兩共用重心三邊形轉換路徑的探討

國中組數學科第三名

基隆市立中正國民中學　　作　　者：劉信宏
指導教師：林耀南

一、研究動機

當數學老師上到三角形重心的畫法及性質時，我突然想起牛頓科學雜誌中談及的宇宙起源大爆炸 (BIG BANG) 與黑洞 (BLACK HOLE)，我想到在大爆炸之後造成數個星系，小如太陽系，大到比銀河系還大的星系，它們的結構特性都是有一重力中心，四周圍繞著衆多的星球，整個星系是平衡地旋轉著，又如黑洞，其中心點即爲一重力中心，周圍的星球因受其力量吸引而越繞越近，最後被吸入中心點，若我們假設每顆星球的質量都相等，並以三顆星圍繞著一重力中心開始，我們想要探討原三顆星如何轉換位置而移動到新位置且保持不變的重力中心，他們的轉換路徑是否可以用數學模式加以顯示？以下即爲我的探討。

二、研究目的

1. 在平面上建立一個重心坐標系統，使任意與系統基本三角形重心同重心的三角形皆能以此重心坐標系統加以表示。
2. 描述此系統運算中的圖形變化，並進一步希望能間接由系統坐標的運算組合觀察出將呈現的圖形特性。
3. 使任意一個與系統基本三角形共用重心的三角形，皆能以幾何作圖找出其轉換路徑。

三、研究過程

PART A. 三角形

㈠共用重心的兩三角形的證明：

1. 向內：

如圖(1)，若在△ ABC 的各邊上依相同的比例，取一線段，例如取 $\overline{AD} = 1/k\overline{AB}$，$\overline{BE} = 1/k\overline{BC}$，$\overline{CF} = 1/k\overline{AC}$，則△ ABC 之重心

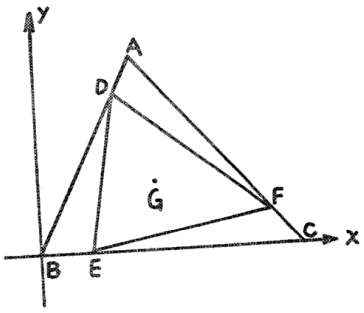


圖 1

G 與△ DEF 之重心 G′ 是否會重合？

我們利用平面坐標來探討這個問題。

得△ ABC 之重心 G 與△ DEF 之重心 G′ 會重合。

現在我們來觀察兩△之間的面積關係：

得△ DEF 面積：△ ABC 面積＝ $(k^2 - 3k + 3):k^2$

2. 向外：

又如圖(2)，若在△ ABC 各邊之延長線上依相同的比例取一線段，例如取 $\overline{AD} = k\overline{AB}$ ， $\overline{BE} = k\overline{BC}$ ， $\overline{CF} = k\overline{CA}$ ，

則△ ABC 之重心 G 與△ DEF 之重心 G′ 是否重合？

我們再用平面坐標來探討這個問題。

得△ ABC 之重心 G 與△ DEF 之重心 G′ 會重合。

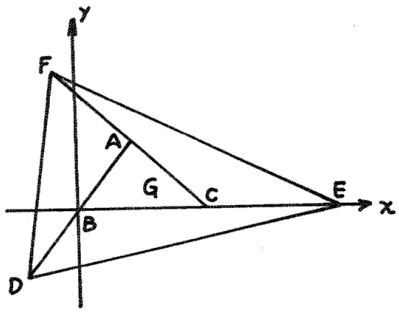


圖 2

現在我們來觀察兩△之間的面積關係：

得△ DEF 面積：△ ABC 面積＝ $(3k^2 - 3k + 1):1$

3. 更進一步的，在△ ABC 各邊延長線上所造成的△ DEF 中再將△ DEF 各邊作比例等分所形成的三角形之重心仍在 G ，如圖 3 所示。

4. 反之，在△ ABC 各邊作比例等分，所連成的△ DEF 中，再將各邊按同比例延長所形成的△ XYZ 仍與△ ABC 共用重心。如圖 4 所示：

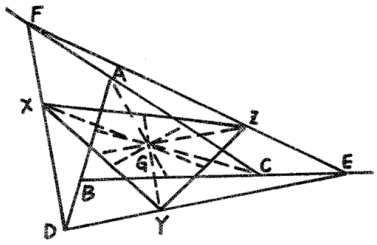


圖 3

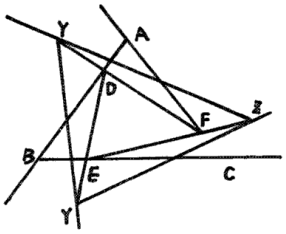


圖 4

㈡建立重心坐標系統：

1. 定義象限：

如右圖，以△ ABC 爲坐標軸，逆時針延長三邊爲正方向，各邊爲單位長，此三軸將平面分割成三塊區域及△ ABC 本身和本身，我們依逆時針稱此三區域爲第一、第二、第三象限。如圖 5 － 1

2. 定義符號：

△ (2,2,2) 表圖 5 － 2 之△ DEF

△ (⅓ , ⅓ , ⅓) 表如圖 5 － 3 之△ GHI

圖 5-1

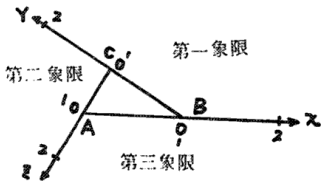
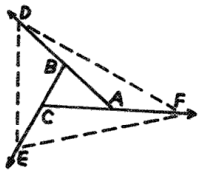


圖 5-2



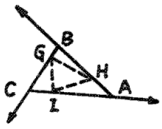


圖 5-3

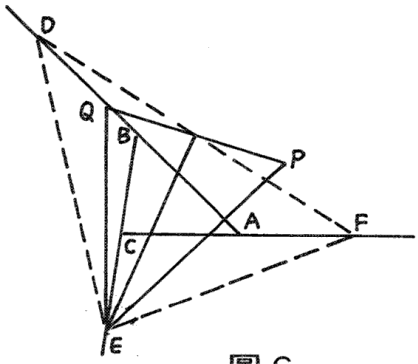


圖 6

3. 歸屬定義：

(1)性質：共用中線及頂點的兩三角形必共用重心。

(2)定義：如圖 6 ，△ EPQ 與△ DEF 共用重心，且△ DEF 爲△ (2,2,2) ，則△ EPQ 包含於△ (2,2,2) ，也就是說，△ EPQ 歸屬於△ DEF 。

4. 套數定義：一次延長比作圖或一次內縮比作圖皆定爲套數 1 ，若套數 1 之後再同法延長或內縮作△，則稱爲套數 2 。餘此類推。

5. 符號定義：符號〝⊗〞表示承接前一三角形，再繼續作下一三角形。

例如：

△ (2,2,2)⊗△ (3,3,3) 表先延長原邊長之爲兩倍，再延長爲三倍所成之△。

△ (½ , ½ , ½)⊗△ (⅓ , ⅓ , ⅓) 表先內縮取原邊長之½倍，再取第二次形成邊長之內縮爲⅓倍所成之△。

㈢運算與圖形之觀察：

1. 內縮圖形：

$\triangle^{n}(1/10,1/10,1/10)$

△ ABC →△ DEF

△ DEF = $(73/100)^{n}$ △ ABC （面積）

（圖 7 － 1 ）

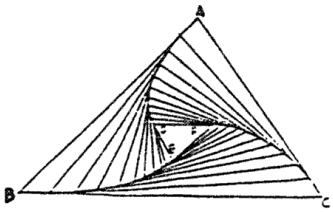


圖 7-1

2. 外脹圖形：

$\triangle^{n}(1.1 ， 1.1 ， 1.1)$

△ ABC →△ DEF

△ DEF = $(1.33)^{n}$ △ ABC （面積）

（圖 7 － 2 ）

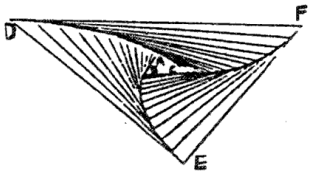


圖 7-2

3. 內縮與外脹混合圖形：

(a) ：$[\triangle(1.1 ， 1.1 ， 1.1)\otimes\triangle(-1.1 ， -1.1 ， -1.1)]^{n}\otimes\triangle ABC$

$\otimes[\triangle(1/10 ， 1/10 ， 1/10)\otimes\triangle(-1/10 ， -1/10 ， -1/10)]^{n}$

（圖8－1）

(b)：△(1.1，1.1，1.1)⊗△ABC⊗△(1/10，1/10，1/10)

（圖8－2）

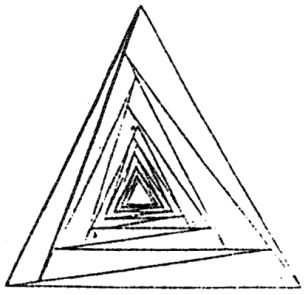


圖8-1

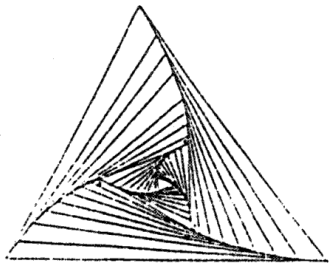


圖8-2

㈣反之，我們要做出一個已知面積和套數的△時，可以根據面積關係式及運算符號組合將可能的圖形逐一的畫出來，現以外脹爲例：

1. 當△DEF爲△ABC的64倍時，

（此時共有兩種可能的組合，在此僅取一例）

套數＝1，則 $k = (1+\sqrt{85})/2$

運算式：$\triangle(k_1, k_1, k_1)$

（圖9－1）

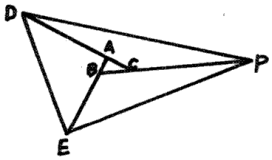


圖9-1

2. 當△DEF爲△ABC的64倍時，

（此時共有四種可能的組合，在此僅取一例）

套數＝2，則 $k = (3+93)/6$

運算式：△(k，k，k)

○△(k，k，k)（圖9－2）

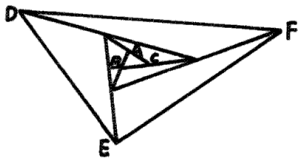


圖9-2

3. 當△DEF爲△ABC的64倍時，

（此時共有八種可能的組合，在此僅取一例）

套數＝3，則 $k = (1+\sqrt{5})/2$

運算式：$\triangle(k_3, k_3, k_3)$

$\otimes\triangle(k_3, k_3, k_3)$

$\otimes\triangle(k_3, k_3, k_3)$

$=\triangle^3(k_3, k_3, k_3)$

（圖9－3）

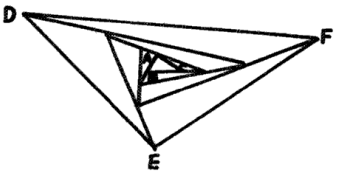


圖9-3

我們把套數和k的關係，做成表格如下：

1. 當△DEF爲△ABC的64倍：

套數	1	2	3	……
k	$(1+\sqrt{85})/2$	$(3+\sqrt{93})/6$	$(1+\sqrt{5})/2$	……

2.當△ DEF 爲△ ABC 的¼倍：

套數	1	2	3	…..
k	2	$(3+\sqrt{3})$ or$(3-\sqrt{3})$	$(6+3\sqrt{2}+2\sqrt{6\sqrt{2}-3}+\sqrt{12\sqrt{2}-6})/2$ or $(6+3\sqrt{2}-2\sqrt{6\sqrt{2}-3}+\sqrt{12\sqrt{2}-6})/2$	…..

當套數再增加時，同樣可求出 k ，但此時圖形可能組合的種類成 2 的次方倍增加，也就是說有無數個相同面積而與原三角形共用重心的三角形。

㈤又在重心坐標系統中任一象限上的任一點，是否可以找出套數一的三角形？又運算式爲何？

⑴我們首先在△ ABC 的 $\overline{BC}$ 上任取一點 D ，設 $\overline{CD}$ ： $\overline{DB}$ = a ： b ，連 $\overline{GD}$ ，並延長之，交△ XYZ 的一邊 $\overline{XZ}$ 於 P 點，設 $\overline{PG}$ ： $\overline{DG}$ = i ： j 。（△ XYZ 爲△ ABC 的外脹三角形，外脹比爲 1:k ，如圖 10 ）

我們利用代數運算，求得下列數據：

1 : k / i : j / a : b	1 : 2	1 : 3	1 : 4	1 : 5	公 式 歸 納
7 : 8	35/13	95/21	185/29	305/37	$5(3k^2-3k+1)/8k-3$
2 : 3			185/32		
3 : 7			370/73		
1 : 2		19/5	37/7		
公式歸納	$37(a+b)/(10b+a)$				

直行歸納出： i/j 爲 $37(a+b)/(10b+a)$

橫列歸納出： i/j 爲 $5(3k^2-3k+1)/8k-3$

由直行，橫列交叉點的位置，將 k = 4 代入 $3k^2-3k+1$ ，得 $3k^2-3k+1=37$ ，又在歸納 1:k = 1: 5 時，亦是如此，且分母爲 13b + a ，因此直行的通式應爲： $(a+b)(3k^2-3k+1)/(bL+a)$ 。接著再由直行，橫列交叉點的位置令 $5(3k^2-3k+1)/8k-3=(7+8)(3k^2-3k+1)/8L+7)$ ，得 $L=3k-2$ ，爲了驗證上述資料公式之正確性，我們找了另一組資料： 1:k = 1:3 ， a:b = 1:2 ，線段比值 19/5 代入檢驗證明，結果是正確的。

(2)①現在我們可以依據上述公式求出 k ，使在△ ABC 重心坐標系統上任一象限內的任一點，均可以找出一個共用重心且合乎本系統的三角形，方法如下：

(1)連 $\overline{GD}$ ，得 a:b 和 i:j 。

(2)代入 $(a + b)(3k^2 - 3k + 1)/(bL + a) = i/j$ ，又 $L = 3k - 2$ ，即可得到 k 值。

(3)以此 k 值，在△ ABC 的重心系統上，做出所要的三角形。（圖 10 ）

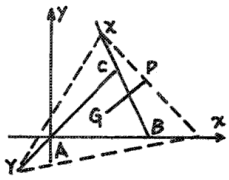


圖 10

②當 P 點在△ ABC 重心系統的坐標上時，如圖 11 。我們可依 $\overline{AP}:\overline{AB}$ 的比例在另兩軸上各取一點，得出套住 P 點的三角形。

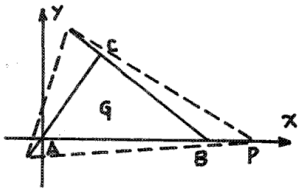


圖 11

③當 P 點在△ ABC 內部時，我們先用（ ½ , ½ , ½ ）的比例，作出△ DEF ，使 P 點在△ DEF 的外部。再利用與 P 在外部相同的方式，作出△ XYZ ，使 P 點在△ XYZ 的 $\overline{XZ}$ 上。如圖 12 。

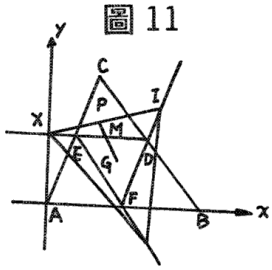


圖 12

經由以上的探討，在直角坐標平面上，我們設 P 點爲△ PQO 的頂點，那麼可以用以下的方式，求出與系統基本△ ABC 共用重心的△ PQO 的轉換路徑。

(1)當 P 點在△ ABC 的外部時：

我們先以數的方式，做出一個套數一的外脹△ XYZ 使 P 點在 $\overline{XZ}$ 上，再以 $\overline{PZ}:\overline{XZ}$ 的比例作△ XYZ 的內縮△ PMN ，則我們可以用△ ABC⊗△ XYZ⊗△ PMN⊗△ PQO 表示△ PQO 的轉換路徑。如圖 13 。

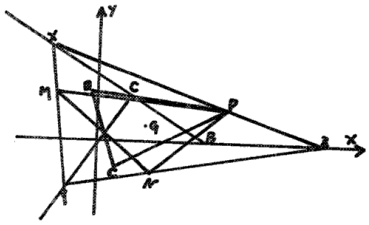


圖 13

(2)當 P 點在△ ABC 邊的延長線上時，我們可用上述的方式，做出外脹△ PMN ，如圖 14 ，則我們可以用△ ABC⊗△ PMN⊗△ PQO 表示△ PQO 的轉換路徑。

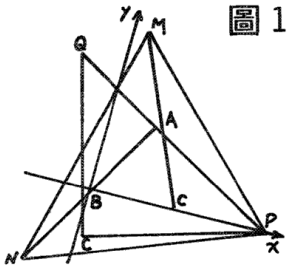


圖 14

(3)當 P 點在△ ABC 的內部時，我們可用上述的方式，作出一三角形 XYZ ，使 P 點在 XZ 上，再以 XP:PZ 的比例，作出△ PMN ，則我們可以用△ ABC⊗△ DEF⊗△ XYZ⊗△ PMN⊗△

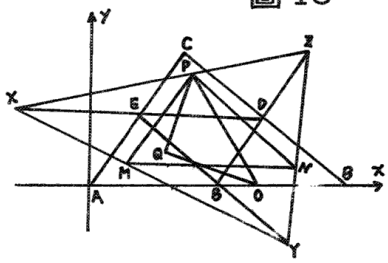


圖 15

PQO 表示△ PQO 的轉換路徑。如圖 15 。

㈥共用重心的兩三角形轉換路徑探討：（幾何作圖方法）

狀況 1 ：當 D 點， A 點， G 點三點不共線時：

已知：△ ABC 與△ DEF 共用重心。

求作：△ ABC 與△ DEF 之轉換路徑。

作法：(1)連 $\overline{DG}$ ，交 $\overline{AC}$ 於 P 。

(2)依 $\overline{AC}$:$\overline{PC}$ 之比例，在△ ABC 的三邊作兩點 R ， Q 。

(3)過 D ，作 L1 // $\overline{PQ}$ ， L2 // $\overline{PR}$ 。

(4)連 $\overline{GR}$ ， $\overline{GQ}$ 並延長，交 L1 於 S ，交 L2 於 T 。

(5)連 ST ，則△ ABC 轉換成△ DEF 。（如圖 16 ）

轉換路徑：△ ABC⊗△ PQR⊗△ DST⊗△ DEF

狀況 2 ：當 D 點， A 點， G 點三點共線時：

已知：△ ABC 與△ DEF 共用重心， G 爲重心，且 D 點在 $\overline{AG}$ 上，

求作：△ ABC 與△ DEF 之轉換路徑。

作法：(1)過 D 點，作 M1 // $\overline{AB}$ ， M2 // $\overline{AC}$ 。

(2)連 $\overline{GB}$ 、 $\overline{GC}$ ，交 M1 於 S ，交 M2 於 T 。

(3)連 ST ，則△ ABC 轉換成△ DEF 。（如圖 17）

轉換路徑：△ ABC⊗△ DST⊗△ DEF 。

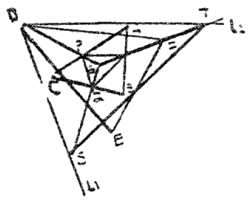


圖 16

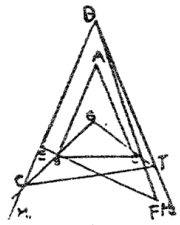


圖 17

四、結論

1.(1)在三邊上依一定比例取得各點，則△ $A_1B_1C_1$ ，△ $A_2B_2C_2$ ，△ $A_3B_3C_3$ … 之重心皆與△ ABC 之重心爲同一點，我們把這現象簡稱爲內縮性質。（如圖 18 ）

(2)若 $\overline{AA_1} = 1/k\overline{AB}$ ， $\overline{BB_1} = 1/k\overline{BC}$ ， $\overline{CC_1} = 1/k\overline{CA}$ ，則△ $A_1B_1C_1 = (k^2 - 3k + 3)/k^2$ △ ABC

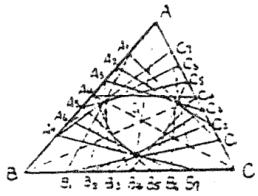


圖 18

2.(1)在三邊延長線上依一定比例取得各點，則△ A_1B_1

C_1，△ $A_2B_2C_2$，△ A_3　C_3B_3 …之重心皆與△ ABC 同一點，我們把這現象簡稱爲外脹性質。（如圖 19）

(2)若 $\overline{CA_1} = k\overline{CA}$，$\overline{AB_1} = k\overline{AB}$，$\overline{BC_1} = k\overline{BC}$，則△ $A_1B_1C_1 = (3k^2 - 3K + 1)$ △ ABC。

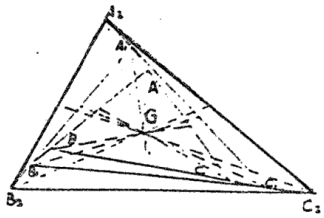


圖 19

3. 在一個三角形一邊的中線上，所有與此△共用中線的△都與原△的重心在同一點上。如△ $A_1B_1C_1$，△ $A_2B_2C_2$，△ $A_3B_3C_3$ …之重心皆與△ ABC 的重心在同一點 G 上，我們把這現象簡稱爲歸屬性質。（如圖 20）

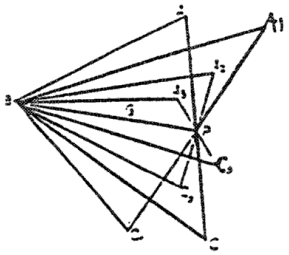


圖 20

4. (1)若 a ＞ 1，則△ (a,a,a) 的圖形扭曲如圖 (7 − 1)。
   (2)若 a ＜ 1，則△ (a,a,a) 的圖形扭曲如圖 (7 − 2)。
   (3)若 a ＞ 1，b ＜ 1，則△ (a,a,a) ⊗ △ ABC ⊗ △ (b,b,b) 的圖形扭曲如圖 (8 − 2)。
5. 在重心系統坐標上，可作出無數個指定面積，套數不同共用重心的△。
6. (1)在三角形重心坐標系統任一象限內的點 P，如右圖，依研究過程中 A 部份中的㈣可找出 a:b 和 i:j 代入公式 $(a + b)(3k^2 - 3k + 1)/(bL + a) = i/j$，$L = 3K - 2$，求出 K，得到套住點 P 的三角形。
   (2)當 P 點在任一軸上時，可直接找到套住該點的三角形。
   (3)當 P 點在三角形內部時，可依內縮性質找到一個三角形，使 P 點在該三角形的外部，再如(1)法求出 k，得到套住該點的三角形。
7. 任意兩共用重心的三角形，切可藉由研究過程㈤的代數運算方式而找出轉換路徑。
8. 任意兩共用重心的三角形，均可藉由研究過程㈥的幾何作圖操作而找出轉換路徑。
9. 四邊形、五邊形…經外脹，內縮，可藉平移而維持重心重疊，得到轉換路徑。

五、參考資料

1. 國民中學選修科目數學上、下册（國立編譯館）。
2. 中華民國中小學科學展覽第二十五屆、三十五屆作品專輯（國立臺灣科教館）。
3. 牛頓雜誌第 144 期（牛頓出版股份有限公司）。

評語

本作品與第 35 屆全國中小學科展作品類似，但能更加深入探討，處理也很完整。