

地磁的測量和磁極庫侖定律之研究

高中組物理科第二名

國立高雄師大附中

作者：顏大鈞、陳彥谷

指導教師：蔡萍實

一、研究動機

在學習電磁學時，書上有學到磁場的計算，但卻沒有相關實驗，便想自行設計實驗來求得地磁，而在實驗過程中發現，測地磁時可以同時求得磁鐵塊的磁矩和磁極強度，並可進一步驗證兩磁極間的磁力是否符合庫倫定律。

二、研究目的

- (一)以光槓桿原理，由磁針和塊狀磁鐵在地磁及外加磁場中的偏轉角來測地磁。
- (二)以磁針在均勻磁場中的簡諧振動週期求地磁。
- (三)以磁鐵塊在均勻磁場中的簡諧振動週期求地磁、磁鐵塊的磁矩和磁極強度。
- (四)以磁鐵的互相排斥驗證庫侖定律。

三、研究器材

自製螺線管	× 1	自製Helmholta coil	× 2
He-Ne 雷射	× 1	電源供應器	× 2
天平	× 1	安培計	× 2
碼錶	× 1	可變電阻	× 2
游標尺	× 1	放大鏡	× 1
磁針、磁鐵塊	數個		

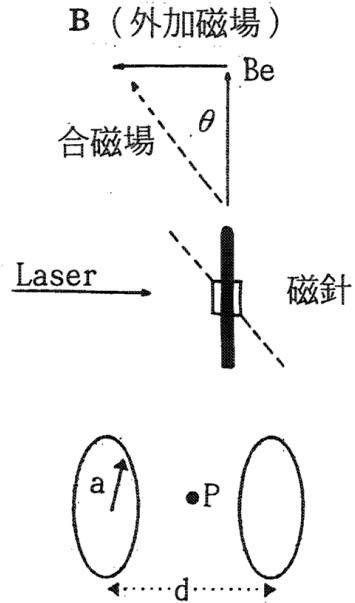
四、研究過程和方法

註：因為地磁方向並非平行地面，和水平地面方向會夾一磁傾角（magnetic dip），而本實驗進行時，磁針都保持水平，故所量磁場乃地磁的水平分量。

(一)以光槓桿原理求地磁水平分量

1. 實驗原理

- (1)磁針靜止懸吊在地磁場中時，其指向為地磁之方向。
- (2)若施以一垂直之外加磁場，磁針會偏轉到合磁場方向。
- (3)要測量磁針的偏轉角，可以用雷射光入射，再量出反射光的偏轉角，即為合磁場和地磁夾角之兩倍。
- (4) $B_e = B \cot \theta$ 。
- (5)外加磁場的方法採用Helmholtz coil

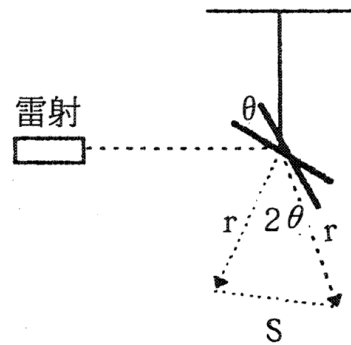


若兩線圈之距離 $d =$ 半徑 a ，則在中間點 P 附近形成均勻磁場

$$B = \frac{8 \mu_0 I}{5^{3/2} a}$$

2. 實驗設計

- (1)在磁針中點貼一小片反光片後，靜止懸吊在Helmholtz coil中點。
- (2)調整磁針在水平面上，線圈產生的磁場方向需垂直磁針。
- (3)以雷射光入射反光片，先找出反射線，並量出一段距離 r 。
- (4)在線圈上通入電流，磁針偏轉後，再量出新的反射線（入射光不變），和 r 掃過的距離 S 改變不同的電流重覆此步驟。
- (5)前後兩次的反射線的夾角為 2θ 。

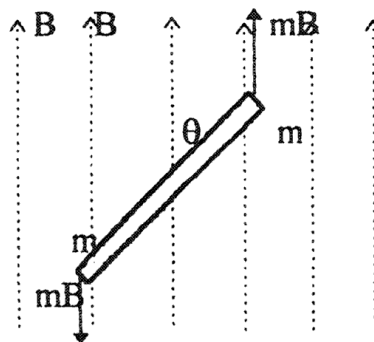


$$(6) \theta = \sin^{-1}\left(\frac{S}{2r}\right) \quad , \quad B_e = B \cot \theta$$

(二)以磁針或磁鐵塊在均勻磁場中的簡諧振動週期求地磁

1. 實驗原理

(1) 設有一磁針，其磁極強度為 m 及 $-m$ ，針長 L ，置於一均勻磁場中，則兩極皆受力 mB 但大小相反，且分別對磁針中心產生一力矩 $mB(L/2)\sin\theta$ 故總力矩合成一轉矩為



$$\tau = -mBL\sin\theta \quad (\text{以 } B \text{ 方向為角度零點})$$

亦可寫為向量式 $\vec{\tau} = \vec{M} \times \vec{B}$

其中 $M = mL$ 為磁針的磁矩 (magnetic moment)

(2) 若使磁針在磁場中作小角度振動，則可以視為一簡諧運動

由 $\tau = -mBL\sin\theta$ 和 $\tau = I\ddot{\theta}$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{MB}{I} \cdot \theta = 0 \quad I \text{ 為磁針之轉動慣量}$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MB}}$$

(3) 上式中磁針之 I ， M 不易求得，只能改變 B (加上一個與地磁同方向之磁場)

$$\text{由 } T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MB_e}} \quad \text{和} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M(B_e + B)}}$$

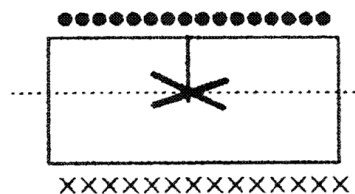
$$\text{可得 } B_e = \frac{B}{\left(\frac{T_e}{T}\right)^2 - 1}$$

B_e : 地磁, B : 外加磁場, T_e : 磁針在地磁內之週期, T : 磁針在合磁場內之週期

2. 實驗設計

(1) 磁針在螺線管內

- ① 用茶葉罐繞上漆包線做成一螺線管，記錄長度，半徑，匝數。
- ② 將磁針吊在螺線管的中心點，方向平行地磁。
- ③ 先測磁針在地磁下之 S.H.M. 週期。

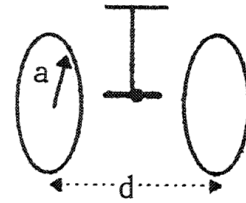


④螺線管加電流，製造和地磁同方向之磁場。

⑤測磁針在此磁場下之S.H.M.週期，並改變電流重覆之。

(2)磁針在Helmholtz coil內以Helmholtz coil代替螺線管重覆(1)之步驟。

(3)長方形磁鐵塊在Helmholtz coil內：以長方形磁鐵塊代替磁針重覆(2)之步驟。

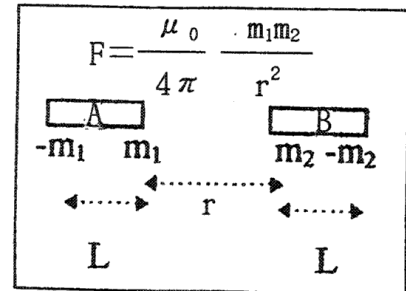


(4)圓柱形磁鐵塊在Helmholtz coil內：以圓柱形磁鐵塊代替磁針重覆(2)之步驟。

(三)以磁鐵的互相排斥驗證庫侖定律

1. 實驗原理

(1)在(二)一(3)實驗中，我們以磁鐵塊在均勻磁場中的簡諧振動週期求地磁，由公式



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{MB_e}} \quad \text{和} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M(B_e + B)}}$$

$$I = \frac{1}{12} \times \text{質量} \times (\text{長}^2 + \text{寬}^2)$$

因為磁鐵塊為規則形，轉動慣量I可算出而地磁的標準值也可查出，如此一來可以由上式求出磁鐵的磁矩M，並進一步估算兩極的磁極強度m

(2)兩塊磁鐵間的磁力可以用磁極間的互相排斥來測出且靜磁力符合庫侖定律

$$F = \frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi r^2}$$

(3)若 m_1, m_2 極性相同，則A、B所受到的力為大小皆為

$$\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi} \left\{ \frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+2L)^2} - \frac{2}{(r+L)^2} \right\}$$

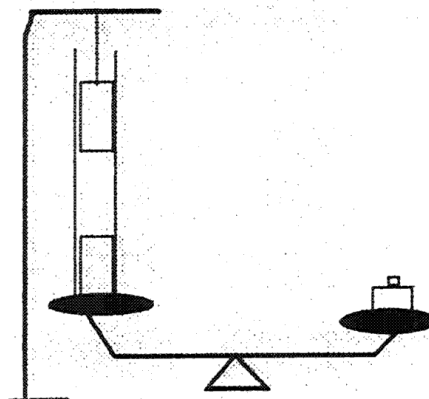
2. 實驗設計

(1)長方形磁鐵間的磁力。

①以(一)–(3)的方法先測出兩塊磁鐵塊作S.H.M.的週期，並計算出磁矩。

②將一塊磁鐵放入口徑適當的玻璃試管中，再置於天平之一端，並使天平重新歸零。

③在試管中以細繩懸吊另一磁鐵，即可量得兩塊磁鐵間的距離和作用力。



(2)圓柱形磁鐵間的磁力

取另外兩塊磁鐵重覆(1)的實驗。

五、研究結果與討論

註：高雄的地磁大小為 4.35×10^{-5} tesla；
磁傾角為 $31^\circ 03'$
地磁水平分量大小為 3.68×10^{-5} tesla

(一)以光槓桿原理求地磁水平分量

$$r = 2.447 \text{ (m)}$$

以 Helmholtz coil 垂直地磁加磁場

$$B = \frac{8\mu_0 I}{5^{3/2} a} = (4.50 \times 10^{-5}) \times I$$

1. 用磁針的偏轉來量：

I(A)	S(m)	$\sin^{-1}(s/2r)$	Be(T)
1	4.020	0.963886	3.45E-05
2	4.560	1.199212	7.87E-05
3	4.685	1.277495	1.22E-04

(1)實驗數據跳動明顯，關鍵在於磁針太輕，造成反射光不易定位。

(2)量r, S時是以拉線測量，不夠精密。

2.用長方形磁鐵的偏轉來量：

I(A)	S(m)	$\sin^{-1}(s/2r)$	Be
0.2	1.000	0.205101	1.82E-06
0.4	1.965	0.411739	7.02E-06
0.6	2.754	0.595468	1.45E-05
0.8	3.272	0.729363	2.27E-05
1	3.643	0.835982	3.13E-05

一開始我們是用磁針作，因數據跳動太大，所以又換了一塊長方形塊狀磁鐵，但數據改善不多，仍有跳動的現象。

(二)以磁針在均勻磁場中的簡諧振動週期求地磁

1.用螺線管來製造均勻磁場：

螺線管：長15.50cm，匝數200； $n=1290.32$ 匝/公尺

$$\text{螺線管中心點磁場 } B = \mu_0 n I ; B_e = \frac{B}{\left(\frac{T_e}{T}\right)^2 - 1}$$

實驗得 B_e 平均值 4.41×10^{-5} Tesla

(1)比較標準值得誤差為 $(4.41 - 3.68) / 3.68 = 19.84\%$

(2)誤差發生的可能原因有：

週期的誤差：量週期時是用10秒內的振動次數來算，其中磁針在未加外磁場前，振動次數較少（大約4.5次），相對的判讀時的誤差就較大，在10秒內約有0.25次的誤差，這部分約佔6%之誤差。

磁場的誤差：實驗所用螺線管並非長螺線管，故管中磁場並非完全均勻，而且磁針本身也有長度，針上每點所在磁場並非等值，會有誤差。

2.用Helmholtz coil來製造均勻磁場

Helmholtz coil之磁場 $B = (4.50 \times 10^{-5}) \times I$

實驗得 B_e 平均值 3.29×10^{-5} Tesla

(1)比較標準值得誤差為 $(3.68 - 3.29) / 3.68 = 10.60\%$

(2)週期的誤差仍在，但數據比較準確，由此可以推斷Helmholtz coil所製

造的均勻磁場效果優於螺線管磁場，而根據參考資料，Helmholtz coil 中心點兩側 $r/10$ 範圍內都可視為均勻磁場。再加上磁針比在螺線管內容易觀察，所以底下的實驗都以Helmholtz coil來製造磁場。

(三)以長方形磁鐵在均勻磁場中的簡諧振動週期求地磁

質量13.2g；長4.0cm；寬1.0cm 磁鐵兩塊

Helmholtz coil之磁場 $B=(4.5 \times 10^{-5}) \times I$ $I_{\text{慣}}=1.87 \times 10^{-6} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$

I(A)	T(s)	$(T_e/T)^2 - 1$	$B_e(\text{tesla})$	T^2	M
0(Be)	$T_e=2.105$				
0.2	1.905	0.220996	4.07E-05	0.275556	0.444
0.4	1.739	0.465227	3.87E-05	0.330675	0.446
0.6	1.6	0.730869	3.69E-05	0.390625	0.452
0.8	1.493	0.987854	3.64E-05	0.448622	0.455
1	1.429	1.1699	3.84E-05	0.489706	0.442
1.2	1.333	1.493698	3.61E-05	0.562781	0.458
1.4	1.274	1.730017	3.64E-05	0.616114	0.456
1.6	1.212	2.01647	3.57E-05	0.680761	0.462
1.8	1.176	2.203978	3.67E-05	0.723078	0.453
2	1.143	2.391656	3.76E-05	0.765434	0.446
2.2	1.087	2.75012	3.6 E-05	0.846332	0.460
2.4	1.071	2.863005	3.77E-05	0.871808	0.445
平均			3.73E-05	平均	0.452

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{慣}}}{M(B_e + B)}}$$

$$B_e = \frac{B}{\left(\frac{T_e}{T}\right)^2 - 1}$$

$$M = \frac{4\pi^2 I_{\text{慣}}}{T^2(B + B_e)}$$

$$m = M/L$$

①比較標準質得誤差為 $(3.73-3.68)/3.68=1.36\%$

②由此數據和(二) 2.之誤差比較，可發現磁鐵塊比磁針更能精確量出地磁，可能是本實驗所用之磁鐵塊比磁針短，其振動範圍更符合Helmholtz coil的均強磁場區域。

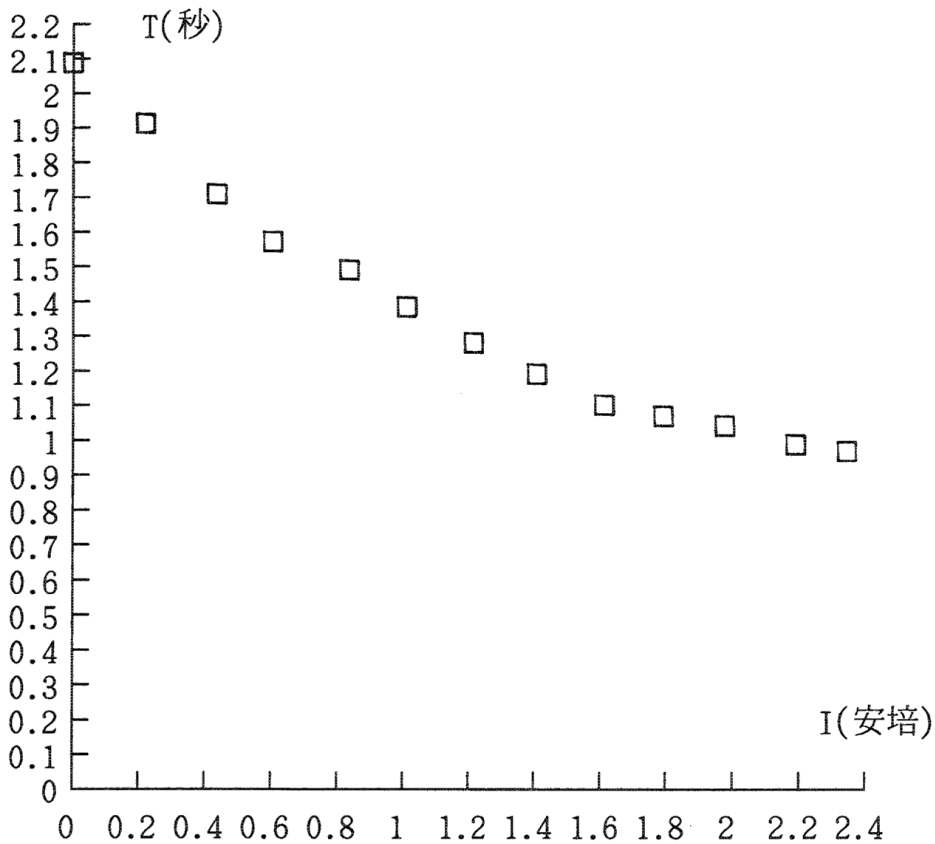
③上表最後一欄磁矩M的計算方式是用 $M = \frac{4\pi^2 I_{\text{慣}}}{T^2(B+B_e)}$ ，其中T和Be均為待測值

，故先以標準地磁 $B_e = 3.68 \times 10^{-5} \text{ T}$ 代入，而得M之平均值為 $0.452(\text{A}\cdot\text{m}^2)$ 進而求出此塊狀磁鐵之磁極強度 $m = M/L = 11.3(\text{A}\cdot\text{m})$

④在 $T = 2\pi \sqrt{\frac{I_{\text{慣}}}{M(B+B_e)}}$ 和Helmholtz coil之磁場 $B = (4.50 \times 10^{-5}) \times I$ 兩式

中操縱變因I和應變變因T的函數如下

$$\frac{1}{T^2} = \left(\frac{M}{4\pi^2 I_{\text{慣}}} \times 4.5 \times 10^{-5} \right) \cdot I + \frac{M}{4\pi^2 I_{\text{慣}}} B_e$$



在數據分析的方法上也可以使用最小平方法來求得I和 T^2 的函數結果如下圖，而fit出來之函數為

$$\frac{1}{T^2} = 0.2766 \cdot I + 0.2239$$

其中第一個係數（斜率） $0.2766 = \frac{M}{4\pi^2 I_{\text{慣}}} \times 4.5 \times 10^{-5}$

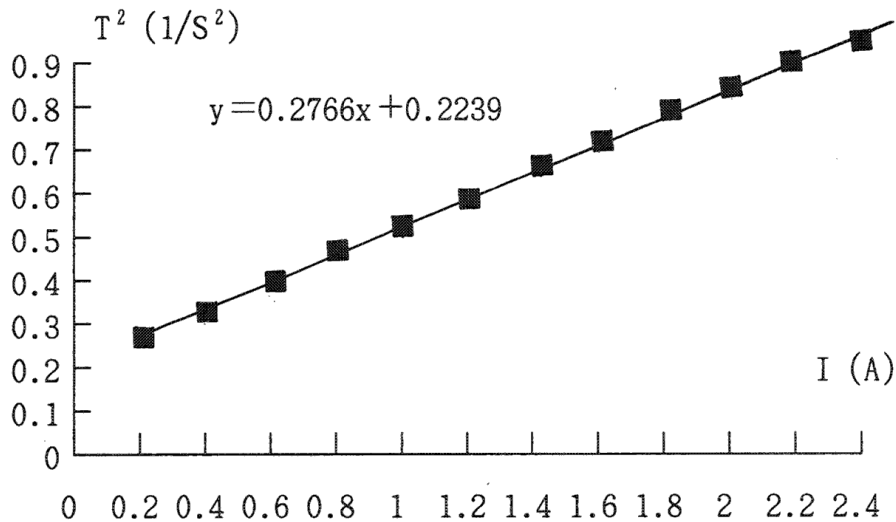
$$\rightarrow M = 0.45 \quad \rightarrow m = 11.25$$

第二個係數（截距） $0.2239 = \frac{M}{4\pi^2 I_{\text{慣}}} B_e \quad B_e = 3.68 \times 10^{-5}$,

$$\rightarrow M = 0.45 \quad \rightarrow m = 11.25$$

三種求磁矩的方法求得的數值都很接近，但用截距係數計算時有代入標準地磁值，所以後面計算磁矩時，都採用截距係數計算。

- ⑤在實驗時爲了作兩塊磁鐵的磁力，而另外找了一塊幾何形狀相同的磁鐵，進行相同的實驗，結果兩塊的磁極強度都相同。



(四)以長方形磁鐵的互相排斥驗證庫倫定律

r(m)	F(gw)	m^2/r^2	修正項	F(N)	$K(\mu_0/4\pi)$	k'
0.0054	13.04	4340278	4234824	0.127792	2.94E-08	3.02E-08
0.0062	11.67	3292469	3190911	0.114366	3.47E-08	3.58E-08
0.0066	11.49	2905475	2805788	0.112602	3.88E-08	4.01E-08
0.007	10.54	2582908	2485041	0.103292	4E-08	4.16E-08
0.0086	8.44	1711229	1620184	0.082712	4.83E-08	5.11E-08
0.01055	6.14	1137104	1053481	0.060172	5.29E-08	5.71E-08
0.01065	5.84	1115850	1032584	0.057232	5.13E-08	5.54E-08

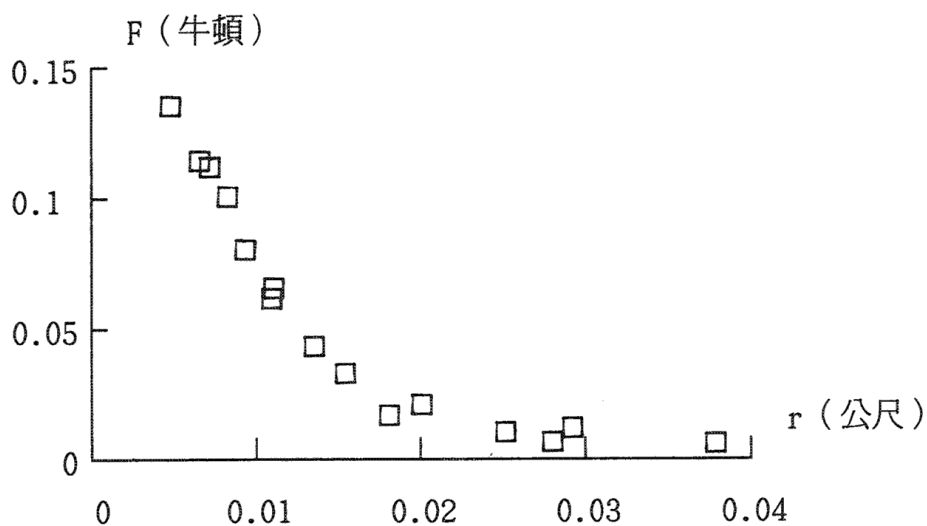
r(m)	F(gw)	m ² /r ²	修正項	F(N)	K(μ ₀ /4π)	k'
0.0127	4.44	784689.1	708276.1	0.043512	5.55E-08	6.14E-08
0.01445	3.44	606135	534945.6	0.033712	5.56E-08	6.3E-08
0.01805	2.04	388463.9	326512.9	0.019992	5.15E-08	6.12E-08
0.01955	2.19	331139.9	272531.7	0.021462	6.48E-08	7.88E-08
0.0249	1.14	204129.8	155535.2	0.011172	5.47E-08	7.18E-08
0.0279	0.74	162591.1	118558.9	0.007252	4.46E-08	6.12E-08
0.02865	0.94	154189.9	111201.3	0.009212	5.97E-08	8.28E-08
0.0385	0.49	85385.39	53321.66	0.004802	5.62E-08	9.01E-08
0.01435	3.54	614612.3	543138.6	0.034692	5.64E-08	6.39E-08
					5.43E-08	6.65E-08

註：修正項見底下第②點討論

①由上實驗中得到 $m_1 = m_2 = 11.25(A-m)$ 代入 $F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^2}$

$F / \left(\frac{m_1 m_2}{r^2} \right)$ 即得比例常數，（在上表中顯現在K欄）。和標準值（ 1×10^{-7} ）作對照後，可以驗證庫侖定律

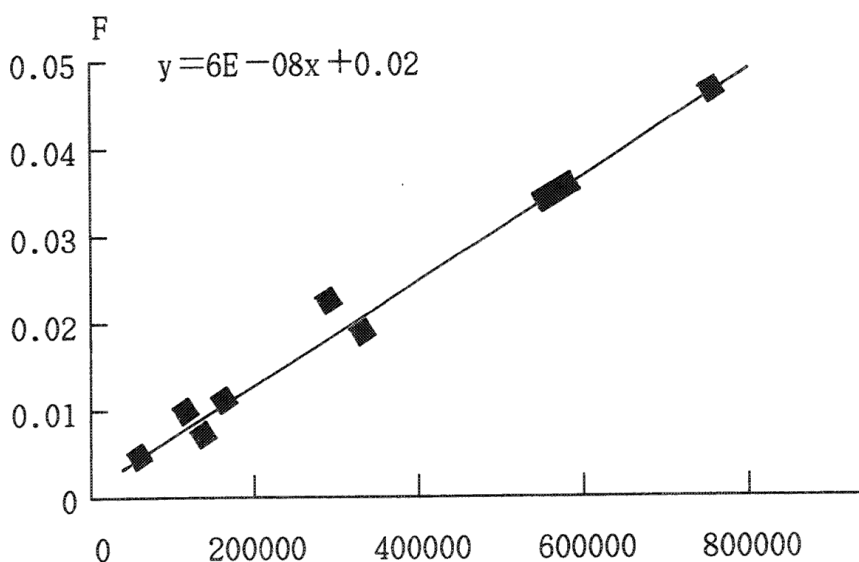
×10⁻⁷）作對照後，可以驗證庫侖定律



②若考慮四極都會互相影響，須用 $\frac{\mu_0 m_1 m_2}{4\pi} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+2L)^2} - \frac{2}{(r+L)^2} \right]$

在上表中記錄在K'欄。

- ③很明顯的有加修正項的部份比較精確，所以底下都用K'的數據討論。
- ④K標準值 1×10^{-7} ；所以本實驗K值之誤差為 $(1 - 0.665) / 1 = 33.5\%$ 。
- ⑤由誤差來看似乎不太精確，但由前幾個數據可以發現r越小誤差越大，這點相當合理，因為前幾個數據r約在5mm，若觀察時有0.5mm的誤差，就包含10%的誤差了。
- ⑥另外在算磁極強度m時，是假設有兩磁極集中在磁鐵兩端，而實際上磁極強度並非如此集中，應是不均勻的分佈在全長上，因此用四磁極的作用力來算庫侖定律，是已經理想化的結果。
- ⑦因為此實驗重點在驗證庫侖定律，所以從數據上可以看出，實驗時只要距離拉遠，誤差即可降低，但因磁鐵磁性有一極限，距離過大，F變小，在測量磁力時也會有另一層誤差出現。在本實驗所用器材中，經本組不斷嘗試，當兩極相距1.5cm到3cm間，為比較適合實驗的區域。下圖就是在此區域下F對 $m_1 m_2 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+2L)^2} - \frac{2}{(r+L)^2} \right]$ 作圖的結果，已經相當接近直線了。



$$\left[\frac{m_1 m_2}{r^2} + \frac{m_1 m_2}{(r+2L)^2} - \frac{2m_1 m_2}{(r+L)^2} \right]$$

(五)以圓柱形磁鐵重覆(三)、(四)：

先用在均勻磁場中的簡諧振動週期求磁矩，再互相排斥驗證庫侖定律：

1.圓柱形磁鐵A：質量23.35g；長4.40cm，半徑0.50cm； $I_{\text{價}} = 3.77 \times 10^{-6} \text{kg}$ -

m²;

2. 圓柱形磁鐵B：質量22.60g；長4.30cm，半徑0.50cm；I_慣 = 3.48 × 10⁻⁶ kg-

m²;

I	T	(Te/T) ² - 1	Be	1/T ²
0(Be)	Te=1.92			
0.2	1.75	0.178776	5.03E-05	0.326531
0.4	1.61	0.392693	4.58E-05	0.385788
0.6	1.49	0.626053	4.31E-05	0.45043
0.8	1.35	0.980796	3.67E-05	0.548697
1	1.32	1.071855	4.19E-05	0.573921
1.2	1.23	1.386146	3.89E-05	0.660982
1.4	1.15	1.729679	3.64E-05	0.756144
1.6	1.1	1.983471	3.63E-05	0.826446
1.8	1.05	2.274376	3.56E-05	0.907029
2	1	2.61	3.44E-05	1
平均			3.99E-05	

I	T	(Te/T) ² - 1	Be	1/T ²
0(Be)	Te=1.8			
0.2	1.64	0.151695	5.93E-05	0.371802
0.4	1.48	0.414171	4.34E-05	0.456538
0.6	1.35	0.699643	3.86E-05	0.548697
0.8	1.29	0.861427	4.18E-05	0.600925
1	1.22	1.081161	4.16E-05	0.671862
1.2	1.14	1.383503	3.9 E-05	0.769468
1.4	1.09	1.607188	3.92E-05	0.84168
1.6	1.03	1.919785	3.75E-05	0.942596
1.8	0.99	2.160494	3.75E-05	1.020304
2	0.95	2.432244	3.7E-05	1.108033
平均			4.15E-05	

①測量地磁時誤差 (3.99 - 3.68) / 3.68 = 8.4%，誤差仍很小，可見得以振動法測地磁時，磁棒的形狀對結果影響不大。

②用fit函數的求法，
$$\frac{1}{T^2} = \left(\frac{M}{4\pi^2 I_{\text{慣}}} \times 4.5 \times 10^{-5} \right) \cdot I + \frac{M}{4\pi^2 I_{\text{慣}}} \text{Be}$$

可得 $\frac{M_A}{4\pi^2 I_{\text{慣}}} \text{Be} = 0.234$ (fit圖省略) $\frac{M_B}{4\pi^2 I_{\text{慣}}} \text{Be} = 0.228$

→ M_A = 0.95 → m_A = 21.53 M_B = 1.07 m_B = 24.96

3. 以A、B兩磁鐵作庫侖定律之數據

r	F(gw)	m^2/r^2	F(N)	K	修正項	K'
0.0102	23.32	5165213	0.228536	4.42E-08	4849287	4.71E-08
0.014	15.47	2741780	0.151606	5.53E-08	2469311	6.14E-08
0.0163	12.57	2022616	0.123186	6.09E-08	1772363	6.95E-08
0.018	10.22	1658607	0.100156	6.04E-08	1423130	7.04E-08
0.0215	7.77	1162550	0.076146	6.55E-08	953768.5	7.98E-08
0.0225	7.54	1061509	0.073892	6.96E-08	859550.1	8.6 E-08
0.027	4.92	737158.7	0.048216	6.54E-08	562234.4	8.58E-08
0.03	3.97	597098.7	0.038906	6.52E-08	437378	8.9 E-08
0.0335	3.12	478849.5	0.030576	6.39E-08	334561.4	9.14E-08
0.039	2.32	353312.8	0.022736	6.44E-08	229234.2	9.92E-08
				6.15E-08		7.79E-8

數據的討論方式和第四相同：

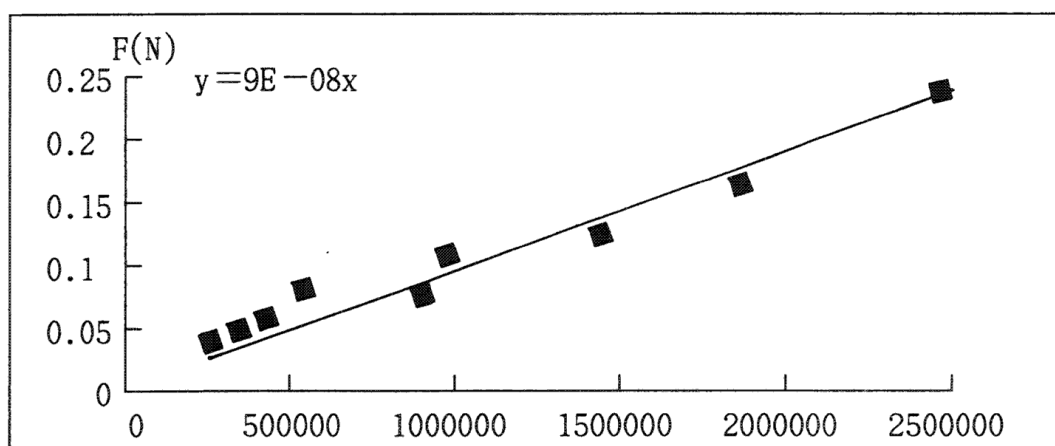
①F仍有隨著r遞減的趨勢。

②要精確研究F-r的關係，須用四磁極交互作用，所以 m_1m_2/r^2 須修正為

$$m_1m_2 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+L_1+L_2)^2} - \frac{1}{(r+L_1)^2} - \frac{1}{(r+L_2)^2} \right]$$

③直接看K值平均的話誤差為 $(1-0.779)/1=22.1\%$

④F和 $m_1m_2 \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(r+L_1+L_2)^2} - \frac{1}{(r+L_1)^2} - \frac{1}{(r+L_2)^2} \right]$ 的函數fit如下



$$\left[\frac{m_1m_2}{r^2} + \frac{m_1m_2}{(r+L_1+L_2)^2} - \frac{m_1m_2}{(r+L_1)^2} - \frac{m_1m_2}{(r+L_2)^2} \right]$$

- ⑤很顯然的fit出來的函數仍然很接近直線，而且係數 9×10^{-8} （即k值）非常接近理論值 1×10^{-7} ，其原因應是我們所用的圓柱形磁鐵磁性比長方形磁鐵強很多在進行互斥實驗時，距離比較容易測量。

六、結 論

- (一)以光槓桿原理設計之實驗，只能大約量出地磁的數量級。
- (二)用簡諧運動設計之實驗，能夠精確的測量地磁；而且指針形狀不拘，不過測量時所用到的外加磁場最好用Helmholtz coil來產生。
- (三)用簡諧運動設計之實驗，可以推算磁鐵兩極的磁極強度。
- (四)研究兩磁鐵磁力和距離關係時，只要取適當距離，可以降低測距離和磁力的誤差，近而發現F和r確實成平方反比。

七、參考資料

- (一)高中物理教師手冊，國立編譯館。
- (二)電磁學，張霽秋，東華書局。
- (三)中山自然科學大辭典。
- (四)理化百表，謝贊夏等六位，協志工業叢書。
- (五)大學物理期刊。
- (六)Fundamentals of Physics Holiday 3rd edition。
- (七)Fundamentals of Electromagnetic theory Reitz M.Hord Christy。

評 語

本作品利用均勻磁場中的簡諧振動週期，實驗測量地磁強度。並以磁鐵的互相排斥驗證庫侖靜磁定律。實驗周密，得到數據相當精確。