小問題，大祕密！

高小組數學科第三名

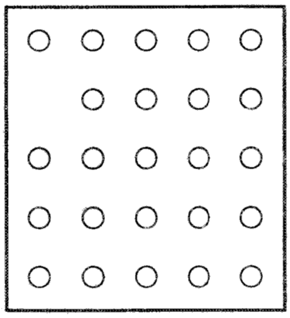
臺北縣崇德國民小學　　　作　　者：賴怡蓁、蔡昀達、黃一玲、周芯瑜
指導教師：賴胤就、陳嚐英

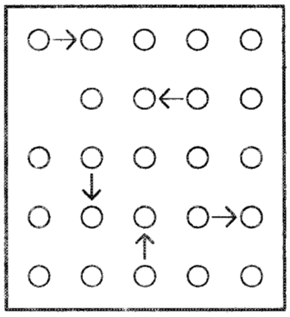
一、研究動機

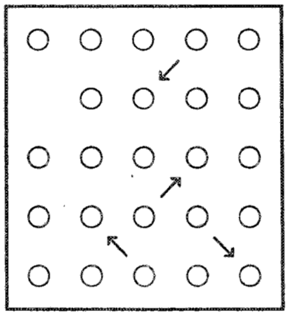
一天晚上，我正在做功課時，看到姊姊在一張紙上畫了好多的圈圈和線條，我好奇的湊上前去問她在畫什麼。

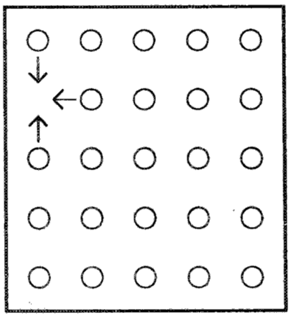
姊姊說：「這是老師要我們做的問題，它總共有 24 個小點（圖一），看誰能一筆把它們畫完。方法很簡單：

1. 每一個黑點只走一次，不能重覆。
2. 可以直走或橫走（圖二），但不可以斜走（圖三）。
3. 不可以跨過空隔點（圖四）。」


（圖一）


（圖二）


（圖三）


（圖四）

我也拿出筆和紙來畫。

畫呀！畫呀！過了不多久，我開始感到很納悶：

「奇怪！怎麼多了一點？爲什麼總有一個小點沒辦法畫到呢？」

後來，我把這個一筆畫的問題請教老師，也同時把我的疑問告訴老師，於是在賴老師和陳老師的指導下，開始研究這個有趣的一筆畫問題，試著探試〝爲什麼會多了一點〞的秘密。

二、研究目的

㈠我們想要利用在數學課本第九册＜對稱圖形＞，所學到的對稱技巧，來簡化類似的圖形。

㈡我們想要利用在數學課本第十册＜位置的表示＞，所學到的座標表示法，

來簡化類似圖形的每一個小點位置。

(三)我們進而想要利用在數學課本第九册<十進位>，所學到的二進位法，來簡化類似圖形每一小點的位置。

(四)我們想要學習怎樣歸納整理的技巧，尋找問題的規律性，來解決類似的問題。

三、研究器材

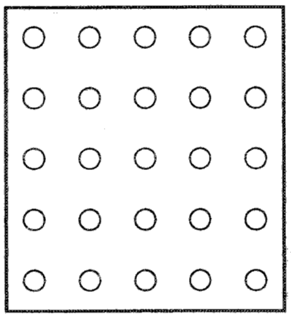
筆記本、尺、圖畫紙、厚紙板、名片紙、名片簿。

四、研究過程

〔研究一〕如果原來的問題沒有空點，是不是就可以一筆畫呢？

實驗一

方　法：1.我們將原圖案的空點補上，成爲（5×5）的實心方陣圖形如下：



2.原問題沒有限定起點位置，因此，我們任意選擇一點當起點，實驗能不能順利一筆畫完全部的 25 個小點。

結　果：即使是（5×5）的實心方陣圖形，由於起點不同，有些也會發生多了一點的現象，結果總共有二種，如下圖：

種類	第　一　種	第　二　種
路 徑	◇ ○→◆ ○←○ ↓ ↓ ↓ ↓ ○ ○←○ ○ ○ ↓ ↑ ↓ ↑ ○ ○→○ ○ ○ ↓ ↓ ↓ ↑ ○ ○←○←○ ○ ↓ ↑ ○→○→○→○→○	○→○→◆ ○←○ ↑ ↓ ↑ ○←○←○ ○ ○ ↑ ↓ ↑ ○←◇ ○ ○ ○ ↓ ↑ ↓ ↑ ○ ● ○←○ ○ ↓ ↓ ○→○→○→○→○
結果	可　以　一　筆　畫	多　了　一　點

說明：◇：起點　◆：終點　●：無法畫到的點

實驗二

方　法：*1.* 我們先將實心方陣圖形的每一個小點加以編號如下：

⑤	⑩	⑮	⑳	㉕
④	⑨	⑭	⑲	㉔
③	⑧	⑬	⑱	㉓
②	⑦	⑫	⑰	㉒
①	⑥	⑪	⑯	㉑

2. 接著從 1 號小點開始，依次當作起點，實驗看看還有那些小點也會使圖形無法一筆畫完全部小點。

結　果：經過實驗，我們找到會使圖形無法一筆畫的起點位置是：

○	□	○	□	○
□	○	□	○	□
○	□	○	□	○
□	○	□	○	□
○	□	○	□	○

說　明：○：可以一筆畫的起點；□：無法一筆畫的起點

分　析：*1.* 如果從編號是〝偶數〞的小點當起點，則圖形會多了一點，不能一筆畫完。

2. 如果從編號是〝奇數〞的小點當起點，則可以輕易的一筆畫完。

實驗三

方　法：我們用數學課本第十一冊（對稱圖形）學到的＜線對稱＞方法，設法找到對稱軸，再由對稱軸找當做起點的基準點代表。

結　果：*1.* ＜實驗二＞的 25 個小黑點，經過簡化整理可以分爲六組，這六組基準點分別如下：

2. 六個基準點在（ 5 × 5 ）實心方陣圖形，歸納整理如下表：
這些基準點構成一個三角形，這樣一來，不管原來的小黑點在那個位置，我們都可以用這六個基準點做代表。

●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
③	⑧	⑬	●	●
②	⑦	●	●	●
①	●	●	●	●

3. 這六個基準點中會使圖形多了一點，無法一筆畫完的，是起點編號 2 和 8 這二個偶數點，至於起點編號是 1 、 3 、 7 和 13 等四個奇數點，則可以很容易的一筆畫完全部小點。

〔研究二〕其它邊數不同的實心方陣圖形是不是都可以一筆畫呢？

實驗四

方　法：*1.* 我們從（ 2 × 2 ）、（ 3 × 3 ）依次做到（ 9 × 9 ）的實心方陣圖形。

2. 由於在＜實驗三＞中找到簡化起點的方法，只要利用這些基準點當做起點做實驗，就可以判斷整個圖形的其它小點是不是可以一筆畫了。

結　果：全部實心方陣圖形實驗後的情形，經整理後如下表：

〔研究三〕影響實心方陣圖形能不能一筆畫的因素在那裡？

實驗五

方　法：我們把（ 5 × 5 ）的實心方陣圖形從起點到終點，沿著路徑，記錄所經過的每一個小點的編號。

結　果：由編號奇數點當起點和以偶數點當起點，路徑有共同的特性，以下圖為例說明：

<table>
<tr><th>路　線　圖</th><th colspan="15">路　　　徑　　　圖</th></tr>
<tr><td rowspan="4">⑤←⑩　◆　⑳←㉕
↓　↑　↑　↓　↑
④　⑨　⑭　⑲　㉔
↓　↑　↑　↓　↑
③　⑧　⑬　⑱　㉓
↓　↑　↑　↓　↑
②　◇　⑫←⑰　㉒
↓　　　　　　↑
①→⑥→⑪→⑯→㉑</td><td>編號
特性</td><td>7
奇</td><td>→</td><td>8
偶</td><td>→</td><td>9
奇</td><td>→</td><td>10
偶</td><td>→</td><td>5
奇</td><td>→</td><td>4
偶</td><td>→</td><td>3
奇</td><td>→</td></tr>
<tr><td>編號
特性</td><td>2
偶</td><td>→</td><td>1
奇</td><td>→</td><td>6
偶</td><td>→</td><td>11
奇</td><td>→</td><td>16
偶</td><td>→</td><td>21
奇</td><td>→</td><td>22
偶</td><td>→</td></tr>
<tr><td>編號
特性</td><td>23
奇</td><td>→</td><td>24
偶</td><td>→</td><td>25
奇</td><td>→</td><td>20
偶</td><td>→</td><td>19
奇</td><td>→</td><td>18
偶</td><td>→</td><td>17
奇</td><td>→</td></tr>
<tr><td>編號
特性</td><td>12
偶</td><td>→</td><td>13
奇</td><td>→</td><td>14
偶</td><td>→</td><td>15
奇</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="4">⑤→⑩→⑮→⑳　●
↑　　　　　↑
④←⑨←⑭　⑲→㉔
　　　↑　　　↓
③→⑧→⑬　◇　㉓
↑　　　　↓　↓
②←⑦←⑫←⑰　㉒
　　　　　　↓
◆←⑥←⑪←⑯←㉑</td><td>編號
特性</td><td>18
偶</td><td>→</td><td>17
奇</td><td>→</td><td>12
偶</td><td>→</td><td>7
奇</td><td>→</td><td>2
偶</td><td>→</td><td>3
奇</td><td>→</td><td>8
偶</td><td>→</td></tr>
<tr><td>編號
特性</td><td>13
奇</td><td>→</td><td>14
偶</td><td>→</td><td>9
奇</td><td>→</td><td>4
偶</td><td>→</td><td>5
奇</td><td>→</td><td>10
偶</td><td>→</td><td>15
奇</td><td>→</td></tr>
<tr><td>編號
特性</td><td>20
偶</td><td>→</td><td>19
奇</td><td>→</td><td>24
偶</td><td>→</td><td>23
奇</td><td>→</td><td>22
偶</td><td>→</td><td>21
奇</td><td>→</td><td>16
偶</td><td>→</td></tr>
<tr><td>編號
特性</td><td>11
奇</td><td>→</td><td>6
偶</td><td>→</td><td>1
奇</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

說　明：◇：起點　　◆：終點　　●：無法畫到的點

分　析：*1.* 不管直走或橫走，路徑必依照＜奇、偶、奇、偶……＞或＜偶、奇、偶、奇……＞二種配對方式前進，不可能出現＜偶、偶＞或＜奇、奇＞。

2.如果起點是奇數點，在終點後面，可增加一個〝奇數點〞。

3.如果偶數點當起點，在終點後面，可增加一個〝偶數點〞。

4.我們歸納出〝影響圖形會不會多了一點〞的主要因素是：起點特徵——有〝偶點〞和〝奇點〞二個變因。

5.根據這二個變因，我們將圖形的結果整理成下表：

圖形特徵	奇偶點關係	起點 (C)	路　徑	結　果
方陣圖 (5 × 5) 型	奇點數 > 偶點數 (奇＋ 1)	奇點 <C1>	→奇、偶、奇、偶…奇、偶、奇 (奇 +1)	→◎
		偶點 <C2>	→偶、奇、偶、奇…偶、奇　(奇 +0)	→(奇＋ 1)

說　明：◎：可以一筆畫　　＋：多了一點

實驗六

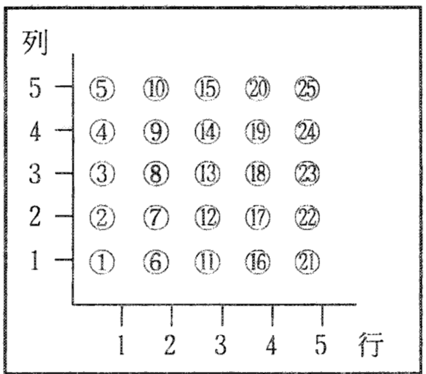
方　法：將 (4 × 4) 圖形路徑，從起點到終點，記錄每一個小點編號。

結　果：經過實驗，發現利用每一個小點的編號來記錄 (4 × 4) 的圖形路徑，會造成變化多端的現象，找不到規律性。

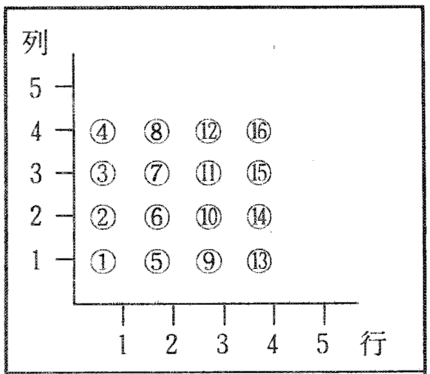
實驗七

方　法：1.用數學課本第十冊＜位置的表示＞所學到的 (行，列) 來表示每一個小點的位置，取代原來的編號。

2. (5 × 5) 和 (4 × 4) 圖形，每一小點的位置，我們排列如下圖：



(5 × 5) 實心方陣圖形



(4 × 4) 實心方陣圖形

3.將路徑圖上用 (行、列) 表示小點位置的數字，其中

①所有的奇數用〝奇〞表示。

②所有的偶數用〝偶〞表示。

結　果：經過實驗，路徑改用 (行，列) 表示小點位置，可以達到簡化的功用，我們以下圖爲例：

實驗八

方法：我們將：

1.座標（奇，偶）和（偶，奇）的小點用〝偶點〞表示。

2.座標（偶，偶）和（奇，奇）的小點用〝奇點〞表示。

結　果：經過比對，我們發現論點正確。不管（5×5）或（4×4）的圖形，路徑都按照＜奇、偶、奇、偶……＞或＜偶、奇、偶、奇……＞的方式配對排列。

實驗九

方　法：1.根據＜實驗八＞的技巧，將（奇×奇）型和（偶×偶）的圖形，找出全部可能的路徑。

2.利用這些路徑找出它們的變因及對圖形的影響。

結　果：1.從路徑圖歸納出〝影響圖形結果〞的因素，總共二個：

(1)圖形特徵　(2)起點特徵

2.路徑圖及結果，整理成下表：

圖形特徵	奇偶點關係	起點 (C)	路　徑	結　果
方陣圖 (奇×奇)型	→奇點數 > 偶點數 <A1>(奇+1)	奇點 <C1>	→奇、偶、奇、偶…奇、偶、奇	(奇+1)→◎
		偶點 <C2>	→偶、奇、偶、奇…偶、奇	(奇+0)→(奇+1)
方陣圖 (偶×偶)型	→奇點數 = 偶點數 <A2>(奇+0)	奇點 <C1>	→奇、偶、奇、偶…奇、偶	(奇+0)→◎
		偶點 <C2>	→偶、奇、偶、奇…偶、奇	(奇+0)→◎

說明：◎可以一筆畫　＋：多了一點

研究㈣原來的問題爲什麼會多了一點呢？

實驗十

方　法：按照題目的規定，把圖形空出一點，用＜實驗八＞方法，記錄路線圖裡的路徑特徵，看看與研究㈢是否相符。

結　果：1.歸維出〝影響空了一點的圖形結果〞的因素，總共三個：

(1)圖形特徵　(2)空點特徵　(3)起點特徵

造成八種結果

2.這八種結果我們歸納整理成下表：

圖形特徵	奇偶點關係	空點 (B)	起點 (C)	路　徑	結　果
方陣圖 (奇×奇)型	→奇點數 > 偶點數 <A1>(奇+1)	奇點 <B1>(奇-1)	奇點 <C1>	→奇、偶…奇、偶	(奇+0)→◎
			偶點 <C2>	→偶、奇…偶、奇	(奇+0)→◎
		偶點 <B2>(奇+1)	奇點 <C1>	→奇、偶…偶、奇	(奇+1)→(奇+1)
			偶點 <C2>	→偶、奇…偶、奇	(奇+0)→(奇+2)
方陣圖 (偶×偶)型	→奇點數 = 偶點數 <A2>(奇+0)	奇點 <B1>(奇-1)	奇點 <C1>	→奇、偶…奇、偶	(奇+0)→(偶+1)
			偶點 <C2>	→偶、奇…奇、偶	(偶+1)→◎
		偶點 <B2>(奇+1)	奇點 <C1>	→奇、偶…偶、奇	(奇+1)→◎
			偶點 <C2>	→偶、奇…偶、奇	(奇+0)→(奇+1)

〔研究五〕方陣問題的擴展

實驗十一

方　法：將選擇好的圖形依次去掉二個小點，再畫出路線圖，實驗會有那些結果。

結　果：*1.* 影響路線的因素，依舊三個，造成（ 2 × 3 × 2 ＝ 12 ）種路徑。

2. 這十二種路徑所造成的結果，如下表：

圖形特徵	奇偶點關係 (A)	空點 (B)	起點 (C)	路　徑	結　果
方陣圖	(奇×奇) 型 →奇點數 > 偶點數 <A1>(奇+ 1)	奇點 <B1>(奇-2)	奇點 <C1>	→奇、偶…奇、偶 (奇 +0)	→(偶 +1)
			偶點 <C2>	→偶、奇…奇、偶 (偶 +1)	→◎
		奇偶 <B2>(奇 +0)	奇點 <C1>	→奇、偶…偶、奇 (奇 +1)	→◎
			偶點 <C2>	→偶、奇…偶、奇 (奇 +0)	→(奇 +1)
		偶偶 <B3>(奇 +2)	奇點 <C1>	→奇、偶…偶、奇 (奇 +1)	→(奇 +2)
			偶點 <C2>	→偶、奇…偶、奇 (奇 +0)	→(奇 +3)
	(偶×偶) 型 →奇點數 = 偶點數 <A2>(奇+ 0)	奇奇 <B1>(奇-2)	奇點 <C1>	→奇、偶…奇、偶 (奇 +0)	→(偶 +2)
			偶點 <C2>	→偶、奇…奇、偶 (偶 +1)	→(偶 +1)
		奇偶 <B2>(奇 +0)	奇點 <C1>	→奇、偶…奇、偶 (奇 +1)	→◎
			偶點 <C2>	→偶、奇…偶、奇 (奇 +0)	→◎
		偶偶 <B3>(奇 +2)	奇點 <C1>	→奇、偶…偶、奇 (奇 +1)	→(奇 +1)
			偶點 <C2>	→偶、奇…偶、奇 (奇 +0)	→(奇 +2)

實驗十二

分　析：*1.* 圖形裡如果少了三點，影響路線結果的因素，依舊是三個，⑴圖形特徵⑵空點特徵⑶起點特徵

這三個因素會造成（ 2 × 4 × 2 ＝ 16 ）種不同的路徑和結果。

2. 這十六種路徑所造成的結果，我們推算出如下表：

3. 圖形空點數的多少，對路徑及結果的影響，可以依據下表的關係，加以推算：

空點數	圖型特徵	空點特徵	起點特徵	結果數	結　果　特　徵
0	2 ×	1	× 2	＝ 4	奇 +1 ～◎
1		2		＝ 8	奇 +2 ～偶 +1
2		3		＝ 12	奇 +3 ～偶 +2
3		4		＝ 16	奇 +4 ～偶 +3
4		5		＝ 20	奇 +5 ～偶 +4
5		6		＝ 24	奇 +6 ～偶 +5
6		7		＝ 28	奇 +7 ～偶 +6
……		……		……	………
ㄅ		(ㄅ +1)		4 × (ㄅ +1)	奇 +(ㄅ +1) ～偶 + ㄅ

4.圖形中不管空多少個小點，決定結果的技巧是：圖形特徵＋空點特徵－路徑特徵＝結果

五、研究結論

1.〝影響圖形會不會多了一點〞的第一個主要因素是：
起點特徵——有〝偶點〞和〝奇點〞二個變因。
2.〝影響圖形會不會多了一點〞的第二個主要因素是：
圖形特徵——有〝（奇×奇）型〞和〝（偶×偶）型〞二個變因。
3.〝影響圖形會不會多了一點〞的第三個主要因素是：
空點特徵——有〝偶點〞和〝奇點〞二個變因。
由於有了這三個因素，因此會造成（２×２×２＝８）種結果。
4.原問題屬於〝（奇×奇）型的圖形，空點是偶點〞，基本上已經多了二個奇點，如果以奇點當起點，會〝多了一點〞，如果以偶點當起點甚至於會造成〝多了二點〞的現象。
5.圖型中如果〝少了二點〞影響路線結果的因素，依舊有三個，造成（２×３×２＝12）種不同的路徑及結果。
6.圖型中如果〝少了三點〞，影響路線結果的因素造成（２×４×２＝16）種不同的路徑及結果。
7.如果空ㄅ點，則變因有（ㄅ＋１）個，造成２×（ㄅ＋１）×２種不同路徑和結果。
8.所有圖形中，不管空了多少個小點，決定圖形結果的技巧是：
圖形特徵＋空點特徵－路徑特徵＝結果

六、參考資料

(一)數學課本第九冊（對稱圖形）
(二)數學課本第十冊（位置的表示）
(三)數學課本第九冊（十進位）

評語

從一個簡單有趣的遊戲中，作者發現到一些難以理解的現象，竟因此而能做出很多有系統的實驗，觀察，並將問題與以分類統計，實屬難能可貴，從方陣進而聯想到長方陣，而做進一步的研究，精神及努力都值得讚賞！