

# 正多面體骰子的研究

## 高小組數學科第二名

台北市立師範學院附設實驗國民小學

作者：謝卓叡、賴緯綸

指導教師：蔡淑英

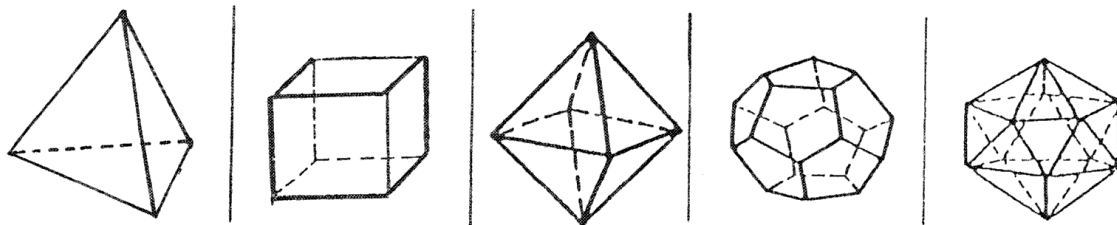
### 一、研究動機

今年暑假，我到同學家玩「大富翁」。當我們玩得正高興的時候，我發現用來決定前進多少步數的骰子，是個正六面體，面上分別標記著一到六個點，而相對的兩個面，點數加起來必定是 7。我心想：為什麼骰子上的點，都要這樣擺呢？難道就不能用其他的擺法嗎？如果把 1、2、3、4、5、6 六種點數，任意擺在正六面體的六個面上，會出現幾種變化呢？因此，在校內科展時，我就邀同學進行正四面體和正六面體骰子的研究。

若把 1、2、3、4 四個數，任意擺在正四面體的四個面上，滾動後會相同的視為同一型，我們發現：正四面體骰子只有 2 個類型；若把 1、2、3、4、5、6 六個數，任意擺在正六面體的六個面上，滾動後會相同的視為同一型，我們發現：正六面體骰子竟然有 30 個類型。我們把這幾個不同類型的骰子都做出來，並在校內科展時，將它們一一展現，和全校同學分享。

在享受研究發現的喜悅之餘，我們又發現：正四面體骰子的 2 個類型和正六面體骰子的 30 個類型可以用來解正四面體和正六面體的著色問題。很意外的，我們又找到二顆不同類型的正八面體骰子、一顆正十二面體骰子和一顆正二十面體骰子。這些正多面體骰子又各有幾個類型呢？引發了我們繼續研究的興趣！

正四面體      正六面體      正八面體      正十二面體      正二十面體



### 二、研究目的

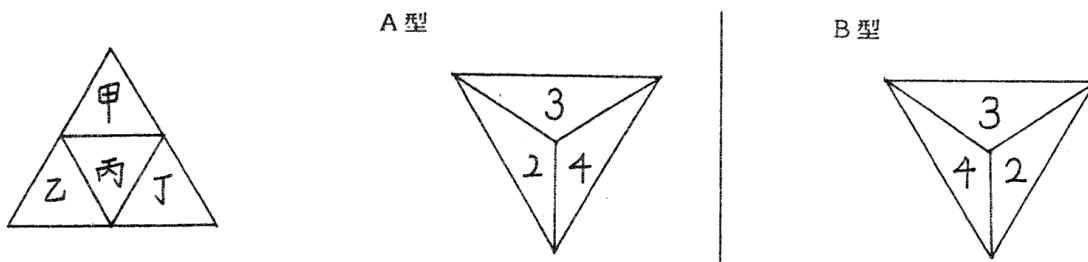
(一)研究正四面體骰子的類型、類型總數及其在著色問題上的應用。

- (二)研究正六面體骰子的類型總數、類型及其在著色問題上的應用。
- (三)研究正八面體骰子的類型總數及類型。
- (四)研究正十二面體骰子的類型總數及類型。
- (五)研究正二十面體骰子的類型總數及類型。

### 三、正四面體骰子的研究

#### (一)正四面體骰子的類型及類型總數

1. 選定正四面體的一個展開圖（圖一），並將四個面分別命名為甲，乙，丙，丁。若把 1、2、3、4 四個數，任意擺在甲、乙、丙、丁這四個面上，每個面各擺一個數字，數字不可重覆使用，那麼；正四面體的一個展開圖應該會有  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  種可能情形（圖略）。
2. 把正四面體 24 種展開圖，一一做成正四面體骰子，且把滾動後會相同的歸類為同一型，那麼我們發現正四面體骰子只有 2 個類型。每個類型有 12 種展開圖，此二型正四面體骰子互為鏡像（圖二）。



圖一 正四面體的一個展開圖

圖二 正四面體骰子的兩個類型

#### (二)應用骰子類型解正四面體著色問題

##### 1. 四色全選

###### (1)類型：

當用色方式為 WXYZ，共有  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  種展開圖，經由我們的研究發現只有 2 個類型，每個類型各 12 種展開圖。若把骰子上 1、2、3、4 四個數字，用來代表四種顏色，那麼我們發現：正四面體四色全選著色問題與求正四面體骰子類型總數是同一個問題。

###### (2)選色變化：

四種顏色均必須被使用一次，所以只有 1 種選色變化。

###### (3)著色方法：

用色方式	類型	同一用色方式內之選色變化	著色方法
WXYZ	2	1	2
總 計			2

1:1:1:1

綜合以上研究，正四面體四色全選的著色方法共有 2 種。

## 2. 三色全選

### (1) 類型：

當用色方式為 XYZZ 時，共有  $4 \times 3 \times 2 \times 1/2 = 12$  種展開圖，經由我們的研究發現只有 1 個類型。

比較二個不同類型的正四面體骰子，若將任意兩個面轉至相同位置，則另外兩個面的位置互換。因此，若正四面體骰子的任意兩個面被同一種顏色所取代，則這兩個不同類型的正四面體骰子會變成同一類型。

### (2) 選色變化：

其次考慮三種顏色中只有一種顏色必須被重複使用，所以 3 種選色變化。

### (3) 著色方法：

用色方式	類型	同一用色方式內之選色變化	著色方法
1 : 1 : 2 WXYZ	1	3	3
總 計			3

綜合以上研究，正四面體三色全選的著色方法有 3 種。

## 3. 正四面體二色全選的著色方法共有 3 種。

用色方式	類型	同一用色方式內之選色變化	著色方法
1 : 3 XYYY	1	2	2
2 : 2 XXYY	1	1	1

## 四、正六面體骰子的研究

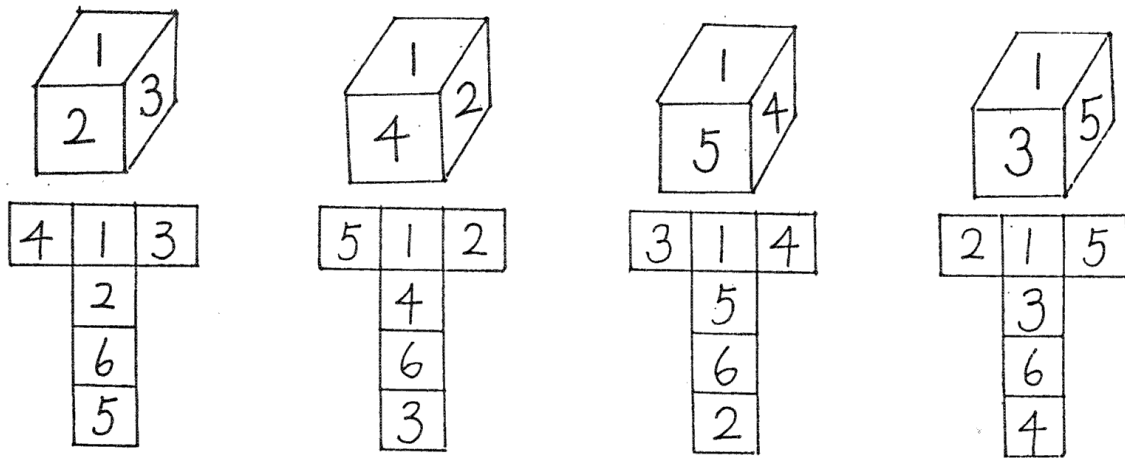
### (一) 中國傳統骰子的研究

我們將中國傳統骰子在空間中任意旋轉，將所看到的各種情形，以視圖記錄下來，並以展開圖表示：

#### 1. 中國傳統骰子在空間中的旋轉

當我們將 1 旋轉至最上面時，6 一定在最下面上，同時我們發現 2、3、5、4 依次序分布在四個側面上，當 2 旋轉至前面時 3 在右面，當 3 旋轉至前面時 5 在右面，當 5 旋轉至前面時 4 在右面，當 4 旋轉至前面時 2 在右面，換句話說，固定 1 在最上面時，可轉出 4 個視圖如下圖。同樣的 2、3、4、5、6 也都可以在視圖的最上面，所以，中國傳統骰子共

有 24 種視圖（圖略）及展開圖（圖略）。



### (二) 計算正六面體骰子的類型個數

選定正六面體的一個展開圖，並將六個面分別命名為甲，乙，丙，丁，戊，己。若把 1,2,3,4,5,6 六個數，任意擺在六個面上，那麼正六面體的展開圖應該會有  $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$  種可能情形。

由做正四面體的經驗，我猜任意將 1、2、3、4、5、6 擺在正六面體的六個面上，滾動後會相同的視為同一型，它的每一個類型都會和中國傳統骰子一樣，有 24 種可能情形。因此，正六面體骰子的類型個數應該有  $(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \div 24 = 30$  型。為了驗證此一猜測是否正確，我們把正六面體 720 種展開圖，一一做成正六面體骰子，且把滾動後會相同的歸類為同一型，我們發現正六面體骰子正好是 30 個類型。

### (三) 列舉出正六面體骰子的 30 個類型

若將 1 固定在最上面，最下面（對面）可以有 2,3,4,5,6 等五種情形，假若我們選定 2 在最下面，那麼 3,4,5,6 會分布在四個側面上，假若我們再將 3 旋轉至前面，那麼後面還有 4,5,6 三個數可以選，假若我們選定 4 在後面，右面尚有 5,6 兩種情形，假若我們選定 5 在右面，左面一定是 6。

### (四) 正六面體著色問題分析

在正六面體的著色問題中，我們覺得最困難的部分是：在確定用色方式之後，該用色方式會有幾個類型的問題。

例如：用色方式 XXYYYY，我們知道它有  $6 \times 5/2 = 15$  種展開圖。但是，其中有一類型（X-X,Y-Y,Y-Y）只有 3 種展開圖，而另一類型（X-Y,X-Y,Y-Y）有 12 種展開圖，因為這兩個類型的展開圖個數不相同，所以不能由 15 種展開圖除以某數之後，而得到類型個數。

我們列出正六面體骰子的 30 個類型，令  $1 = 2 = X$ ， $3 = 4 = 5 = 6 = Y$  然後逐一檢討，便可以知道該用色方式有幾個類型。

(五)應用骰子類型解正六面體著色問題

1. 六色全選

若把骰子上 1、2、3、4、5、6 六個數字，用來代表六種顏色，那麼我們發現正六面體六色全選著色問題與求正六面體骰子類型總數是同一個問題。因為正六面體骰子共有 30 個類型，故正六面體六色全選的著色方法共有 30 種。

2. 五色全選

用色方式	類型	同一用色方式內之選色變化	著色方法
VWXYZZ	15	5	75

3. 四色全選：正六面體四色全選著色方法共有 68 種。

正六面體四色全選的著色有兩種用色方式，WXYZZZ 及 WXYZZZ：

用色方式	類型	同一用色方式內之選色變化	著色方法
WXYZZZ	5	4	20
WXYZZZ	8	6	48

4. 三色全選：正六面體三色全選著色方法共有 30 種。

正六面體三色全選的用色方式有三種：XYZZZZ，XYZZZZ，XXYYZZ，

當用色方式為 XYZZZZ 時，共有  $6 \times 5 = 30$  種展開圖，經由我們的研究發現共有 2 個類型，

用色方式	平行面表示法	30 種展開圖的分布情形
XYZZZZ 1 : 1 : 4	(X-Y,Z-Z,Z-Z)	6
	(X-Z,Y-Z,Z-Z)	24

當用色方式為 XYZZZZ 時，共有  $6 \times 5 \times 4 / 2 = 60$  種展開圖，經由我們的研究發現共有 3 個類型，

用色方式	平行面表示法	60 種展開圖的分布情形
XYZZZZ 1 : 2 : 3	(X-Y,Y-Z,Z-Z)	24
	(X-Z,Y-Y,Z-Z)	12
	(X-Z,Y-Z,Y-Z)	24

當用色方式為 XXYYZZ 時，共有  $6*5*4*3/2*2 = 90$  種展開圖，經由我們的研究發現共有 6 個類型，

用色方式	平行面表示法	30 種展開圖的分布情形
XXYYZZ 2 : 2 : 2	(X-Y,Y-Y,Z-Z)	6
	(X-Y,X-Y,Z-Z)	12
	(X-Z,X-Y,Y-Z)	24
	(X-Z,X-Y,Z-Y)	24
	(X-X,Y-Z,Y-Z)	12
	(X-Z,X-Z,Y-Y)	12

用色方式	類型	同一用色方式內之選色變化	著色方法
XYZZZZ	2	3	6
XYYZZZ	3	6	18
XXYYZZ	6	1	6

## 五、正八面體骰子的研究

(一)正八面體骰子在空間中的旋轉

我們拿一顆正八面體骰子在空間中的旋轉，發現可以產生 24 種視圖。

(二)計算骰子的類型個數

選定正八面體骰子一個展開圖，並將八個面分別命名為甲，乙，丙，丁，戊，己，庚，辛。若把 1,2,3,4,5,6,7,8 八個數，任意擺在八個面上，每個面各擺一個數字，數字不可重覆使用，那麼，正八面體骰子的展開圖應該會有  $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$  種可能情形，其中每個類型有 24 種展開圖，所以正八面體骰子共有  $40320/24 = 1680$  個類型。

(三)寫出正八面體骰子 1680 個類型的方法，相關資料詳附件

## 六、正十二面體骰子的研究

(一)正十二面體骰子在空間中的旋轉

我們拿一顆正十二面體骰子在空間中的旋轉，發現可以產生 60 種視圖。

(二)計算骰子的類型個數

正十二面體骰子共有  $12 ! /60 = 7983360$  個類型。

(三)寫出正十二面體骰子 7983360 個類型的方法，相關資料詳附件

## 七、正二十面體骰子的研究

(一)正二十面體骰子在空間中的旋轉

我們拿一顆正二十面體骰子在空間中的旋轉，發現可以產生 60 種視圖。

(二)計算骰子的類型個數

正二十面體骰子共有  $20! / 60 = 40548366802944000$  個類型。

寫出正二十面體骰子  $40548366802944000$  個類型的方法，相關資料詳附件。

## 八、結論

(一)正多面體骰子，每個類型在空間中經由旋轉後所產生的視圖如下

正 n 面體	四	六	八	十二	二十
視圖(種)	12	24	24	60	60

(二)正多面體骰子的類型總數：

正 n 面體	四	六	八	十二	二十
類型總數	2	30	1680	7983360	40548366802944000

(三)應用骰子類型解正四面體著色問題：

著色問題	四色全選	三色全選	二色全選	二色任選	三色任選	四色任選
著色方法(種)	2	3	3	5	15	36

(四)在正六面體的著色問題中，我們覺得最困難的部份是：在確定用色方式之後，該用色方式會有幾個類型的問題。我們發現：只要列出正六面體骰子的 30 個類型，然後以顏色取代數字，逐一檢討，便可以知道該用色方式有幾個類型。

(五)應用骰子類型解正六面體的著色問題：

著色問題(N色全選)	六色全選	五色全選	四色全選	三色全選	二色全選
著色方法(種)	30	75	68	30	8

著色問題(N色全選)	二色任選	三色任選	四色任選	五色任選	六色任選
著色方法(種)	10	57	240	800	2226

## 評語

對多面體幾何有深入的了解，如正多面體只有 5 種，正多面體的對稱群，以及在對稱考慮下如何決定唯一，皆有完整的知識，透過方式與類型的計算，作者證明他們的結果一定是正確的。

表達非常的清楚有力，反映作者之一參加全國科展第三年的功力。

研究者合作無間也是特點。

裁判認為第一名的創意較高，故給予第二名，其實是一流的。