費曼怪數？！

高小組數學科第三名

高雄市大同國民小學　　　　　作　　者：馬靖威、林鈺琪、陳盈竹、黃馨逸
指導教師：王說娥、高欽蓮

一、研究動機

83 年 4 月 16 日聯合報副刊，登了一篇陳之藩教授發表的成功湖邊散記之四一（令人失眠的數），文章中介紹令費曼大師抱恨以終的怪數 1/243 = 0.004,115,226,337,448,559 ……並呼籲中小學的同學們加以思考，看規律有什麼演變？

二、研究目的

㈠能夠學以致用，提高解決問題的能力。
㈡培養創造思考、追根究底的精神和正確的科學態度。
㈢依順序歸納、整理，應用並推理尋找數學的趣味性、規律性、對稱性。

三、研究器材設備

筆、直尺、計算紙、電子計算機、數字牌。

四、研究過程方式

㈠ 1/243 的結果如下：

$1/243 = 0.\overline{004,115,226,337,448,559,670,781,893}$

㈡我們獲得的心得有以下兩點：

1. 它是由廿七位數爲一循環節的純循環小數。

2. 由費曼怪數的提示，將循環節每三個一劃分，可分成九組，前八組是一個等差數列，公差都是 111 ，而第八和第九組之間的差值是 112 。

+111　+111　+111　+111　+111　+111　+111　+112
0.004　115　226　337　448　559　670　781　893

㈢ *1.* 廖約克博士發現 243 是 3 的 5 次方。

2. 再次複習乘方的意義：乘方就是被乘數自己本身的連乘。

3. 我們按部就班，整理以下資料：

$1/3 = 0.3333\cdots\cdots = 0.\dot{3}$

$1/9 = 0.1111\cdots\cdots = 0.\dot{1}$

$1/27 = 0.037037\cdots\cdots = 0.\overline{037}$

$1/81 = 0.012345679012345679\cdots\cdots = 0.\overline{012345679}$

當除數是 81 時循環數字共 9 個，只有 8 不曾出現，其餘的都出現一次。

$1/243 = 0.\overline{004115226337448559670781893}$

4. 整理以上數列，可獲以下兩點心得：

(1)均是約循環小數。

(2)

除　　數	$3^1=3$	$3^2=9$	$3^3=27$	$3^4=81$	$3^5=243$
循環節位數	$1(=3^0)$	$1(=3^0)$	$3(=3^1)$	$9(=3^2)$	$27(=3^3)$
各循環節數字總和	3	1	3+7=10	1+2+3+4+5+6+7+9=37	118
各循環節數字被 3 除	除盡	均除不盡，餘數均爲 1			

5. 我們這時提出一個問題：爲什麼後面一個循環節位數會是其前面的三倍？是因爲每三個循環節數字和才能被 3 除盡的緣故。

6. 接下來，我們注意到 $1/81 = 0.\overline{012345679}$，將其循環節九等分，則其前八組爲一等差數列，公差爲 1，而最後一差值爲 $9-7=2$，這不又是一個相同的結論嗎？除數如果是 $3^{\text{ㄆ}}$，$\text{ㄆ} \geqq 4$，若將其循環數字分九組，則每一組之位數爲 $3^{(\text{ㄆ}-4)}$ 位，且其前八組爲一等差數列，公差爲 $3^{(\text{ㄆ}-4)}$ 個 1 組成，而最後一個差值僅是個位數改成 2 而已。

7. $1/3^6 = 1/729$ 我們不再畏懼，因爲我們只要將商找到小數第九位（$3^{6-4}=9$），然後用公差 111111111 依次找出第十至第七十二位，再利用 111111112 找出最後九位，則整個商八十一位循環節數字就找到了。其實 81 位分段用除法找出來也不是很麻煩的。

請看，

$$\frac{1}{729} = \frac{1}{3^6} = \frac{\frac{1}{3^5}}{3} = \frac{0.\overline{004115226337448559670781893}}{3}$$

$$= 0.\overline{001371742,112482853,223593964,334705075,445816186,556927297,}$$
$$\overline{668038408,779149519,890260631}$$ 各位數字和 $= 361$，$361 \div 3 = 120 \cdots 1$。

8. 爲何除數爲 $3^{\text{ㄆ}}$，$\text{ㄆ} \geqq 4$，它們的循環節裡的數字最後一個差值的個位

數，都要由原來的 1 更改成爲 2 ？

我們也很認眞的理出一個道理：第九組之數字加上公差值，其最大位數相加後之和均要十進位，也就是位數要加一位，即

$1/81 = 0.\overline{012345679}$ 而 $9 + 1 = 10$

$1/243 = 0.\overline{004115226337448559670781893}$ 而 $893 + 111 = 1004$

1/729 時，而 $890260631 + 111111111 = 1001371742$

因此所進位的 1 反映到公差上，就造成最後一個差值的個位數要由原來的 1 更改成爲 2 ，我們稱之爲進位效應。

9. 前面我們曾計算出除數爲 3ㄅ，ㄅ≧ 2 時，各循環節數字之和，它們均比 3 之倍數多 1 ，我們由另一角度觀察又發現三種有趣的規律，請看

(1) $1^{+9}\ 10^{+27}\ 37^{+81}\ 118^{+243}\ 361$ ……

$= 1^{+3^2}10^{+3^3}37^{+3^4}118^{+3^5} + 361$ ……

即各個循環節裡的數字和＋除數＝其後一個循環節數字和。

(2) 1,10,37,118,361

則前一數字 × 3 ＋ 7 ＝後一數字

$1 \times 3 + 7 = 10$

$10 \times 3 + 7 = 37$

$37 \times 3 + 7 = 118$

$118 \times 3 + 7 = 361$

(3)將各循環節數字和找出，若其和不是一位數，再相加找出此和之數字和，一直到和爲一位數止，則它們最終的値均是 1 ，而其前一個値均爲 10 。

請看 $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 = 37$

$3 + 7 = 10 \quad 1 + 0 = 1$

$3 + 7 = 10 \quad 1 + 0 = 1$

$1 + 1 + 8 = 10 \quad 1 + 0 = 1$

$3 + 6 + 1 = 10 \quad 1 + 0 = 1$

10. 爲什麼除數 3ㄅ，ㄅ≧ 2 ，各循環節數字和會有〝前一數字 × 3 ＋ 7 ＝後一數字〞的規律呢？我們認爲餘數爲 1 的情形都有這樣的規律，因此就先著手研究凡是餘數爲 1 的情形：

(1)想要餘數爲 1 ；則被除數顯然需爲 3 × ㄇ＋ 1 ，ㄇ≧ 0 ，即 1, 4, 7, 10, 13 ……而除數從 3ㄅ，ㄅ≧ 2 開始。而ㄇ＝ 0 即被除數 1 爲前面所研究的情形。

(2) $4/32 = 0.\dot{4}$ 循環節數字和 4

$4/33 = 0.\overline{148}$ $1 + 4 + 8 = 13$

$4/34 = 0.\overline{049382716}$ $4 + 9 + 3 + 8 + 2 + 7 + 1 + 16 = 40$

心得：顯然規律仍有，但為前一數字 × 3 + 1 = 後一數字。

(3) $7/3^2 = 0.\dot{7}$ 循環節數字和 = 7

$7/3^3 = 0.\overline{259}$

$7/3^4 = 0.\overline{086419753}$，循環節無 2 $8 + 6 + 4 + 1 + 9 + 7 + 5 + 3 = 43$

所以前一數字 × 3 + (− 5) = 後一數字

心得：新情況又發生了，即被除數 1 時，為〝 + 7 〞，4 時為〝 + 1 〞，7 時為〝 − 5 〞，7^{-6} 1^{-6} − 5，故被除數 10 時，如果前一數字 × 3 + (− 11) = 後一數字，那不又是一種有趣的新規律出現了嗎？

(4) $10/3^2 = 1.\dot{1}$

$10/3^3 = 0.\overline{370}$

$10/3^4 = 0.\overline{123456790}$，無 8，$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 9 = 37$

前一數字 × 3 + 7 = 後一數字

心得：①很可惜不是〝 − 11 〞，預測的規律沒法成立。

②與被除數為 1 時同狀況：前一數字 × 3 + 7 = 後一數字。

③更絕的是 $1/3^2 = 0.1$ $10/3^2 = 1.\dot{1}$

$1/3^3 = 0.\overline{037}$ $10/3^3 = 0.\overline{370}$

$1/3^4 = 0.\overline{012345679}$, 無 8 : $10/3^4 = 0.\overline{12345679}$，無 8

啊哈！難不成，$^{+}$ ^{9}10 + ^{9}19，即被除數為 19，也會有相似的情況。換句話說，被除數可分三類型，9 × ㄈ + ㄉ，ㄈ ≧ 0，ㄉ = 1,4,7。

(5)依被除數來分類，總共的確三類型。

甲：9 × ㄈ + 1 型 循環節數字和前一數字 × 3 + 7 = 後一數字

被除數		1	10	19	28	37
除數	3^2	$0.\dot{1}$	$1.\dot{1}$	$2.\dot{1}$	$3.\dot{1}$	$4.\dot{1}$
	3^3	$0.\overline{037}$	$0.\overline{370}$	$0.\overline{703}$	$1.\overline{037}$	$1.\overline{370}$
	3^4	$0.\overline{012345679}$	$0.\overline{123456790}$	$0.\overline{234567901}$	$0.\overline{345679012}$	$0.\overline{456790123}$
(方格內為商)			3^4 為除數時，均無 8，而 8 + 1 = 9			

乙：9 ×ㄈ＋ 4 型　循環節數字和前一數字× 3 ＋ 1 ＝後一數字

被除數		4	13	22	31	40
除數	3^2	$0.\overline{4}$	$1.\overline{4}$	$2.\overline{4}$	$3.\overline{4}$	$4.\overline{4}$
	3^3	$0.\overline{148}$	$0.\overline{481}$	$0.\overline{814}$	$1.\overline{148}$	$1.\overline{481}$
	3^4	$0.\overline{049382716}$	$0.\overline{160493827}$	$0.\overline{271604938}$	$0.\overline{382716049}$	$0.\overline{493827160}$
（方格內爲商）			3^4 爲除數時，均無 5 ，而 5 ＋ 4 ＝ 9			

丙：9 ×ㄈ＋ 7 型　循環節數字和前一數字× 3 ＋（－ 5)＝後一數字

被除數		7	16	25	34	43
除數	3^2	$0.\overline{7}$	$1.\overline{7}$	$2.\overline{7}$	$3.\overline{7}$	$4.\overline{7}$
	3^3	$0.\overline{259}$	$0.\overline{592}$	$0.\overline{925}$	$1.\overline{259}$	$1.\overline{592}$
	3^4	$0.\overline{086419753}$	$0.\overline{197530864}$	$0.\overline{308641975}$	$0.\overline{419753086}$	$0.\overline{530864197}$
（方格內爲商）			3^4 爲除數時，均無 2 ，而 2 ＋ 7 ＝ 9			

心得：(i) 被除數可區分成三類型：9 ×ㄈ＋ㄉ，ㄈ≧ 0 ，ㄉ＝ 1,4,7, 除數均爲 $3^{ㄅ}$，ㄅ≧ 2, 循環節數字和前× 3 ＋ㄊ＝後，ㄉ＝ 1 ，ㄊ＝ 7 ；ㄉ＝ 4 ；ㄊ＝ 1 ；ㄉ＝ 7 ，ㄊ＝－ 5 。

(ii) （ 9 ×ㄈ＋ㄉ ） /3^2 時，商即爲ㄈ．$\overline{ㄉ}$，而ㄈ /3^{2-2} ＝ㄈ／ 3^0 ＝ㄈ。

(iii) （ 9 ×ㄈ＋ㄉ ） /3^3 ，商之整數部分，又循環節部分則均由三個數字所組成。

①ㄉ＝ 1 ，由 0,3,7 組成，ㄉ＝ 4 ，由 1,4,8, ㄉ＝ 7 ，由 2,5,9 所組成，即僅 6 不曾出現，但三類型的各循環節數字和，前數× 3 ＋ㄊ＝後數中各ㄊ間差值＝ 6 。

②第一個商之循環節部分均由數字小到大組成，其後連續商之循環節爲依次將最左一個數字移到最右而成，每三次一輪迴，它等於商之整數部分求法中的除數 3^{3-2} ＝ 3 。

(iv) （ 9 ×ㄈ＋ㄉ ） /3^4 時，商之整數部分爲ㄈ /3^{4-2} ＝ㄈ /3^2 ＝ㄈ /9 之整數部分，而其循環節部分

①均由九個阿拉伯數字組成，ㄉ＝ 1 時， 8 未出現，ㄉ＝ 4 時， 5 未出現，ㄉ＝ 7 時， 2 未出現，即ㄉ＋未出現數字＝ 9

②將其九等分後的數列，公差＝ㄉ的等差數列，但若會發生進位效應，則前一個差值改爲ㄉ＋ 1 ，各類型發生進位效應的地方，都有ㄉ。

③第一個商的循環節部分都由 0 開始，而當第一個商的循環節確定

後，則以後的連續商者：

ㄌ＝1 爲將最左一個數字移到最右即成。

ㄌ＝4 爲將最右二個數字移到最左即成。

ㄌ＝7 爲將最左四個數字移到最右即成。

④都是 9 次一輪迴，等於商的整數部分求法中的除數 $3^{4-2}=9$

11. 因爲三類型各循環節數字和均可表示爲，

①前數× 3 ＋ㄊ＝後數　②各循環節數字＋除數＝後數　我們找出另一種表示法

(1)①第一個商的循環節數字總和

②第二個商＝第一個× 3 ＋ㄊ＝第一個× 3 ＋ 3^0 ＋ㄊ

③第三個商＝第二個× 3 ＋ㄊ

＝（第一個× 3 ＋ㄊ）× 3 ＋ㄊ

＝第一個× 3^2 ＋（ 3 ＋ 1 ）ㄊ

＝第一個× 3^2 ＋（ 3^1+3^0 ）ㄊ。

④第四個商＝第三個× 3 ＋ㄊ＝（第二個× 3+ ㄊ）× 3 ＋ㄊ＝〔（第一個× 3 ＋ㄊ）× 3 ＋ㄊ〕× 3 ＋ㄊ。

⑤第五個商＝第四個× 3 ＋ㄊ＝（第三個× 3 ＋ㄊ）× 3 ＋ㄊ＝〔（第二個× 3 ＋ㄊ）× 3 ＋ㄊ〕× 3 ＋ㄊ＝｛〔（第一個× 3 ＋ㄊ）× 3 ＋ㄊ〕× 3 ＋ㄊ｝× 3 ＋ㄊ＝第一個× 3^4 ＋ ($3^3+3^2+3^1+3^0$ ）ㄊ

所以原數＝ 9 ×ㄈ＋ㄌ /$3^{ㄅ}$，ㄈ≧ 0 ，ㄌ＝ 1,4,7 ，ㄅ≧ 2 各商之整數部分爲ㄈ /$3^{ㄅ-2}$ 之整部分。

各商之循環節數字和第ㄌ商者ㄌ≧ 1 ，ㄌ× $3^{ㄌ-1}$ ＋ㄊ×（ $3^{ㄌ-2}$ ＋ $3^{ㄌ-3}$ ……＋ 3^0 ）

(2)①第一個商的循環節數字總和

②第二個商＝第一個＋除數 3^2

③第三個商＝第二個＋除數 3^3 ＝第一個＋（ 3^2+3^3 ）

④第四個商＝第三個＋除數 3^4 ＝第一個＋（ $3^2+3^3+3^4$ ）

⑤第四個商＝第四個＋除數 3^5 ＝第一個＋（ $3^2+3^3+3^4+3^5$ ）

所以各商的循環節數字和爲第ㄍ商＝第一商＋($3^2+3^3+3^4+\cdots 3^{ㄍ}$)

＝ㄌ＋（ $3^2+3^3+3^4\cdots\cdots 3^{ㄍ}$ ）

五、討論

(一)有條理、有系統按部就班，儘可能全面觀察，是從事科學活動的不二法

門。

(二)費曼怪數，怪得有理，用明顯的特性，引來有緣人怎能讓費曼大師抱恨？不應該讓費曼大師抱恨的。

(三)目前我們還不能解答爲什麼各循環節數字和有前一數字 × 3 ＋ ㄊ ＝ 後一數的特性？我們會繼續研究。

(四)費曼怪數 $1/3^5$, 而我們推論到 $1/3^{ㄅ}$ ㄅ ≧ 6 ，所以只研究到 9 × ㄈ ＋ ㄊ $/3^4$ ，除數是 3^4 而已，這也待繼續努力。

六、結論

（分爲兩大類）

甲、除出的結果，餘數是 1 的情形：

(一) 9 × ㄈ ＋ ㄉ $/3^{ㄅ}$，ㄈ ≧ 0 ，ㄉ ＝ 1,4,7 ㄅ ≧ 2 ，則

1. 循環節由 $3^{ㄅ-2}$ 位數所組成， $3^{ㄅ-2}$ 位數都不能被 3 除盡，餘數都是 1 。商的整數部分是 ㄈ $/3^{ㄅ-2}$ 的整數部分。

2. 各循環節數字總和有下列關係：

(1)各循環節數字和＋除數＝後一個循環節數字和。

(2)前一數字和 × 3 ＋ ㄊ ＝ 後一個循環節數字和。

ㄉ＝ 1 ，ㄊ＝ 7 （費曼怪數即屬此類）；ㄉ＝ 4 ，ㄊ＝ 1 ；ㄉ＝ 7 ，ㄊ ＝ － 5 ；ㄉ＋ ㄊ ＝ 尷尬數

(3)第ㄌ商的循環節數字和＝ ㄉ × $3^{ㄌ-1}$ ＋ ㄊ ×（ $3^{ㄌ-2}$ ＋ $3^{ㄌ-3}$ ＋…… 3^0 ）

(4)第ㄍ商的循環節數字和＝ ㄉ ＋（ 3^2 ＋ 3^3 ＋ 3^4 ＋…… 3^4 ）

3. 各循環節數字和之和，它們最終値是ㄉ，ㄉ＝ 1 時，前一個値都是 10 。

(二)（ 9 × ㄈ ＋ ㄉ ）／ 3^2 時，ㄈ ≧ 0 ，ㄉ ＝ 1,4,7 ，商即爲ㄈ、$\overline{ㄉ}$。

(三)（ 9 × ㄈ ＋ ㄉ ）／ 3^3 時，ㄈ ≧ 0 ，循環節都由三個數字組成。

1. ㄉ＝ 1 ，由 0.3,7, ㄉ＝ 4 ，由 1,4,8, ㄉ＝ 7 ，由 2,5,9 組成

2. 第一個商，都由數字小到大組成，後面各連續商依次將最左一個數字，移到最右即成，每三位（ 3^{3-2} ＝ 3 ）一個輪迴。

(四)（ 9 × ㄈ ＋ ㄉ ）／ 3^4 時，ㄈ ≧ 0 ，循環節部分都由 9 個數字組成。

1. ㄉ＝ 1 ，未出現的數字是 8 ；ㄉ＝ 4 未出現的數字是 5 ；ㄉ＝ 7 ，未出現的數字是 2 。

2. 將其 9 等份後的等差數列，公差＝ ㄉ 的等差數列，但發生進位效應，則前一個差改爲ㄉ＋ 1 。

ㄉ＝ 1 ，有一處發生；ㄉ＝ 4 ，有四處發生；ㄉ＝ 7 ，有七處發生。

3. 第一個商的循環節，數字由 0 開始，知道第一個商，接下來的連續商者，每 9 次一輪迴。

ㄉ＝ 1 ，最左的一個數移到最右；ㄉ＝ 4 ，最右二個移到最左；ㄉ＝ 7 ，最左 4 個移到最右。

乙、被除數是 1 的情形：

㈠費曼怪數屬 $9\times$ㄈ$+ 1/3^{\text{ㄅ}}$，ㄈ≧ 0 ，ㄅ＝ 5 是純循環小數，循環節有 27 位，分成 9 組，前八組是等差數列，公差是 111 ，最後一個差是 112 。

㈡ $1/3^{\text{ㄅ}}$ ㄅ≧ 2 ，循環節是 $3^{\text{ㄅ}-2}$ 位數組成， $3^{\text{ㄅ}-2}$ 位數不能被 3 除盡都餘 1 。

㈢ $1/3^{\text{ㄆ}}$ ㄆ≧ 4 ，將循環節九等分，每等分位數是 $3^{\text{ㄆ}-4}$ 位，前八組是等差數列，公差由 $3^{\text{ㄆ}-4}$ 個 1 組成，最後一個差只是把個位數改成 2 。

㈣ $1/3^{\text{ㄅ}}$ ㄅ≧ 2 ，各循環節數字有以下關係：

1. 各個循環節數字和＋除數＝後一數；2 前一數× 3 ＋ 7 ＝後一數 3. 各循環節數字的和之和最終值是 1 ，前一個值是 10 。

七、參考資料

㈠國小數學 5 、 6 年級

㈡數學萬花筒③奇幻篇

評語

作者對本作品花了極大的精神，對於數學之研究非常執著，對於一個除法，居然算到小數點後上百位數，以一國小學生實在很難令人想像。實在是一個不錯的作品。