

倒三角形

初小組數學科第三名

嘉義市嘉北國民小學

作者：黃千娟、胡嵐茵、盧盈璋、王紹任

指導教師：蔡淑媛、陳菊花

一、研究動機

上數學課老師教我們用石子排列成三角形，並要我們搬動成倒三角形，層次少的三角形，很快就可以搬成倒三角形，如果三角形很大是不是也可以很快的把它搬動完成呢？老師告訴我們這是一件很有趣的數學問題，要我們繼續玩，同時把三角形一層一層的加大並作整理，看看能不能發現一些有趣的數學原理，因此我們決定繼續的玩下去。

二、研究目的

1. 研究正三角形搬動成「倒三角形」的方法及其所需的最少步數。
2. 研究搬動的一般公式或原則。

三、研究器材及設備

紙、筆、石子、銅版。

四、研究過程及結論

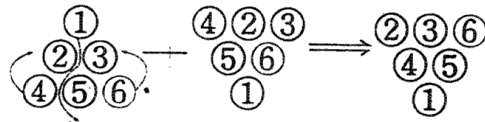
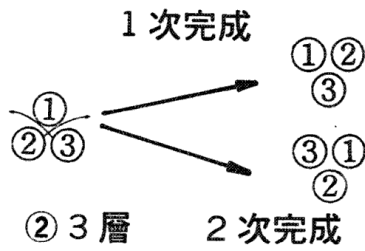
(一)搬動規則：

1. 每次搬動一粒為原則。
2. 每次搬動的排放位置不限制，但以能完成相同形狀的倒立圖形為目的。
3. 為使方便分析研討，將部分排列個數「數字化」或列註「阿拉伯數」以便分別。

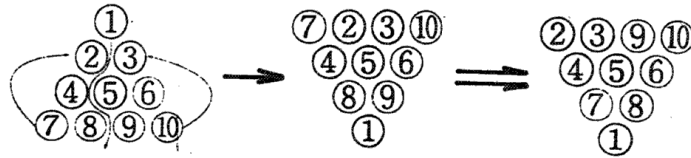
(二)正三角形的搬動研討：

範例：

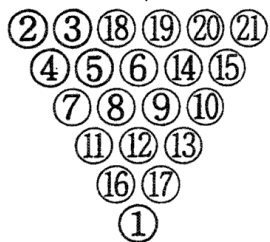
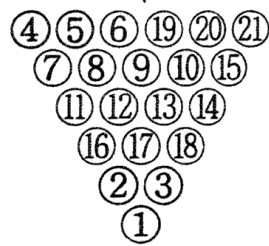
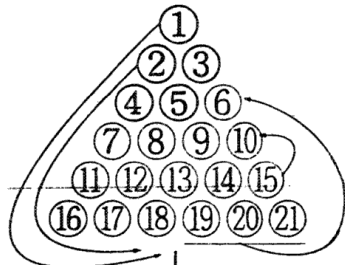
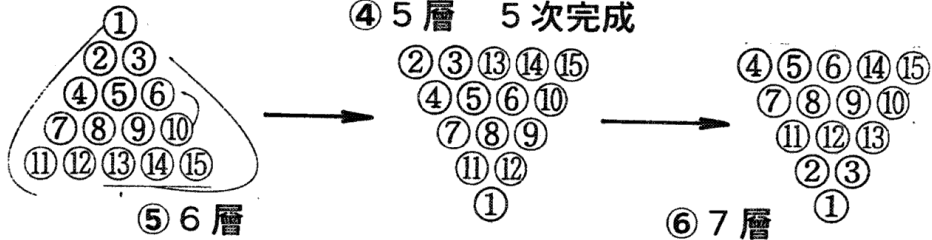




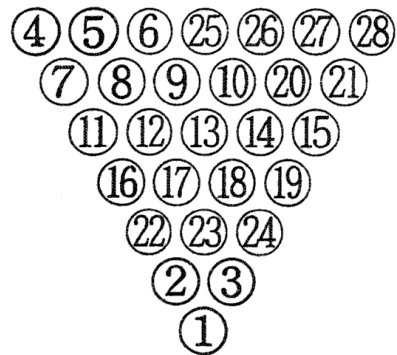
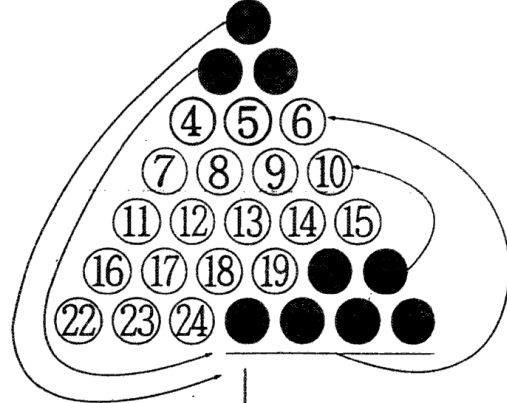
③ 4 層 3 次完成



④ 5 層 5 次完成

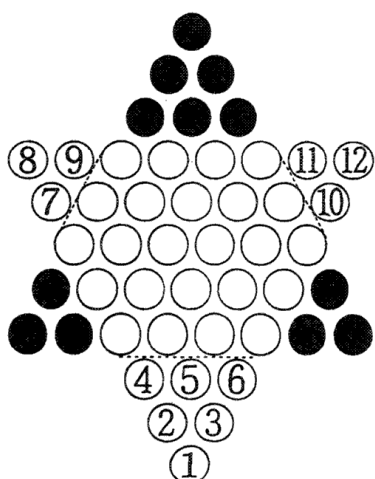


7 次完成

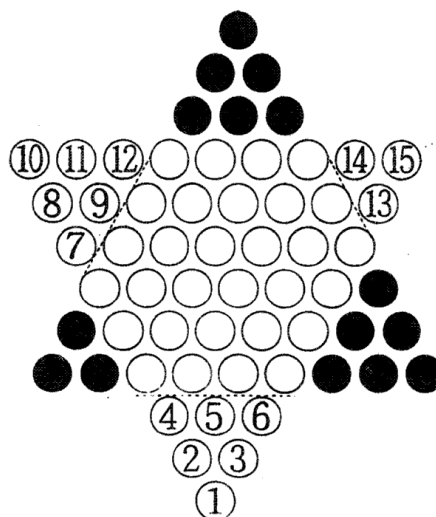


9 次完成

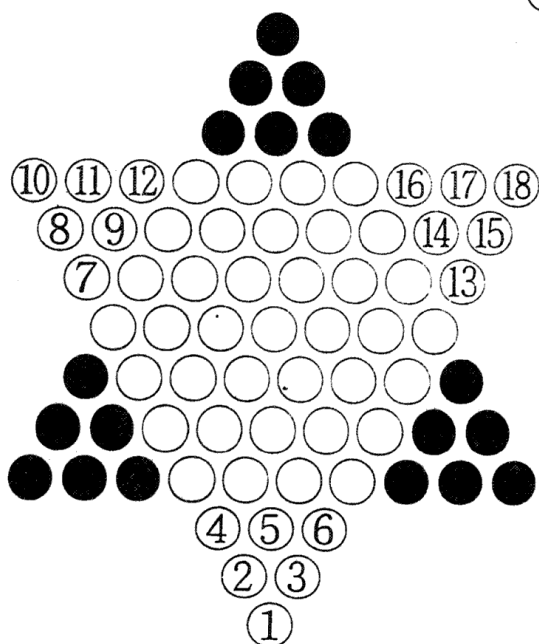
⑦ 8層 12次完成



⑧層 9次完成



⑨ 10層



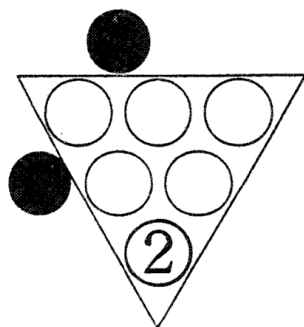
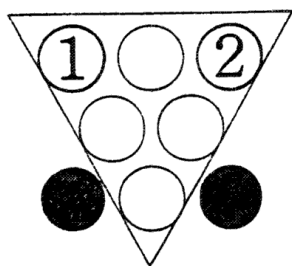
18次完成

(三) 正三角形最少次數搬動公式推算：

1. 三角形顆粒堆列層數為3的倍數

勺：推列層數， 女：倍數 勺 = 3 女

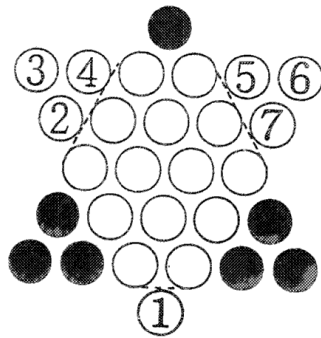
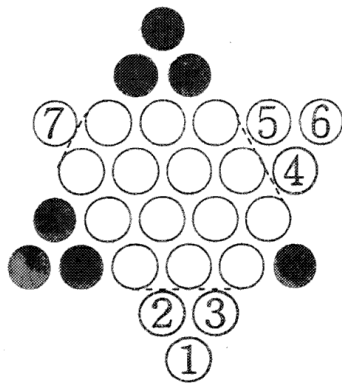
① 3層 (女 = 1, 勺 = 3)



(甲) 3層搬動2次完成。

(乙) 搬動層次在「1」或「2」
結果相同。

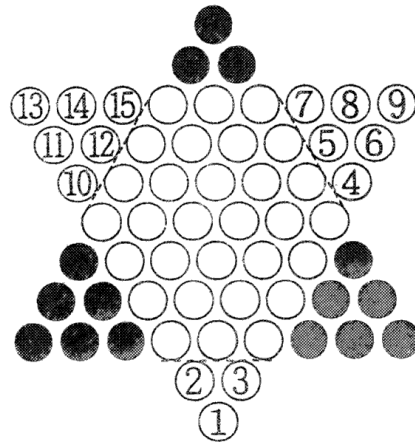
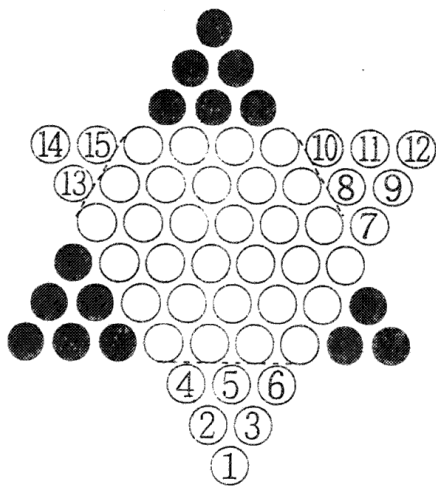
② 6層 ($n = 2$, $k = 6$)



(甲) 6層搬動 7 次完成。

(乙) 搬動層數在「1」或「2」層，結果相同。

② 9層 ($n = 3$, $k = 9$)



(甲) 9層搬動 15 次完成。

(乙) 搬動層次在「2」或「3」層，結果相同。

2. 分析：

① 當 $k = 3n$ 時，由 n 層或 $(n - 1)$ 層搬動均能獲得最少次數完成搬動。

② 若 $k = 3n$ 時，

範例：

$$n = 1 \quad k = 3 \quad 3 = 3 \times 1$$

$$n = 2 \quad k = 6 \quad 6 = 3 \times 2$$

$$n = 3 \quad k = 9 \quad 9 = 3 \times 3$$

⋮

$$\textcircled{3} \quad \text{ウ} = \text{ヌ} - 1$$

範例：

$$2 = 3 \times 1 - 1$$

$$5 = 3 \times 2 - 1$$

$$8 = 3 \times 3 - 1$$

⋮

$$\textcircled{4} \quad \text{ウ} = 3 \text{ヌ} + 1$$

範例：

$$\text{ヌ} = 0 \quad \text{ウ} = 1 \quad 1 = 3 \times 0 + 1$$

$$\text{ヌ} = 1 \quad \text{ウ} = 4 \quad 4 = 3 \times 1 + 1$$

$$\text{ヌ} = 2 \quad \text{ウ} = 7 \quad 7 = 3 \times 2 + 1$$

五、討論及應用

根據以上研究、分析、推理而研創出獨樹一格最少次數搬動公式，更能隨心所欲的應用於這種數學益智遊戲，以訓練科學思考與創造能力。

①正三角形公式及搬動要訣：（見附表）

②可提高學習興趣及學習效果，所以本研究更具趣味性和啓發性之功能，故而具有推廣價值。

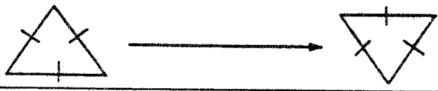
六、參考資料

△林篤英譯：數學活動（P.76、088 倒三角形）。

評語

本件作品是要在最短的步驟內將一三角形倒轉過來，作者對本方法非常純熟，相當不錯。

附表

圖形類別					
層數種類		ㄅ			
		$3\text{ㄅ}-1$	3ㄅ	$3\text{ㄅ}+1$	
最少次數 搬動公式		$\frac{\text{ㄅ}}{6}(\text{ㄅ}+1)$	$\frac{\text{ㄅ}}{6}(\text{ㄅ}+1)$	$\frac{1}{6}(\text{ㄅ}\times\text{ㄅ}+\text{ㄅ}-2)$	
各 種 層 數 最 少 搬 動 次 數		2	1		
	ㄅ = 1	3		2	
		4			3
		5	5		
	ㄅ = 2	6		7	
		7			9
		8	12		
	ㄅ = 3	9		15	
		10			18
		11	22		
	ㄅ = 4	12		26	
		13			30
		14	35		
	ㄅ = 5	15		40	
		16			45
		17	51		
	ㄅ = 6	18		57	
		19			63
		20	70		
	ㄅ = 7	21		77	
		22			84
		23	92		
	ㄅ = 8	24		100	
		25			108
	搬動要訣		ㄅ 或 $\text{ㄅ}-1$ $\frac{\text{ㄅ}}{3}$ 或 $\frac{\text{ㄅ}}{3}-1$ 層	ㄅ 或 $\text{ㄅ}-1$ $\frac{\text{ㄅ}}{3}$ 或 $\frac{\text{ㄅ}}{3}-1$ 層	ㄅ $\frac{\text{ㄅ}}{3}$ 層