翻來覆去乾坤轉
—翻硬幣遊戲的新發現

高小組數學科第一名

台北市立文林國民小學

作　　者：戴湑琮
指導教師：許文化、鄭燕麗

一、研究動機

有一次我在趣味數學中發現一顆翻硬幣的題目，我發現很有趣又簡單，於是我花了幾小時將硬幣由正面翻到反面，並做好記錄，從記錄中居然可以發現一些規律性，而且硬幣數愈多，排法也變化愈多，於是我開始做記錄找資料，研究這千變萬化而又有趣的問題。

二、研究方向

我定了下列的研究方向，希望能探討翻硬幣遊戲的規律性。

㈠固定數翻遊戲的規律性。
㈡連續數翻遊戲的規律性。
㈢倍數翻遊戲的規律性。
㈣因數翻遊戲的規律性。

三、文獻探討

㈠凡異出版社〝趣味數學300題〞一書中，有關定數翻的題目並附解答。
㈡台灣書局〝搶三十〞一書中，有談到倍數翻的題目並解答。
㈢謙謙出版社〝解題思路訓練〞一書中，有談到翻杯子的遊戲與翻硬幣遊戲相同。

四、研究材料與工具

㈠材料：棋子，記錄紙，筆記簿。
㈡工具：鉛筆，原子筆，計算機。

五、研究過程

㈠固定數翻遊戲的研究：

1. 了解固定數翻遊戲的規則：

將正反兩面硬幣以○×表示，○是正面，×爲反面。

<翻硬幣前>	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
<翻硬幣後>	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×

遊戲規則：

⑴先有 n 個硬幣，每次翻固定數，直到全部由正面翻到反面爲止。

⑵完成翻硬幣的步數以最小爲標準。

⑶翻覆的過程中，排列可以自由變換。

2. 前人的研究結果：

⑴如果全部硬幣數爲奇數，可翻硬幣數爲偶數時，無解。

⑵用分析的方法求出結果，非常繁雜。

⑶翻茶杯遊戲的解題方法用＋1與－1來表示正反兩面，再以乘法的方法來求解。這種解題方式不合邏輯。

3. 固定數翻是否有規律性：

我將固定數翻的遊戲研究歸納爲<表一>

可翻硬幣數

全部硬幣數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	1													
2	2	1												
3	3	×	1											
4	4	2	4	1										
5	5	×	3	×	1									
6	6	3	2	3	6	1								
7	7	×	3	×	3	×	1							
8	8	4	4	2	4	3	8	1						
9	9	×	3	×	3	×	3	×	1					
10	10	5	4	3	2	3	4	3	10	1				
11	11	×	5	×	3	×	3	×	3	×	1			
12	12	6	4	3	4	2	4	3	4	3	12	1		
13	13	×	5	×	3	×	3	×	3	×	3	×	1	
14	14	7	6	4	4	3	2	3	4	3	6	3	14	1

從＜表一＞中我可以發現下面的結論：

(1)全部硬幣數與可翻硬幣數相同時，1 步可翻完。

(2)全部硬幣數為 n 而可翻硬幣數為 2 時，則 n/2 可翻完，若可翻硬幣數為 n/2 時則 2 步可翻完。

(3)全部硬幣收為 n 而可翻硬幣數為 n-1 時，則 n 步翻完。

(4)三步可翻完的情形很多，有規律性。

我將三步翻完的情形做進一步的分析，列表如下：

全部硬幣數 (a)	3	6	9	12	15	18	21	………	a=3b
全部硬幣數 (b)	1	2	3	4	5	6	7	………	

上列表中為首項再分列為＜表二＞

全部硬幣數 (a)	3	4	5	6	7	8	9	………	a=2+b
全部硬幣數 (b)	1	2	3	4	5	6	7	………	
全部硬幣數 (a)	6	7	8	9	10	11	12	………	a=4+b
全部硬幣數 (b)	2	3	4	5	6	7	8	………	
全部硬幣數 (a)	9	10	11	12	13	14	15	………	a=6+b
全部硬幣數 (b)	3	4	5	6	7	8	9	………	
全部硬幣數 (a)	12	13	14	15	16	17	18	………	a=8+b
全部硬幣數 (b)	4	5	6	7	8	9	10	………	

由＜表二＞中可得知：凡符合 $a \leqq 3b$ 且 $a = 2n + b$ 就可以三步翻完，即全部硬幣數大於可翻硬數的 3 倍，且同奇偶。這個規律可以無限往後延伸；經推論與驗證的完全正確。

4. 三步翻完的原因探討：

我用解重排群的方式探討硬幣正反面的數量變化為＜表三＞

可翻硬幣數	1		2			3				4				
一次變動正面的量	1	0	2	1	0	3	2	1	0	4	3	2	1	0
一次變動反面的量	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4
一次增減的正面量	1	-1	2	0	-2	3	1	-1	3	4	2	0	-2	-4

若全部硬幣數為 a，可翻硬幣數為 b，只翻一次增減量為 c，則 $a = 2b + c$，故同奇偶且 $a \leqq 3b$，則可 3 步翻完。這也可以證明奇數翻偶數無解的原因。

5. 固定數翻的解題方法

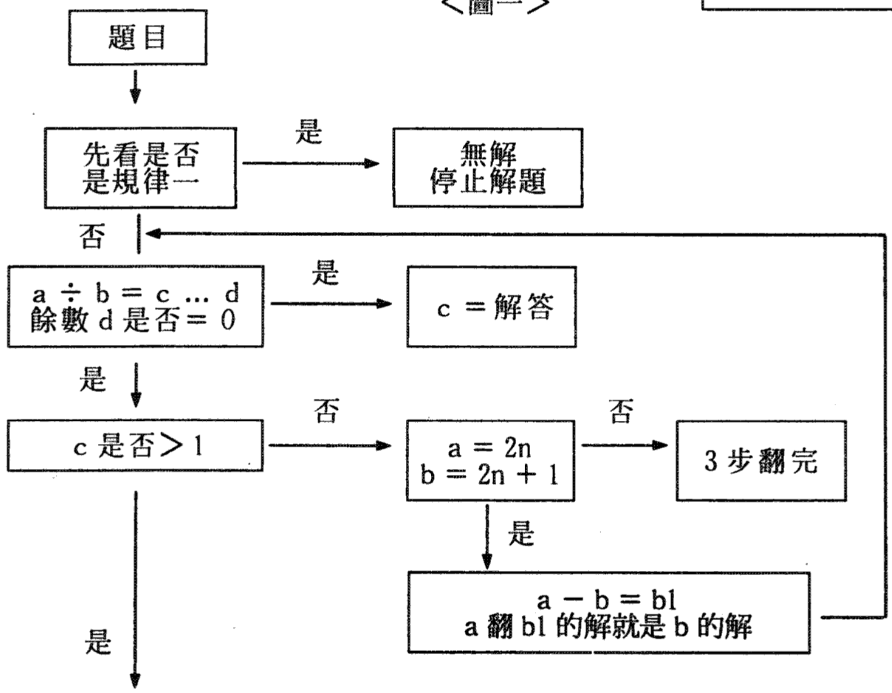
依前面的研究結果，茲歸納了兩個規律。

規律一：若全部硬幣數 (a) 爲奇數，可翻硬幣數 (b) 爲偶數，則無解。

規律二：全部硬幣數爲 (a) ，可翻硬幣數爲 (b) ，$a \leqq 3b$ ，而且 a 、 b 爲同奇偶時， 3 步可翻完。

解題流程圖

<圖一>



	b − d > d	b − d < d	b − d = d
同奇偶	c + 1 = 解	c + 1 = 解	無　解
異奇偶	c + 2 = 解	c + 2 = 解	c + 1 = 解

依解題流程，任何一個固定數翻的問題都可迎刃而解。

6. 固定數翻遊戲的變化

如果我們考慮「分牛傳說」中借與還的問題，全部硬幣數爲偶數，可翻硬幣數爲奇數，就會得出 2 步就可翻完的結果；在<圖一>中，只要將 c 是否 > 1 的部份除去，就可解答。

(二)連續數翻遊戲的研究

1. 了解連續數翻的遊戲規則：

(1)定數的硬幣翻動時由 1 開始，以連續數由正面翻到反面。

(2)完成的步數以最少爲準。

2. 連續數翻是否有規律性？

我將原始資料由圖示改變數字歸納爲＜表四＞

全部硬幣數	翻完次數	全部硬幣數	翻完次數
1	1	16	7
2	×	17	6
3	2	18	7
4	3	19	6
5	5	20	7
6	3	21	6
7	5	22	7
8	4	23	9
9	5	24	7
10	4	25	9
11	5	26	7
12	7	27	9
13	5	28	7
14	7	29	9
15	5		

將翻動步數的奇偶分佈情形分列下表：

翻動步數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
反面（×）的奇偶	奇	奇	偶	偶	奇	奇	偶	偶	奇	奇	偶	偶

這樣可以得到「以兩個連續數爲一組，隨著奇奇偶偶排列」

3. 最少步數規律性的研究：

由＜表四＞中我發現最少步數在全部硬幣數 1,3,6,10,15,21 ……會產生變化，最少翻完步數由 1 開始以連續數遞增。分析如下表五：

全部硬幣數列	第一次差	第二次差
	1	
1		
	＞ 2	
3		＞ 1
	＞ 3	
6		＞ 1
	＞ 4	
10		＞ 1
	＞ 5	
15		＞ 1
	＞ 6	
21		＞ 1
	＞ 7	
28		

最少步數時全部硬幣數	觀察到的規律情形
1	1
3	1 + 2
6	1 + 2 + 3
10	1 + 2 + 3 + 4
15	1 + 2 + 3 + 4 + 5
21	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
28	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7

4. 最少翻完次數的個數研究：經分析列＜表六＞如下：

翻完次數爲偶數(n)	個數(m)	差數	翻完次數爲奇數(n)	個數(m)	差數
2	1	＞1	1	1	＞2
4	2	＞1	3	3	＞3
6	3		5	6	

由＜表六＞可推出最少翻完次數的個數公式：

翻完次數爲偶數時 $m=\frac{n}{2}$，翻完次數爲奇數時 $m=\frac{3n-3}{2}$

5. 解題分析：

由＜表五＞中求得公式 $\frac{n(n-1)}{2}=m$ 經分解爲 $\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}=P$

步驟一：先將求解的全部硬幣數爲 m，代入 $\frac{1+\sqrt{8m+1}}{2}=P$，若 P 爲整數時則爲解。P 有小數則需代入步驟二。由＜表五＞中求得知 $a=0$，$b=1$ 時，$\frac{n(n-1)}{2}=m$，是 a 爲正整數 $a+1=b$，因爲 a 爲未知數，故求 n 時要以 $\frac{([P]+a)([P]+b)}{2}=K$ 來試算，K 爲最少數數的位置，〔 〕爲高斯符號。

步驟二：先假設 $a=1$，$b=2$，代入 $\frac{([P]+a)([P]+b)}{2}$ 求解，若 K 與 n 的奇偶相同則 $P+K=$ 解。若奇偶不同則 $a+1$ 求解。

㈢倍數翻遊戲的研究

1. 了解倍數翻遊戲的規則：

⑴硬幣從翻動起，排列次序不得顚倒。次序爲 1 時，翻動 1 的倍數，次序爲 2 時翻動 2 的倍數，以此類推。

⑵翻覆的結果並不是要求全部硬幣爲×，而是求其排列。

2. 倍數翻遊戲的再發現：

我將前人的研究結果，即翻動後平方數爲反面，其餘爲正面，我將平方數分解其因數得知每個平方數有奇數個因數形成。我又將原始資料的結果歸納。得到一些發現。

⑴在翻的過程中，大的次數包函於小的次數。

⑵結果會產生循環結，這些都是 n 次翻的最小公倍數，若去掉最後一個翻數，兩邊出現相反的對稱性。

⑶全部硬幣數 ÷ 2 時，前半段平方數爲反面，其餘爲正面。後半段則是平方數爲正面，其餘爲反面。

3. 解題分析：

因爲每一橫排都可無限的求其循環結，若設全部硬幣數爲 m，第幾次翻爲 n，其求解方式如下：

(1)求解 m 次翻時，只要將平方數翻爲反面，其餘爲正面。（ m/n = 1 以下時適用。）

(2)求解 2m 次翻時，平方數爲正面，其餘爲反面。（ m/n = 1 以上至 2 時適用。）

(3)求解 3m 次翻時，奇數爲反面，偶數爲正面。如遇平方數超過找出 n 的公因數時，奇爲×偶爲 0，按加法規律表求出。（ m/n = 2 以上至 3 時適用）

(4)求解 4m 次翻時，質數與 6 的倍數爲反面，而平方數用 3n 的求法可解，其他都爲正面。（ m/n = 3 以上至 4 適用）

4. 求任何一格正反面的方法：

設第幾次翻爲 n，第幾個數爲 P；P 的因數中小於 n 的數，如果有偶數個則爲正面，如果有奇數個則爲反面。

5. 探討有人放棄翻的情形：

第一個人放棄的結果爲凡 1 的倍數與正常結果相反。

第二個人放棄的結果爲凡 2 的倍數與正常結果相反。

第三個人放棄的結果爲凡 3 的倍數與正常結果相反。

故凡是放棄含有的倍數的正反面，和正常情形的正反面相反，因爲放棄的位置，少一個因數翻反面所形成。

(四)因數翻遊戲的研究

1. 因數翻的遊戲規則：與倍數翻大致相同，其差別爲翻動硬幣的次序爲全部硬幣數的因數。

2. 因數翻遊戲的規律性：將研究資料列＜表七＞。

1	×									
2	×	○								
3	×	×	○							
4	×	○	×	×						
5	×	×	×	×	○					
6	×	○	○	○	×	○				
7	×	×	×	×	×	×	○			
8	×	○	×	×	×	○	×	○		
9	×	×	○	×	×	○	×	×	×	
10	×	○	×	○	○	○	×	○	×	○

由<表七>中有下列的發現：

(1)在翻的次數爲平方數時，其最後一個爲反面，其餘爲正面。

(2)在翻的次數爲質數時，那一橫排的最後一個爲正面其餘爲反面。

3. 因數翻的求解：

我將翻覆次數的公因數列表，有下列發現：

(1)要求解的硬幣數和全部硬幣數，有奇個公因數爲反正，偶數個公因數則爲正面。

(2)在<表七>中得知，每一橫排、直排、斜排都有規律性，這規律性可無限向下延伸，也可以改成輾轉相除法來解答。輾轉相除的結果爲平方數則是反面，其他都是正面。

六、結論

(一)固定數翻遊戲結論：

1. 全部硬幣數爲 n，可翻硬幣數爲 (n − 1) 時，可 n 步翻完。
2. 三步翻完的部份具有解題之關鍵性與規律性，必需符合 $a \leqq 3b$ 且 $a = 2n + b$ 兩個條件。
3. 用重排群的觀念可證明奇數個硬數翻偶數個不能翻完的原因。

(二)連續數個翻遊戲結論：

1. 最少翻完步數以兩個連續爲一組呈現奇奇偶偶……規律排列。
2. 若全部硬幣數爲 (n) 是從 1 開始連續數相加的總和，則 $\frac{n(n+1)}{2} = m$ 可最少步數翻完。
3. 硬幣數爲 (m)，翻完次數爲 (n) 時，最少翻完次數爲偶數時 $m = \frac{n}{2}$，最少翻完次數爲奇數時 $m = \frac{3n-3}{2}$。（1 例外）

(三)固定數、連續數、因數、倍數的翻硬幣遊戲均已發現解題方式，可參見研究過程。因數翻與倍數翻的結論，篇幅不足從略。

七、參考書目

(一)趣味數學 300 題—凡異出版社。(二)搶 30 —台灣書局。

評語

翻硬幣是一種方法簡單，但變化很多的益智問題，作者作了許多有意義的推廣，尤其是連續翻，很有創意，在需要一元二次方程解的地方，作者也展現他對數學了解的深度，如果不是與作者深入訪談，是無法令人置信的。

作者在研究記錄或活動的熟練，都一再顯示是作者，而非指導者的努力。