_i}\geqq\dfrac{1}{2^{r-1}}$，那麼$|h(P_0)|=|(P_0-\alpha_1)(P_0-\alpha_2)\cdots\cdots(P_0-\alpha_n)|=\prod_{i=1}^{n}|(P_0-\alpha_i)|=\prod_{i=1}^{n}\overline{P_0\alpha_i}\geqq\prod_{i=1}^{n}\overline{P_0\beta_i}\geqq\dfrac{1}{2^{r-1}}$即$|g_1(\dfrac{P_0}{2}+\dfrac{1}{2})|\geqq\dfrac{1}{2^{2r-1}}=\dfrac{1}{2^{k-1}}$，又$\because P_0\in[-1,1]\ \therefore\dfrac{P_0}{2}+\dfrac{1}{2}\in[0,1]$，令之爲$t^2$ $(t\in[0,1])$，則$\dfrac{1}{2}(|g_0(t)|+|g_0(-t)|)\geqq\dfrac{1}{2}|g_0(t)+g_0(-t)|=|g(t)|=|g_1(t^2)|=|g_1(\dfrac{P_0}{2}+\dfrac{1}{2})|\geqq\dfrac{1}{2^{k-1}}$

$\therefore |g_0(t)|\geqq\dfrac{1}{2^{k-1}}$ or $|g_0(-t)|\geqq\dfrac{1}{2^{k-1}}$

(b)若$2\nmid k$，$\forall P_1, P_2,\cdots,P_n\in R$，令$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-P_i)=x^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1x+a_0\in R[x]$和$\langle x_1, x_2,\cdots,x_{k+1}\rangle=\langle\frac{1}{2},-1,1,-1,\cdots,1,-\frac{1}{2}\rangle$，知$k\geqq 3$，且再由⊗知

$$\sum_{i=1}^{n}|x_i f(\cos\frac{i-1}{k}\pi)|\geqq|\sum_{i=1}^{k+1}(x_i f(\cos\frac{i-1}{k}\pi))|$$

$$=|\sum_{i=1}^{k+1}x_i[(\cos\frac{i-1}{k}\pi)^k+a_{k-1}(\cos\frac{i-1}{k}\pi)^{k-1}+\cdots+a_1\cos\frac{i-1}{k}\pi+0]|=|\sum_{i=1}^{k+1}x_i(\cos\frac{i-1}{k}\pi)^k|=\frac{1}{2^{k-1}}$$

若$\forall 1\leqq j\leqq k$ 有$|f(\cos\dfrac{j}{k}\pi)|<\dfrac{1}{2^{k-1}}$

則$\dfrac{k}{2^{k-1}}\leqq|x_1 f(\cos\dfrac{0}{k}\pi)|+\cdots+|x_{k+1}f(\cos\dfrac{k}{k}\pi)|<|x_1|\dfrac{1}{2^{k-1}}+|x_2|\dfrac{1}{2^{k-1}}+\cdots+|x_{k+1}|\dfrac{1}{2^{k-1}}=\dfrac{k}{2^{k-1}}$ 矛盾

$\therefore\ \exists 0\leqq j\leqq k \ni |\ f(\cos\frac{j}{k}\pi)\ | > \frac{1}{2^{k-1}}$

(iii)我們發現令$T_n=\frac{1}{2^n}[(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n]$時，其爲一首一有理係數多項式，且$T_n=0 \Leftrightarrow x=\cos\frac{2i-1}{n}\pi$ ($i=1, 2,\cdots,n$)，令$P_i=\cos\frac{2i-1}{2n}\pi$時，發現有"$\forall P\in[-1,1]$，有$\prod_{i=1}^{n}\overline{PP_i}\leqq\frac{1}{2^{n-1}}$" 因此$\int(B_1,\ \Pi_n)=\frac{1}{2^{n-1}}$

(註：①$\prod_{i=1}^{n}\overline{PP_i}=|\ T_n(P)|$

②此處請參考有關切比雪夫多項式（T_n）之理論。）

(五) 1.之前定義$f_n^{<k>}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_N^k$ ($k\in N$) 爲$R^n\to R$的連續函數，今把$k\in N$的條件改成$k>0$，那 $f_n^{<k>}$仍是$R^n\to R$的連續函數。

（註：若使$k\leqq 0$，則沒有意義）

2.接著讀者可模仿前述而證明$\int(B_m,\ f_n^{<k>})=n$，$\forall k>0,\ m,\ n\in N,\ m\geqq 2$

3.從前面的內容可知，當連續函數是取Π和$f_n^{<k>}$時，再綜合上述2.，接下來作$\int(B_1,\ f_n^{<k>})=n,\ \forall k\geqq 1$：

$P_1,\ P_2,\cdots,P_n\in B_1$，讓$C=-1\in B_1,\ D=1\in B_1$，則$f_n^{<k>}(\overline{CP_1},\ \overline{CP_2},\cdots,\overline{CP_n})+$
$f_n^{<k>}$

$(\overline{DP_1},\ \overline{DP_2},\cdots,\overline{DP_n})=\sum_{i=1}^{n}\overline{CP_i}^k+\sum_{i=1}^{n}\overline{DP_i}^k\geqq\sum_{i=1}^{n}2(\frac{\overline{CP_i}+\overline{DP_i}}{2})^k=2n$

($\because x^k$在$k\geqq 1$時，於$[o,\ +\infty]$上爲凹函數$\therefore\forall x,y\geqq 0$，有$\frac{x^k+y^k}{2}\geqq(\frac{x+y}{2})^k$)

$\therefore f_n^{<k>}(\overline{CP_1},\ \overline{CP_2},\cdots,\overline{CP_n})\geqq n$ or $f_n^{<k>}(\overline{DP_1},\ \overline{DP_2},\cdots,\overline{DP_n})\geqq n$

$\therefore\ \exists P=C$ or $D\ni P\in B_1\wedge f_n^{<k>}(\overline{PP_1},\ \overline{PP_2},\cdots,\overline{PP_n})\geqq n$

$\therefore\int(B_1,\ f_n^{<k>})\geqq n$

取$P_1=P_2=\cdots=P_n=0$時，可知$\int(B_1,\ f_n^{<k>})=n$

4.我們又找出$\int(B_1,\ f_2^{<k>})=2\alpha^k$，其中$\alpha$爲$(1+t)^k+(1-t)^k=2t^k$在(0,1)上之根，有興趣的讀者可以嘗試證明看看。

5.到目前爲止，所有$\int(B_m,\ f_n^{<k>})$和$\int(B_m,\ \Pi_n)$中，僅剩下$\int(B_1,\ f_n^{<k>})$在$0<k<1$和$n\geqq 3$的情形，有興趣的讀者不妨試著求求看。

(六) 1.我們發現在求$\int(A,g)$時，除了證明$\int(A,g)\geqq t$時，尙須再找出($P_1,\ P_2,\cdots,P_n$) $\in A^n\ni\forall P\in A,\ g(\overline{PP_1},\ \overline{PP_2},\cdots,\overline{PP_n})\leqq t$，雖然在前述(一)～(五)中，皆很容易選取，然而在g是其他函數時，情況就沒有這麼單純；此外，我們

也想研究這樣的點組是否對每一個g都是唯一的。

2.除此之外，我們發現若將$\int(A,g)$的定義中的$\geqq$改成$\leqq$，Max改成min，即將出現另一種特徵不同的量。

3.定義：$A\subset R^m$, for some $m\in N$ is closed Λ g: $R^N\to R$ is continuous

則(1)$Maxg_A$: $A^n\to R$ by $Maxg_A\ (P_1, P_2,\cdots,P_n)=Max\{g(\overline{PP_1}, \overline{PP_2},\cdots, \overline{PP_n}) \mid \forall P\in A\}$

(2)$Ming_A$: $A^n\to R$ by $Ming_A\ (P_1, P_2,\cdots,P_n)=Min\{g(\overline{PP_1}, \overline{PP_2},\cdots,\overline{PP_n}) \mid \forall P\in A\}$

(3)$\int^{\geqq}(A,g)=Max\ \{h \mid \forall P_1, P_2,\cdots,P_n \in A\ \exists P\in A \ni g(\overline{PP_1},\overline{PP_2},\cdots, \overline{PP_n})\geqq h\}$

(4)$\int^{\leqq}(A,g)=Min\ \{h \mid \forall P_1, P_2,\cdots,P_n \in A\ \exists\ P\in A \ni g(\overline{PP_1},\overline{PP_2}, \cdots, \overline{PP_n})\leqq h\}$

(5)$P^{\geqq}(A,g)=\{(P_1, P_2,\cdots,P_n) \in A^n \mid \forall P\in A,\ g(\overline{PP_1}, \overline{PP_2},\cdots,\overline{PP_n})\leqq \int^{\geqq}(A,g)\}$

(6)$P^{\leqq}(A,g)=\{(P_1, P_2,\cdots,P_n) \in A^n \mid \forall P\in A,\ g(\overline{PP_1}, \overline{PP_2},\cdots,\overline{PP_n})\geqq \int^{\leqq}(A,g)\}$

顯然$\int^{\geqq}(A,g)=\int(A,g)$，我們還可以另外證明

(7)$Maxg_A$和$Ming_A$是well-defined

(8)$P^{\geqq}(A,g)$和$P^{\leqq}(A,g)$均$\neq 0$

(9)$Min(Maxg_A(A^n))=\int^{\geqq}(A,g)$

(10)$Max(Ming_A(A^n))=\int^{\leqq}(A,g)$

(A)當g是連續函數，A爲閉集時，$Maxg_A(P_1, P_2,\cdots,P_n)=Max\{g(\overline{PP_1},\cdots,\overline{PP_n}) \mid P\in A\}$爲$A^n$至R的函數。因$g(\overline{PP_1},\cdots,\overline{PP_n})=h(P):A\to P$顯然爲在閉區間上連續函數，所以$h(A)$有最大值，令爲$h(P_0)$則此值即爲$Maxg_A(P_1,P_2,\cdots,P_n)$

(B)顯然$Maxg_A(P_1,\cdots,P_n)$: $A^n\to R$爲連續函數，因此有$Min(Maxg_A(A^n))=Maxg_A(P'_1, P'_2,\cdots,P'_n)$，其中$P'_i \in A$

(C)$\forall P_1, P_2,\cdots,P_n\in A$，令$P'\in A\ni g\ \overline{P'P_1},\cdots,\overline{P'P_n})=Maxg_A(P_1,\cdots,P_n)$

則$g(\overline{P'P_1},\overline{P'P_2},\cdots,\overline{P'P_n}) \in Maxg_A(A^n)$

$\therefore g(\overline{P'P_1},\overline{P'P_2},\cdots,\overline{P'P_n})\geqq min(Maxg_A(A^n))$知$P'_1, P'_2,\cdots,P'_n \in A$

則$\forall P\in A$，由定義可知 $g(\overline{PP'_1},\overline{PP'_2},\cdots,\overline{PP'_n})\leqq Maxg_A(P'_1, P'_n,\cdots,P'_n)=Min(Maxg_A(A^n))$.$\therefore \int^{\geqq}(A,g)=min(Maxg_A(A^n))$

(D)顯然$(P'_1,P'_2,\cdots,P'_n) \in P^{\geqq}(A,g)\neq \phi$

(E)上述(A)～(D)中可把敘述改為其對偶敘述，而可得$\int^{\geqq}(A,g)=Max(Ming_A(A^n))$和 $P^{\leqq}(A,g)\neq\phi$

如此一來，這些新的定義即合理，而且$min(M_{ax}g_A(A^n))$、$Max(Ming_A(A^n))$也存在。

4.定義(9)和(10)，這是另一種求法，而可以使用其他工具來完成其計算，如電腦等，因此我們發現在「統一性」地考慮$\int^{\geqq}$ or $\int^{\leqq}$的算法時，應從定義著手，如考慮其與g的關係。

5.我們找到了以下關係＜對稱形（symmetric form)＞：

A是R^m上的一個閉集，g是連續函數：$R^n\to R$，若$h(x_1, x_2,\cdots,x_n)=\sum_{j=1}^{n}a_jI_j$，$\forall j$, $a_j>0\wedge I_j$形為$x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$，其中$\alpha_1, \alpha_2,\cdots,\alpha_n\geqq0\wedge\prod_{j=1}^{n}I_j=(x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n)^c$，c是一個常數≧0，則$\int^{\geqq}(B_m,h)=\sum_{j=1}^{n}a_j\forall m\in N$, $m\geqq2$（此段證明在此不多敘述）

這看起來繁雜，但其實簡單的性質，可以幫我們處理許多的$\int(B_m,g)$，當$m\geqq2$時

(七)討論$P(A,g)$，其中A是R^m上的閉集，g是$R^n\to R$的連續函數。

1.g為對稱函數時（即$g(x_1, x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=g(x_1, x_2,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$，$\forall x_\ell\in R$)，則$(P_1, p_2,\cdots,P_n)\in P(A,g)\Rightarrow(\tau(P_1), \tau(P_2),\cdots,\tau(P_n))\in P(A,g)$，其中$\tau$為任一$\{P_1,\cdots,P_n\}$上置換。

2.$P^{\geqq}(B_m, \Pi_n)=\{(0,0,\cdots,0)\}$，$\forall m, n\in N, m\geqq2$

3.$P^{\geqq}(B_m, g)=\{(0,0,\cdots,0)\}$，當g為symmetric form且$m\geqq2$時

4.$P^{\geqq}(B_1, \Pi_n)=\{\tau(\cos\frac{1}{2n}\pi), \tau(\cos\frac{3}{2n}\pi),\cdots,\tau(\cos\frac{2n+1}{2n}\pi)\mid \tau$是置換$\}$以上這幾個性質的證明那都變簡單的，讀者不妨試試看。

(八)值表：$m\in N, n\in N, k>0$

1.$\int^{\leqq}(B_1, f_n^{<k>})=?$　$\forall 0<k<1$

2.$\int^{\leqq}(B_1, f_n^{<k>})=?$　$\forall n$為奇數 $k>1$ $n\neq1$

3.$\int^{\leqq}(B_1, f_n^{<1>})=n-1$　$\forall n$為奇數 $n\neq1$

4.$n-1<\int^{\leqq}(B_1, f_n^{<k>})<n$　$\forall n$為奇數 $n\neq1$ $k>1$

5.$\int^{\leqq}(B_1, f_n^{<k>})=n$　$\forall n$為偶數 $k\geqq1$

6.$\int^{\leqq}(B_m, f_n^{<k>})=n$　$\forall m\geqq2$ $n\geqq2$ $k\geqq1$

7.$\int^{\leqq}(B_m, f_1^{<k>})=0$

8.$\int^{\leqq}(B_m, f^{<k>})=?$　$\forall n\in N-\{1\}$ $0<k<1$

9. $\int^{\leq}(B_m,\ (\pi_0)^k)=0 \quad \forall m,\ k>0$

10. $\int^{\leq}(B_m,\ f_2^{<k>})=2^k \quad \forall m\geqq 1 \quad 0<k<1$

11. $\int^{\geq}(B_1,\ f_n^{<k>})=n \quad \forall k\geqq 1$

12. $\int^{\geq}(B_1,\ f_2^{<k>})=2\alpha^k \quad \forall 0<k<1 \ (2\alpha^k=(1+\alpha)^k+(1-\alpha)^k,\ 0<\alpha<1)$

13. $\int^{\geq}(B_1,\ f_n^{<k>})=? \quad \forall 0<k<1 \quad n\geqq 3$

14. $\int^{\geq}(B_m,\ f_n^{<k>})=n \quad \forall m\geqq 2$

15. $\int^{\geq}(B_m,\ \Pi_n)=1 \quad \forall m\geqq 2$

16. $\int^{\geq}(B_1,\ \Pi_n)=\dfrac{1}{2^{n-1}}$

有些值尚未求出，讀者可以算出，我們所求出的值，在此不加證明。

(九)Calculating Method（本部分中A為R^m上閉集，g是$R^n\to R$的連續函數）處理一些問題時，除了symmetric form以外，我們覺得仍需要一些工具，茲錄之如下：

1. $\int^{\leq}$及$\int^{\geq}$之標準法：

$\int^{\leq}(A,g)=t <=>$

(a)$\forall P_1,\ P_2,\cdots,P_n\in A\ \ \exists P\in A\ni g(\overline{PP_1},\ \overline{PP_2},\cdots,\overline{PP_n})\leqq t$

(b)$\forall P_1,\ P_2,\cdots,P_n\in A\ \ni\forall P\in A\ni g(\overline{PP_1},\ \overline{PP_2},\cdots,\overline{PP_n})\geqq t$

2. $\int^{\leq}(A,g)=\int^{\geq}(A,-g)$（證明省略）

3. 同步算法（monic form）：

令$R_t=[0,+\infty]$，f是$R\to R$的連續函數，且$\forall x\in R_t^m\ g(x)\geqq t$

$<=> f(g(x))\geqq f(t)$（即 f在$g(R_t^m)$上遞增）

若f滿足的是$\forall x\in R_t^n\ g(x)\geqq t <=> f(g(x)\leqq f(t)$

則$\int^{\leq}(A,f(g))=f(\int^{\leq}(A,g))$

且$\int^{\geq}(A,f(g))=f(\int^{\leq}(A,g)$

（其證明在此省略）

4. 有一個很簡單的估計$\int$的方法：（讀者可輕易證明）

(1)若找到$h\in R$使$\forall P_1,\ P_2,\cdots,P_n\in A\ni\forall P\in A,\ g(\overline{PP_1},\cdots,\overline{PP_n})\leqq h$，則$\int^{\geq}(A,g)\geqq h$

(2)若找到$h\in R,\ P'_1,\ P'_2,\cdots,P'_n\in A\ni\forall P\in A,\ g(\overline{PP'_1},\cdots,\overline{PP'_n})\leqq h$，則$\int^{\geq}(A,g)\leqq h$

註：(1)(4)中的命題均可作其對偶命題，即將敘述中“≧”和“≦”全部互換，而得新的命題，也是對的。

(十)理論結構發展的一支驅向：

$\overline{Q}=(q_1, q_2,\cdots,q_n) \in A^n$ $h_{\overline{Q}}(P)=g(\overline{pq_1}, \overline{pq_2},\cdots,\overline{pq_n})$: $A\to R$ is continuous

（知$\overline{Q} \in P^{\geqq}$ <=> $\forall P \in A$ $h_{\overline{Q}}(P)\leqq \int^{\geqq}(A,g)$）令$Mh_{\overline{Q}}=\{P \in A|\ h_{\overline{Q}}(P)=\int^{\geqq}(A,g)\}$知$Mh_{\overline{Q}}\neq \phi$ <= $Q \in P^{\geqq}$

$T_c=\{s|\ s \subset A \ni$ "$\forall P \in S$, $h_{\overline{Q}}(P)\leqq \int^{\geqq}(A,g)$" <=> $\overline{Q} \in P^{\geqq}\}$

這裡的定義都是在A,g已確定之下的情形。

1. 在前面的部分中，讓$A=B_1$, $g=\Pi_n$，可利用前面的證明內容說明$\overline{Q}\in P^{\geqq}(A,g)$

2. 此外，使$A=B_2$，$g=\Pi_n$，亦是如此。

這不禁令我們想知道，若當我們作出$P^{\geqq}(B_m, f_n^{\langle k\rangle})$或在1.中把n改成偶數時，是否也有$\overline{Q} \in P^{\geqq}(A,g)$ => $Mh_{\overline{Q}} \in T_c$。倘若g不是$\Pi_n$或$f_n^{\langle k\rangle}$這樣美好的函數時，是否也有該性質。給出滿足「$\overline{Q} \in P^{\geqq}(A,g)$ => $Mh_{\overline{Q}} \in T_c$」的g之充要條件是一個值得研究的問題。

八、參考資料

(一)沈昭亮教授在IMO選訓營提供的一道題（$\int^{\geqq}(B_1,\Pi_n)=\frac{1}{2^{n-1}}$）。

(二)Topology中閉集、開集的概念。

(三)Calculus——王元、方源著。

評　語

本作品由一維問題"$\forall P_1, P_2,\cdots,P_n \in [1,-1]$ ∃ $P \in [-1,1] \ni \overline{PP_1}+\overline{PP_2}+\cdots+\overline{PP_n}\geqq k$"中恒成立時之最大值k爲n出發延伸探究將$R^m$上之單位體積$B_m$取代〔-1,1〕；作者以超級的數學分析知識，細緻的代數技巧，精巧的數學符號逐步分析探討而能深入問題的核心以致獲得推廣的結果，應爲一有突破性的小論文，頗具創造力；惟本作品的書寫格式應再斟酌處理，相關參考資料應列出，刊版之設計應再力求精美，如此更能符合參展之要求。