

費馬點外又一章

國中組數學科第三名

高雄縣立鳳山國中

作 者：王聖麟、張簡保昌、陳文玲、洪煒倫
指導教師：杜鴻祥

一、研究動機

在選修數學上冊習作 2 – 2 中，有一題目：“O 是正 $\triangle ABC$ 的外心，試證 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120^\circ$ 。”引起我們的疑惑是否在任意三角形中，也可以找到一個點，使其與三頂點連接線段之夾角皆為 120° ，又該如何找到此點——與同學相互討論後，我們去請教老師，老師鼓勵我們“很好的題材！研究看看！”在我們著手研究，且分頭找資料時，卻發現在第 26 屆全國中小學科展中已有類似作品，不過老師告訴我們可以改良其證明過程，並朝不同方向，作更進一步的探討，常可獲得更大的成果，因而展開了我們的研究之旅。

二、文獻探討

法國數學家費馬曾向托利析里提出這樣的問題：如何找到一個點，使其與三角形三頂點之距離和為最小。由於此點最早由費馬所提出，故稱此點為費馬點。在第 26 屆科展專輯中，該作品討論了費馬點的各種作法、位置、性質及拿破崙正三角形（註），作品中所提的費馬點性質如下：

(一)若三角形三內角皆小於 120° ，則費馬點在三角形內，且與三頂點連線之張角為 120° 。（由此可知我們原先所尋找的點即屬於費馬點）。

(二)若三角形內有一角大於或等於 120° ，則費馬點在此鈍角頂點上。

〔註〕拿破崙發現以任意三角形的三個邊向外作三個正三角形，則此三個正三角形之中心點，亦可構成一個正三角形。

三、研究目的

本文定義三內角皆小於 120° 的三角形為費馬三角形，我們以費馬點為基礎，將進一步探討：

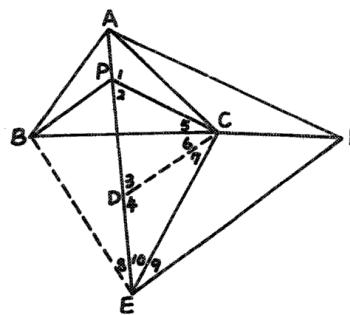
(一)費馬三角形與正三角形的互換。

(二)求出正三角形內任意點至三頂點距離所構成的三角形面積。

- (三)任意三角形向外依次作相似三角形、正方形有何性質並擴及正多邊形。
 (四)任意三角形向內作正三角形及正方形有何性質。
 (五)任意三角形內任一點至三頂點與至三邊距離和的關係。

四、研究內容

(一)費馬三角形與正三角形的互換



[已知] 費馬三角形 $\triangle ABC$ 中， P 為費馬點，延長 \overline{AP} 至 E ，使 $\overline{AE} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$ ， $\triangle AEF$ 為正三角形。

[求證] C 點至正 $\triangle AEF$ 三頂點距離，即為原費馬三角形 $\triangle ABC$ 之三邊長。

[證明] (1) $\because \overline{AE} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \therefore \text{取 } \overline{PD} = \overline{PC}$ ，則 $\overline{DE} = \overline{PB}$ ，連接 $CD \because P$ 為費馬三角形 $\triangle ABC$ 之費馬點。

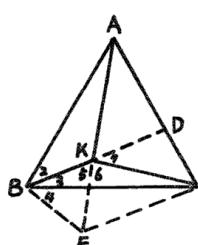
$\therefore \angle 1 = 120^\circ = \angle BPC \therefore \angle 2 = 60^\circ$ 又 $\overline{PC} = \overline{PD} \therefore$ 正 $\triangle PCD$
 $\therefore \overline{PC} = \overline{CD} \quad \angle 3 = 60^\circ = \angle 5 + \angle 6 \quad \therefore \angle 4 = 120^\circ = \angle BPC$ 且
 $\overline{CD} = \overline{PC}$ ， $\overline{DE} = \overline{PB}$

$\therefore \triangle PBC \cong \triangle DEC$ [SAS] $\therefore \overline{BC} = \overline{CE}$, $\angle 5 = \angle 7 \therefore \angle 6 + \angle 7 = 60^\circ$
 連接 $\overline{BE} \therefore$ 正 $\triangle BCE \therefore \overline{BE} = \overline{CE} \quad \angle BEC = 60^\circ$

(2) \because 正 $\triangle AEF$ ，正 $\triangle BCE \therefore \triangle ABE \cong \triangle FCE$ [SAS] $\therefore \overline{CF} = \overline{AB}$
 $\therefore \overline{CA} = \overline{CA} \quad \overline{CE} = \overline{BC} \quad \overline{CF} = \overline{AB}$

$\therefore C$ 點至正 $\triangle AEF$ 三頂點之距離 \overline{CA} 、 \overline{CE} 、 \overline{CF} 即為原費馬 $\triangle ABC$ 之三邊長 \overline{CA} 、 \overline{BC} 、 \overline{AB} 。

(二)正三角形內任意點至三頂點連接線段所構成三角形的探討



[已知] 正 $\triangle ABC$ 內任一點 K

[問題]

1. \overline{KA} 、 \overline{KB} 、 \overline{KC} 三線段是否可構成一三角形？

2. 如果能，如何作此三角形？

3. 此三角形面積為何？

4. 此三角形是否也可以成為一個費馬三角形？

(1) [證明] 設 \overrightarrow{BK} 交 \overline{AC} 於 $D \because$ 正 $\triangle ABC$

$\therefore \angle BAC = 60^\circ = \angle BCD$ ， $\overline{BC} = \overline{AC}$

$\therefore \angle 1 > \angle BAD = 60^\circ = \angle BCD \therefore \overline{AC} = \overline{BC} > \overline{BD}$

$\triangle KAC$ 中， $\overline{KA} + \overline{KC} > \overline{AC} > \overline{BD} > \overline{BK}$ $\therefore \overline{KA} + \overline{KC} > \overline{KB}$

同理 $\overline{KA} + \overline{KB} > \overline{KC}$ ， $\overline{KB} + \overline{KC} > \overline{KA}$ $\therefore \overline{KA}$ 、 \overline{KB} 、 \overline{KC} 可構成三角形

(2) [作法] 以 \overline{KB} 為一邊作正 $\triangle KBE$ ，連接 \overline{CE} ，則 $\triangle KEC$ 即為所求

[證明] \because 正 $\triangle ABC$ ，正 $\triangle KBE$ $\therefore \triangle KAB \cong \triangle ECB$ [SAS]

$$\therefore \overline{EC} = \overline{KA}$$

$\therefore \triangle KEC$ 中， $\overline{KE} = \overline{KB}$ ， $\overline{KC} = \overline{KC}$ ， $\overline{EC} = \overline{KA}$

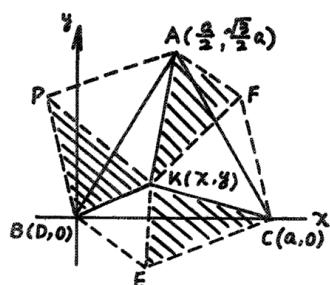
$\therefore \triangle KEC$ 即為所求

(3) 承上作法，同以 \overline{KC} 、 \overline{KA} 為一邊，依序作正 $\triangle KCF$ ，正 $\triangle AKP$ ，連接 \overline{FA} 、 \overline{PB} ，如圖(2) $\therefore \triangle KEC \cong \triangle FAK \cong \triangle BKP$ [SSS]

同理 $\triangle AFC \cong \triangle BKC$ ， $\triangle PBA \cong \triangle KCA$ ，設 $\triangle KEC = \triangle FAK = \triangle BKP = S$ 且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA} = a$ ，則六邊形 $APBECF$ 面積 =

$$2 \triangle ABC \quad \therefore 3S + \frac{\sqrt{3}}{4} (\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KC}^2) = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times 2$$

$$\text{設 } B(0,0), C(a,0), A\left(\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}a\right), K(x,y)$$



圖(2)

$$\begin{aligned} \therefore \overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KC}^2 &= [(x - \frac{1}{2}a)^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{2}a)^2] + (x^2 + y^2) + [(x - a)^2 + y^2] \\ &= 3[(x - \frac{1}{2}a)^2 + (y - \frac{\sqrt{3}}{6}a)^2] + a^2 \end{aligned}$$

$$\text{設 } G\left(\frac{1}{2}a, \frac{\sqrt{3}}{6}a\right) \text{ 則 } G \text{ 恰為正 } \triangle ABC \text{ 之重心}$$

$$\therefore \overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KC}^2 = 3 \times \overline{KG}^2 + a^2 - ①$$

由①可知若以正三角形重心 G 為圓心， \overline{KG} 為半徑畫圓 G ，則圓 G 上任一點的 \overline{KG}^2 為定值，所以圓 G 上任一點至原正三角形三頂點的距離平方和恰為 $3\overline{KG}^2 + a^2$ 即為一定值。

$$\therefore 3S + \frac{\sqrt{3}}{4} (\overline{KA}^2 + \overline{KB}^2 + \overline{KC}^2) = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$\therefore 3S + \frac{\sqrt{3}}{4} (3\overline{KG}^2 + a^2) = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \quad \therefore S = \frac{1}{3} \triangle ABC - \frac{\sqrt{3}}{4} \overline{KG}^2$$

(4) 進一步再判斷是否為費馬三角形

如圖①： $\angle 5 + \angle 6 + \angle 7 = 180^\circ$ 又正 $\triangle KBE$ ， $\angle 5 = 60^\circ$

$$\therefore \angle 6 = 120^\circ - \angle 7 < 120^\circ$$

同理 $\angle KCE < 120^\circ$ ， $\angle KEC < 120^\circ$ $\therefore \triangle KEC$ 為一費馬三角形

結論

(1) 正三角形邊長為 a ，若以其重心為圓心，任意長 R 為半徑作圓，則圓周上任一點至原正三角形三頂點距離的平方和為定值，即 $3R^2 + a^2$ 。

(2) 正三角形內任意點至三頂點的連接線段必可構成一費馬三角形，且此費馬三角形的面積可由該點至原正三角形的重心距離平方及原正三角形的邊長平方求得。

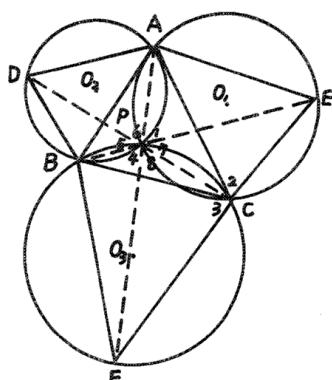
(3) 任意三角形向外依次作相似三角形及正方形並擴及正多邊形

1. 任意三角形向外作相似三角形有何特殊關係

預備定理①：

我們證明出任意三角形以三邊向外依次作三個彼此相似的三角形，若其三內角循環對應且外側三個角互異時，則此三個相似三角形的外接圓恰交於一點。

得到證明後，我們再利用此預備定理①，來證明相對應頂點連線亦可交於一點。



設三相似形外接圓 O_1, O_2, O_3 交於 P 點〔預備定理①〕

連接 $\overline{PA}, \overline{PE}, \overline{PC}, \overline{PF}, \overline{PB}, \overline{PD}$

$\because P, A, E, C$ 四點共圓

$\therefore \angle 1 = \angle 2 \quad \because \triangle AEC \sim \triangle FBC$

$\therefore \angle 2 = \angle 3$

$\because P, B, F, C$ 四點共圓

$\therefore \angle 4 = \angle 3 \quad \therefore \angle 1 = \angle 4$

同理 $\angle 5 = \angle 7$ ， $\angle 6 = \angle 8$ ，又 $\angle 1 + \angle 7 + \angle 8 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360^\circ$

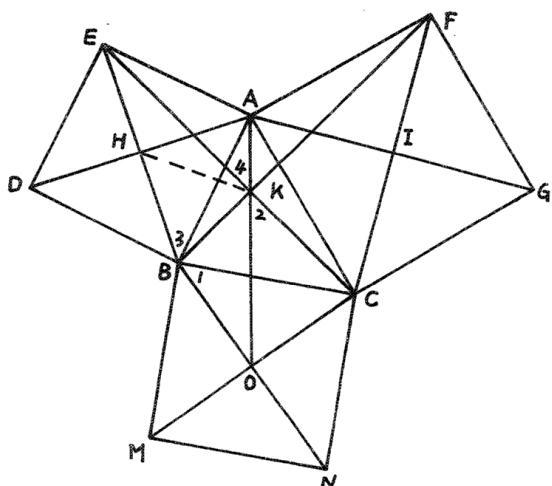
$\therefore \angle 1 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ \quad \therefore E, P, B$ 共線

同理 A, P, F 共線， C, P, D 共線

結論：任意三角形向外依次作三個彼此相似的三角形，其三內角循環對應且外側三個角互異時，則與原三角形對應頂點之間的連接線段必交於一

點，且此交點恰為三個相似三角形的外接圓交點。

2. 任意三角形向外作正方形有何特性



[已知] 任意三角形 ABC，正方形 ABDE，ACGF，BCNM 中心點分別為 H、I、O 三點

[求證] \overline{AO} 、 \overline{BF} 、 \overline{CE} 共點

[證明] 設 \overline{BF} 交 \overline{CE} 於 K，連接 \overline{KA} 、 \overline{KO}

\because 正方形 ABDE，ACGF

由選修數學習作第一章總習題得知
 $\overline{BF} \perp \overline{CE}$

$\therefore \angle BKC = 90^\circ = \angle BOC$

預備定理②

$\therefore K$ 、B、O、C 四點共圓， $\angle 2 = \frac{1}{2} \widehat{OC} = \angle 1 = 45^\circ$ ，連接 \overline{KH} ，直角 $\triangle EBK$ 中

$\because H$ 為斜邊 \overline{EB} 中點 $\therefore \overline{HK} = \overline{HB} = \overline{HD} = \overline{HE} = \overline{HA}$

$\therefore K$ 、B、D、E、A 共圓

同理 K、C、G、F、A 共圓

\therefore 正方形 ABDE、ACGF 之外接圓交於 K、A

又 $\angle 4 = \frac{1}{2} \widehat{AE} = \angle 3 = 45^\circ$ ， $\angle 2 = 45^\circ \therefore \angle 2 = \angle 4$

$\therefore E$ 、K、C 共線 $\therefore A$ 、K、O 共線

$\therefore \overleftrightarrow{AO}$ 、 \overleftrightarrow{BF} 、 \overleftrightarrow{CE} 交於一點 K

完成上述結果後，我們著手研究正方形中心點與原三角形對應頂點連接線及另兩正方形中心點連接線段之間的關係。

連接 \overline{HK} 、 \overline{IK} $\because A$ 、K、B、D、E 共圓 [預備定②]

H 為圓心 $\therefore \overline{HK} = \overline{HA} =$ 圓 H 之半徑

同理 $\overline{IK} = \overline{IA}$ $\therefore HAIK$ 為鳶形

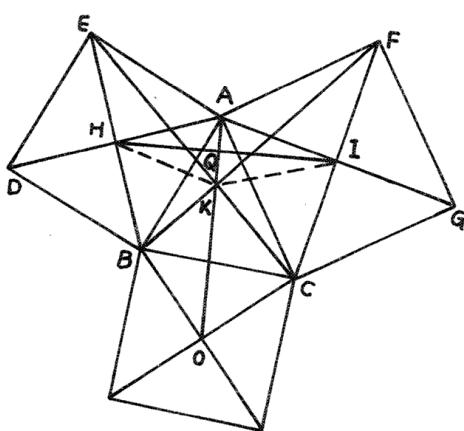
$\therefore \overline{HI} \perp \overline{KA}$ $\because A$ 、K、O 共線

[預備定理②]

$\therefore \overline{HI} \perp \overline{AO}$ 設 \overline{HI} 交 \overline{AO} 於 Q

$\therefore \overline{HQ} \perp \overline{OA}$

\overline{QO} 為 $\triangle HOI$ 的高 同理 \overline{IB} 、 \overline{IC}



爲 $\triangle HOI$ 的高

$\therefore \overline{AO}$ 、 \overline{OB} 、 \overline{CH} 必交於一點，即爲 $\triangle HOI$ 之垂心

3. 向外作正多邊形唯有正三角形的外接圓可交於一點

(1) 以任意 $\triangle ABC$ 的三邊分別向外作正 n 邊形及其外接圓，若交於一點 P 則 $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA = 360^\circ$

$$\frac{1}{2}(360 - \frac{360}{n}) + \frac{1}{2}(360 - \frac{360}{m}) + \frac{1}{2}(360 - \frac{360}{k}) = 360$$

$$\therefore n = 3$$

\therefore 任意 $\triangle ABC$ ，向外作正三角形，則三個正三角形之外接圓可交於一點。

(2) 任意 $\triangle ABC$ ，以 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 為一邊，向外作正 n 邊形，正 m 邊形，正 k 邊形，可否交於一點？

若交於一點 P，則 $\angle APB + \angle BPC + \angle CPA = 360^\circ$

$$180(1 - \frac{1}{n}) + 180(1 - \frac{1}{m}) + 180(1 - \frac{1}{k}) = 360 \therefore \frac{1}{n} + \frac{1}{m} + \frac{1}{k} = 1$$

$\because n$ 、 m 、 k 為 ≥ 3 的正整數 $\therefore n = m = k = 3$

若 $n > 3$ ，則 k 或 m 必有一會小於 3 \Rightarrow 不合

\therefore 若 $m > 3$ ， $n > 3$ ， $k > 3$ 時，其外接圓不交於一點

四) 任意三角形向內作正三角形及正方形有何性質

1. 任意三角形向內作正三角形有何性質

[已知] 任意 $\triangle ABC$ ，D、E、F 分別爲正 $\triangle AB'C'$ ，正 $\triangle A'BC$ ，正 $\triangle ABC'$ 之重心

[求證] $\triangle DEF$ 為正三角形

[證明] 連接 \overline{CE} 、 \overline{CD} $\because D$ 、 E 為正 $\triangle AB'C'$ ，正 $\triangle A'BC$ 的重心

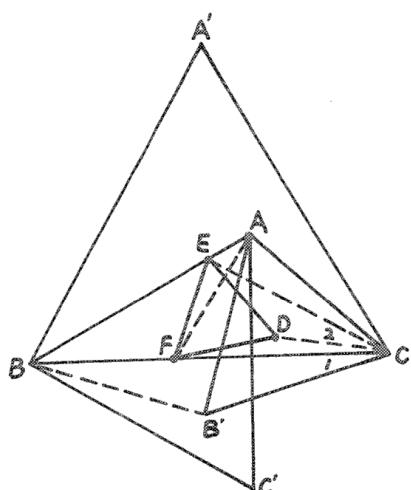
$$\therefore \angle A'CE = 30^\circ = \angle B'CD$$

$$\therefore \angle 2 + \angle A'CE + \angle DCB' = 60^\circ + \angle 1$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 1 \quad \because \overline{B'C} : \overline{CD} = \sqrt{3} : 1 \\ = \overline{BC} : \overline{CE}$$

$$\therefore \triangle B'CB \sim \triangle DCE[\text{SAS}] \quad \therefore \overline{BB'} : \overline{DE} = \sqrt{3} : 1$$

$$\text{同理 } \overline{AB} : \overline{AF} = \sqrt{3} : 1 = \overline{AB'} : \overline{AD}$$

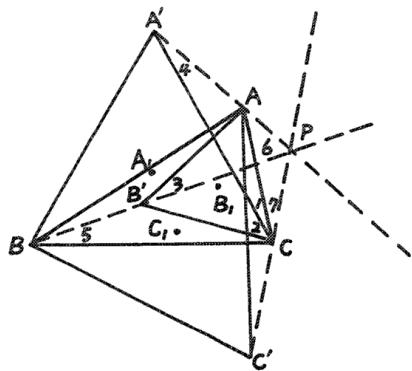


$\therefore \triangle BAB' \sim \triangle FAD$ [SAS] $\therefore \overline{BB'} : \overline{FD} = \sqrt{3} : 1$

$\therefore \overline{DE} = \overline{DF}$ 同理 $\overline{EF} = \overline{DE}$

$\therefore \triangle DEF$ 為正三角形

2. 向內作正三角形及其外接圓的特殊關係



[已知] 任意 $\triangle ABC$ ，向內作三個正 $\triangle A'BC$ ，正 $\triangle AB'C$ ，正 $\triangle ABC'$ ，其重心分別為 A_1 、 B_1 、 C_1

[求證] (1) 圓 A_1 、圓 B_1 、圓 C_1 三圓共點
(2) $\overleftrightarrow{AA'}$ 、 $\overleftrightarrow{BB'}$ 、 $\overleftrightarrow{CC'}$ 交於一點

[證明] (1) 連接 $\overleftrightarrow{AA'}$ 、 $\overleftrightarrow{BB'}$ 設交點為 P ，
連接 \overline{CP} 、 $\overline{C'P}$
 \because 正 $\triangle AB'C$ ，正 $\triangle A'BC$ $\therefore \triangle ACA' \cong \triangle B'CK$ [SAS]

$\therefore \angle 4 = \angle 5 \quad \therefore A'、B、C、P$ 四點共圓 $\therefore \angle 6 = \angle A'CB = 60^\circ = \angle ACB' = \angle AC'B$

$\therefore A、P、C、B'$ 四點共圓 $\therefore \angle 7 = \angle 3 \quad \therefore A、B、C'、P$ 四點共圓

(2) 連接 $\overline{C'C}$ 、 \overline{CP} \because 正 $\triangle ABC'$ ，正 $\triangle AB'C$

$\therefore \triangle ABB' \cong \triangle AC'C$ [SAS]

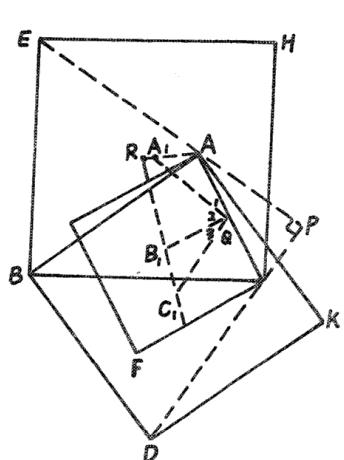
$\therefore \angle ACC' = \angle AB'B \quad \therefore \angle AB'B + \angle 3 = 180^\circ$

$\therefore \angle ACC' + \angle 7 = 180^\circ$

$\therefore C'、C、P$ 三點共線

結論：以任一三角形的三個邊，向內作正三角形，則這三個正三角形的外接圓恰交於一點，此交點恰為原三角形三個頂點與其所對正三角形之對應頂點所成三連線之交點，且此三連線的交角皆為 60° 。

3. 任意三角形分別以三邊向內作正方形後的變化



[證明] 設 $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ 交 $\overleftrightarrow{AA_1}$ 於 R

\because 正方形 $BCHE$ ，正方形 $ABDK$

$\therefore \triangle DBC \cong \triangle ABE$ [SAS]

$\therefore \angle BAE = \angle BDC$

$\overline{CD} = \overline{AE}$ 延長 \overleftrightarrow{EA} 交 \overleftrightarrow{CD} 交 P

$\therefore \angle BAE = \angle BDC$

$\therefore A、B、D、P$ 四點共圓

$\therefore \angle ABD = 90^\circ \quad \therefore \angle P = 90^\circ$

$\triangle EAC$ 中，取 \overline{AC} 中點 Q 又 A_1 為 \overline{EC} 中點

$$\therefore \overline{A_1Q} \parallel \overline{AE}, \overline{A_1Q} = \frac{1}{2} \overline{AE}$$

$$\text{同理} \triangle ADC \text{ 中}, \overline{QC_1} \parallel \overline{CD}, \overline{QC_1} = \frac{1}{2} \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AE} = \overline{A_1Q} - ①$$

$$\because \overline{A_1Q} \parallel \overline{EP}, \overline{QC_1} \parallel \overline{PD} \quad \therefore \angle A_1QC_1 = \angle P = 90^\circ = \angle AQB_1$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3 - ②$$

$$\because Q, B_1 \text{ 為 } \overline{AC} \text{ 中點}, \overline{AF} \text{ 中點} \quad \therefore \overline{B_1Q} = \frac{1}{2} \overline{FC} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \overline{AQ} - ③$$

$$\text{由} ①, ②, ③ \quad \therefore AQA' \cong \triangle B_1QC_1 [\text{SAS}] \quad \therefore \angle AA_1Q = \angle B_1C_1Q$$

$$\therefore R, C_1, Q, A_1 \text{ 四點共圓} \quad \because \angle A_1QC_1 = 90^\circ \quad \therefore \angle R = 90^\circ$$

$$\therefore \overleftrightarrow{AA_1} \perp \overleftrightarrow{B_1C_1}$$

同理 $\overleftrightarrow{BB_1} \perp \overleftrightarrow{A_1C_1}$, $\overleftrightarrow{CC_1} \perp \overleftrightarrow{A_1B_1}$ 若 A_1, B_1, C_1 , 三點不共線

則 $\overleftrightarrow{AA_1}, \overleftrightarrow{BB_1}, \overleftrightarrow{CC_1}$ 必交於一點即為 $\triangle A_1B_1C_1$ 之垂心

結論：任意三角形 ABC ，分別以三邊 \overline{AB} 、 \overline{BC} 、 \overline{CA} 向內作正方形，其中心點為 C_1 、 A_1 、 B_1 若 A_1, B_1, C_1 三點不共線，則 $\overleftrightarrow{AA_1}, \overleftrightarrow{BB_1}, \overleftrightarrow{CC_1}$ 恰交於一點，即為 $\triangle A_1B_1C_1$ 之垂心。

(五) 三角形內任意點至三頂點與至三邊距離的關係

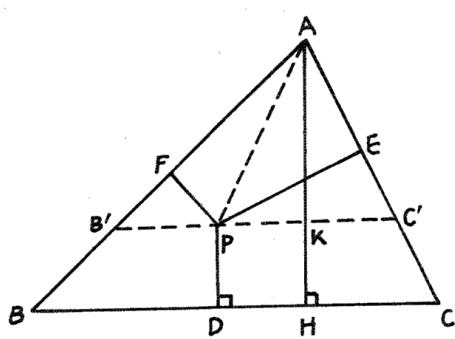
我們進一步推測“三角形內到三邊距離和是最小的點，在那裡呢？”經過作圖研究，我們發現此點就是三角形內最大內角的頂點。

[已知] $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 為最大角， \overline{AH} 為 \overline{BC} 上的高， P 為三角形內任意點， $\overline{PD} \perp \overline{BC}$, $\overline{PE} \perp \overline{PC}$, $\overline{PF} \perp \overline{AB}$

[求證] $\overline{AH} < \overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF}$

[證明]

1. 過 P 作 $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$ 交 \overline{AH} 於 K
則 $\overline{PD} = \overline{KH}$



$\because \angle BAC$ 為大角 $\therefore \overline{B'C'} \text{ 為 } \triangle AB'C' \text{ 最長邊} - ①$

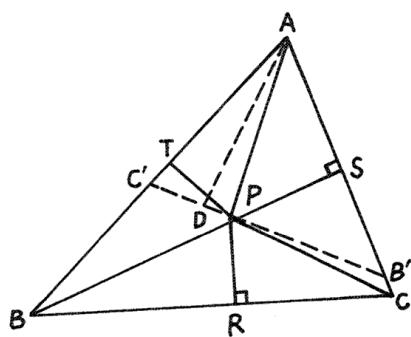
2. 連接 \overline{AP} $\therefore \overline{PF} \perp \overline{AB'}, \overline{PE} \perp \overline{AC'}$

$\therefore \triangle AB'C' = \triangle AB'P + \triangle AC'P$

$$\therefore \frac{1}{2} \overline{B'C'} \times \overline{AK} = \frac{1}{2} \overline{AB'} \times \overline{PF} + \frac{1}{2} \overline{AC'} \times \overline{PE}$$

由① $\overline{B'C'} > \overline{AB'}$, $\overline{B'C'} > \overline{AC'}$

$$\begin{aligned}\therefore \overline{B'C'} \times \overline{AK} &= \overline{AB'} \times \overline{PF} + \overline{AC'} \times \overline{PE} < \overline{B'C'} \times \overline{PF} + \overline{B'C'} \times \overline{PE} \\ \therefore \overline{AK} &< \overline{PF} + \overline{PE} \\ \therefore \overline{AK} + \overline{KH} &< \overline{PF} + \overline{PE} + \overline{PD} \quad \therefore \overline{AH} < \overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF}\end{aligned}$$



[已知] 任意 $\triangle ABC$ 內任一點 P ， $\overline{PT} \perp \overline{AB}$ ，
 $\overline{PR} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{PS} \perp \overline{AC}$

[求證] $\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq 2(\overline{PR} + \overline{PS} + \overline{PT})$

[證明]

1. 過 P 作直線 $B'C' \angle AB'C' = \angle ABC$
 又 $\angle BAC = \angle B'AC'$
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle AB'C' [AA]$

設 $\overline{AC} : \overline{AC'} = \overline{AB} : \overline{AB'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = m$ 且 $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AB} = c$ 、
 $\overline{BC} = a$ 、 $\overline{PR} = r$ 、 $\overline{PS} = s$ 、 $\overline{PT} = t$

2. $\triangle AB'C'$ 過 A 作 $\overline{AD} \perp \overline{B'C'}$ ，則 $\overline{AP} \geq \overline{AD}$ ， $\triangle AB'C' = \triangle AC'P + \triangle AB'P$

$$\therefore \frac{1}{2} \overline{B'C'} \times \overline{AD} = \frac{1}{2} \overline{AC'} \times \overline{PT} + \frac{1}{2} \overline{AB'} \times \overline{PS}$$

$$\therefore \overline{B'C'} \times \overline{PA} \geq \overline{B'C'} \times \overline{AD} = t \times \overline{AC'} + s \times \overline{AB'}$$

$$\therefore m \cdot \overline{B'C'} \cdot \overline{PA} \geq m \cdot t \cdot \overline{AC'} + m \cdot s \cdot \overline{AB'}$$

$$\therefore \overline{PA} \geq \frac{b}{a} t + \frac{c}{a} \cdot s$$

$$\text{同理 } \overline{PB} \geq \frac{a}{b} t + \frac{c}{b} r, \overline{PC} \geq \frac{b}{c} r + \frac{a}{c} s$$

$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq r(\frac{c}{b} + \frac{b}{c}) + s(\frac{c}{a} + \frac{a}{c})t(\frac{b}{a} + \frac{a}{b})$$

3. $\because a, b, c$ 為三角形的三邊長 $\therefore a, b, c$ 皆為正數

$$\therefore \frac{c}{b} + \frac{b}{c} \geq 2, \frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2, \frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$$

$$\therefore \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} \geq 2(\overline{PR} + \overline{PS} + \overline{PT})$$

\therefore 等式成立之條件在於 $\frac{c}{b} + \frac{b}{c}, \frac{c}{a} + \frac{a}{c}, \frac{b}{a} + \frac{a}{b}$ 皆為 2

\therefore 唯有在正三角形內且 P 點恰為重心時，等式方可成立。

結論：任意三角形內任意點到三頂點的距離和不小於此點到三邊距離和的兩

倍。若此點為正三角形的重心，則等式成立。

五、結論

- (一)若三角形三內角皆小於 120° ，則由費馬點至三頂點連線之和為邊所作之正三角內形內有一點至正三角形三頂點的連線恰為原三角形三邊長。
- (二)正三角形內任一點，至三頂點的距離所圍成之三角形的面積等於原正三角形面積的 $\frac{1}{3}$ 倍減去此點至正三角形重心之距離平方 $\frac{3}{4}$ 倍的差。
- (三)正三角形邊長為 a ，以其重心 G 為圓心，任意長 R 為半徑畫圓 G ，則圓 G 上任一點至原正三形三頂點距離的平方和為定值，即 $3R^2 + a^2$ 。
- (四)任意三角形以三邊向外作三個相似三角形，若其三個內角循環對應且外側三角互異時，則外側三內角的頂點與原三角形對應頂點的連線必交於一點，且此交點恰為三個相似三角形的外接圓交點。
- (五)任意三角形以各邊向外作正方形則此三個正方形中心點與原三角形的對應頂點連接線段必交於一點。
- (六)任意三角形以各邊向外作正 n 邊形及其外接圓，惟有正三角形的外接圓恰可交於一點其餘皆無法恰交於一點。
- (七)以任意三角形的三邊，向內作正三角形，則這三個正三角形的中心點恰可構成一正三角形，且這三個正三角形的外接圓交於一點，此點亦為原三角三頂點與其所對正三角形之對應頂點所成三連線之交點。
- (八)以任意三角形的三邊分別向內作正方形，若此三個正方形的中心點不共線，則此三個中心點與原三角形對應頂點之連線恰交於一點。
- (九)三角形內到三邊距離和為最小值的點，恰好在最大內角的頂點上。
- (十)三角形內任意點到三頂點的距離和不小於此點到三邊距離和的兩倍。

六、參考資料

- (一)國民中學選修數學上、下冊及習作與第 26、33 屆中小學科展專輯。
- (二)王九達著（民 38），數學與數學家的故事 3，新竹、凡異出版社。

評語

本作品雖與第 26 屆全國中小學科展作品類似，但能改由不同方向進行探討，並改為採用相似三角形證明，而獲得相同成果。