# 消長

## 國中組數學科第二名

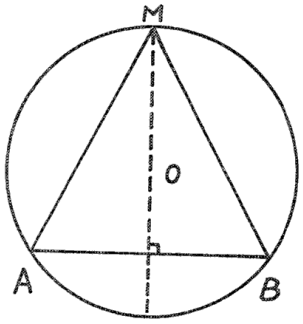
台北市立景興國民中學

作　　者：吳則霖、許涵音
指導教師：吳省三、彭君智

## 一、研究動機

課堂上曾碰到右題：已知弦 $\overline{AB}=\sqrt{3}\ r$，問圓 O 上那一點與 $\overline{AB}$ 所連成之三角形面積最大？

當我們求出此點爲 $\overline{AB}$ 之中垂線與圓 O 中優弧的交點 M 時，老師隨即提出另一問題：此時三角形的周長是否也最長？由此引發探究的興趣。




（圖一）

## 二、研究目的

㈠探求圓上任一點與兩定點距離和的大小變化。

㈡尋求是否可用尺規作圖的方式找出距離和爲最大或最小之位置。

## 三、研究設備

紙、筆、圓規、直尺、方格紙、自製畫具、電腦:Excel 、 Word 。

## 四、研究過程

㈠圓上兩點：圖(2)

已知：$A(Q_0)$ 、 $B(P_0)$ 在圓上，$\overline{Q_0C}$ 、 $\overline{P_0D}$ 爲直徑，$\widehat{P_0M}=\widehat{Q_0M}$ 、 $\widehat{P_0N}=\widehat{Q_0N}$

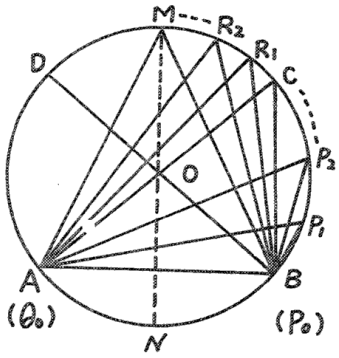
觀察：

*1.* 當 P 由 $P_0$ 延圓周逆時針移向 C 時：

(1) $\overline{AP_0}<\overline{AP_1}<\overline{AP_2}<\cdots\cdots<\overline{AC}$

(2) $\overline{BP_0}<\overline{BP_1}<\overline{BP_2}<\cdots\cdots<\overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{AP}+\overline{BP}$ 之值漸增




(2)

∴稱 $\widehat{P_0C}$ 爲生長區，同理 $\widehat{Q_0D}$ 爲生長區

*2.* 當 P 由 C 延圓周逆時針移向 M 時：

(1) $\overline{AC} > \overline{AR_1} > \overline{AR_2} > \cdots\cdots > \overline{AM}$ （ $\overline{AP}$ 漸減）

(2) $\overline{BC} < \overline{BR_1} < \overline{BR_2} < \cdots\cdots < \overline{BM}$ （ $\overline{BP}$ 漸增）

⇒ $\overline{AP} + \overline{BP}$ 之大小無法確定　∴稱 $\widehat{CM}$ 爲消長區，同理 $\widehat{DM}$ 、 $\widehat{P_0N}$ 、 $\widehat{Q_0N}$ 亦爲消長區⇒ $\widehat{CMD}$ 、 $\widehat{P_0NQ_0}$ 爲消長區

證明：

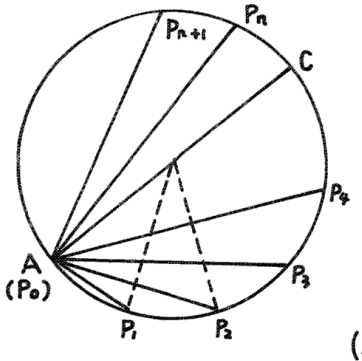
引理 1 ：若 $\overline{AC}$ 爲圓 O 直徑圖(3)

則(1) P 由 $P_0$ 逆時針移向 C ：

$\overline{AP_0} < \overline{AP_1} < \overline{AP_2} < \cdots\cdots < \overline{AC}$

(2) P 由 C 逆時針移向 $P_0$ ：

$\overline{AC} < \overline{AP_n} > \overline{AP_{n+1}} > \cdots\cdots > \overline{AP_0}$




(3)

<pf>:

*1.* 連 $\overline{OP_1}$ 、 $\overline{OP_2}$

在△ $OAP_1$ 、△ $OAP_2$ 中

$\overline{OA} = \overline{OP_1} = \overline{OP_2}$, ∠ $AOP_1$ ∠ $AOP_2$

∴ $AP_1 < AP_2$ （樞紐定理）

*2.* 同理： $\overline{AP_2} < \overline{AP_3}$ ， $\overline{AP_3} < \overline{AP_4}$ ……

*3.* 令 $P_i$ 爲異於 C 之任一點

則 $\overline{AC} = \overline{OA} + \overline{OP}_i > \overline{APi}$ （△兩邊和＞第三邊）

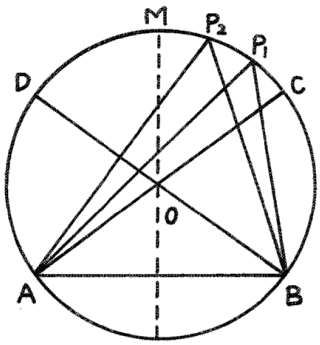



圖 (4)

*4.* 由 *1.* 、 *2.* 、 *3.* 知

$\overline{AP_0} < \overline{AP_1} < \overline{AP_2} < \cdots\cdots < \overline{AC}$

*5.* 同理：

$\overline{AC} > \overline{AP_n} > \overline{AP_{n+1}} > \cdots\cdots > \overline{AP_0}$

⇒㈠中觀察可由引理 1 說明。

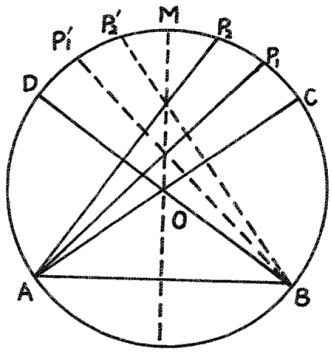
消長區討論：由引理 1 知： $\overline{BP_1} < \overline{BP_2}$ 、 $\overline{AP_1} > \overline{AP_2}$

推測：若 $\overline{BP_2} - \overline{BP_1} > \overline{AP_1} - \overline{AP_2}$ 則 $\overline{BP_2} + \overline{AP_2} > \overline{BP_1} + \overline{AP_1}$

發現： A 、 B 對稱於 $\overline{OM}$　圖(5)

若將 $\overline{AP_1}$ 、 $\overline{AP_2}$ 對 $\overline{OM}$ 取對稱圖形 $\overline{BP'_1}$ 、 $\overline{BP'_2}$

則討論 $\overline{BP_2} - \overline{BP_1}$ 與 $\overline{BP'_1} - \overline{BP'_2}$ 之大小




(5)

引理 2 ：若 $\overline{AC}$ 爲直徑， $\widehat{CP_1} = \widehat{P_1P_2} = \widehat{P_2P_3}$　圖(6)

則 $\overline{AC} - \overline{AP_1} < \overline{AP_1} - \overline{AP_2} < \overline{AP_2} - \overline{AP_3}$

<pf>:

*1.* 作 $\overline{AP_1} = \overline{AP_1}$ 、 $\overline{AP'_2} = \overline{AP_2}$ 、 $\overline{AP'_3} = \overline{AP_3}$ ，連 $\overline{P_1P'_1}$ 、 $\overline{P_2P'_2}$ 、 $\overline{P_3P'_3}$

*2.* $\because \overset{\frown}{CP_1} = \overset{\frown}{P_1P_2} = \overset{\frown}{P_2P_3}$ $\quad \therefore \angle 7 = \angle 8 = \angle 9$

$\therefore \angle CP_1'P_1 = \angle P_1P'_2P_2 = \angle P_2P'_3P_3 \Rightarrow \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 5 = \angle 3 + \angle 6$

又 $\angle 1 = 1/2\ \overset{\frown}{AP_1} > \angle 2 = 1/2\ \overset{\frown}{AP_2} > \angle 3 = 1/2\ \overset{\frown}{AP_3}$

$\therefore \angle 4 < \angle 5 < \angle 6$

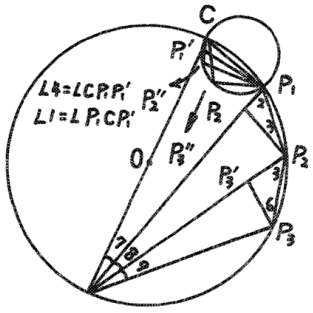
*3.* 作 $\triangle CP_1P$ 的外接圓且 $\angle CP_1P''_2 = \angle 5$ 、 $\angle CP_1P''_3 = \angle 6$

$\Rightarrow \triangle P_1P''_2C \cong \triangle P_1P'_2P_2$ (AAS)

$\therefore \overline{CP''_2} = \overline{P_1P'_2}$

$\triangle P_1P''_3C \cong \triangle P_2P'_3P_3$ (AAS)

$\therefore \overline{CP''_3} = \overline{P_2P'_3}$




(6)

*4.* 由 2 得 $\overline{CP_1} < \overline{CP''_2} < \overline{CP''_3} \Rightarrow \overline{AC} - \overline{AP_1} < \overline{AP_1} - \overline{AP_2} < \overline{AP_2} - \overline{AP_3}$

⇒由引理 2 及對稱性可得：P 由 C(B) 移向 M(N) ， $\overline{AP} + \overline{BP}$ 之值漸增。

定理 1 ：差 $A(Q_0)$ 、 $B(P_0)$ 在圓上， $\overline{Q_0C}$ 、 $\overline{P_0D}$ 爲直徑， $\overset{\frown}{P_0M} = \overset{\frown}{Q_0M}$ 、 $P_0N = \overset{\frown}{Q_0N}$

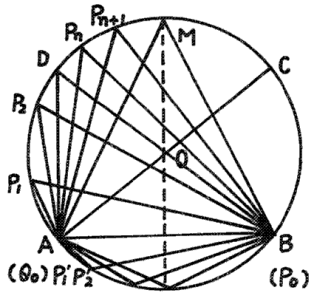
(7)

圖(7)

則(1) P 由 $P_0(Q_0)$ 移向 M 、 N ， $\overline{AP} + \overline{BP}$ 之值漸增。

(2) $\overline{AN} + \overline{BN} < \overline{AM} + \overline{BM}$ 。

(3) M 爲最大值位置， A 、 B 爲小值位置。

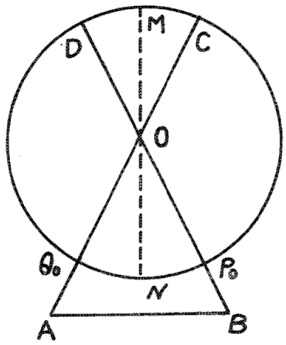



㈡圓外對稱兩點：圖(8)

已知： A 、 B 在圓外， $\overline{OA} = \overline{OB}$ ， $\overline{DP_0B}$ 、 $\overline{CQ_0A}$ 過圓心 O ， $\overset{\frown}{P_0M} = \overset{\frown}{Q_0M}$ 、 $\overset{\frown}{P_0N} = \overset{\frown}{Q_0N}$

觀察：(1) $\overset{\frown}{P_0C}$ 、 $\overset{\frown}{Q_0D}$ 爲生長區

(2) $\overset{\frown}{CMD}$ 、 $\overset{\frown}{P_0NQ_0}$ 爲消長區。




證明：仿㈠中引理 *1.* ，可用樞紐定理證明。

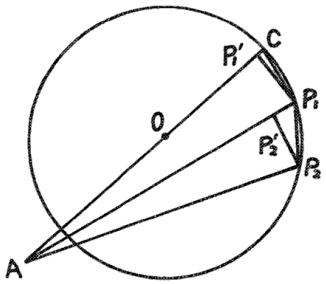
消長區討論：

引理 1 ：（仿㈠中引理 2 ）

圖(9)

若 A 在圓外、C 在圓上、$\overline{AC}$ 過圓心、$\overset{\frown}{CP_1} = \overset{\frown}{P_1P_2}$ (9)

則 $\overline{AC} - \overline{AP_1} < \overline{AP_1} - \overline{AP_2}$




引理 2 ：若 AB // L ，$L_1$ 爲 $\overline{AB}$ 之中垂線

圖(10)

$L_1$ 交 L 於 $P_0$ 、取 $P_1$ 、$P_2$ 、$P_3$ …

則 $\overline{AP_0} + \overline{BP_0} < \overline{AP_1} + \overline{BP_1} < \cdots\cdots$

<pf>:

(1)取 B′ 使 L 垂直平分 $\overline{BB'}$

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = \angle 3(L \parallel AB) = \angle 5 = \angle 4(L \parallel \overline{AB})$

∴ A 、$P_0$ 、B′ 三點共線

(2)△ $AP_1B'$ 中 $\overline{AP_1} + \overline{P_1B'} > \overline{AB'} \Rightarrow \overline{AP_1} + \overline{P_1B}$
$> \overline{AP_0} + \overline{P_0B}$

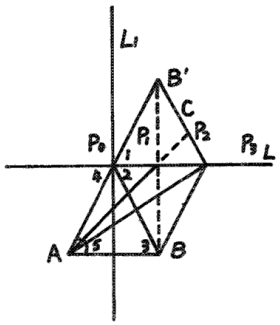
(3) $P_1$ 在△ $AP_2B'$ 內，延長 $\overline{AP_1}$ 交 $\overline{BP_2}$ 於 C

⇒△ $B'P_1C$ 中 $\overline{P_1C} + \overline{CB'} > \overline{P_1B'}$ （△兩邊和 ＞第三邊）

$\Rightarrow \overline{AC} + \overline{B'C} > \overline{AP_1} + \overline{P_1B'}$

同理 $\overline{AP_2} + \overline{P_2B'} > \overline{AC} + \overline{CB'} \Rightarrow \overline{AP_2} + \overline{P_2B'}$
$> \overline{AP_1} + \overline{P_1B'}$

$\overline{AP_0} + \overline{BP_0} < \overline{AP_1} + \overline{BP_1} < \overline{AP_2} + \overline{BP_2} < \cdots\cdots$




(10)

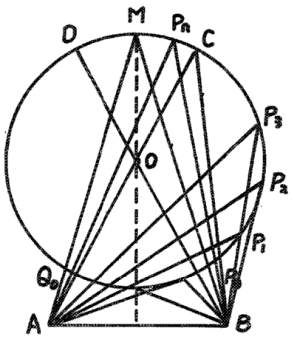
定理 2 ：若 A 、B 在圓外，$\overline{OA} = \overline{OB}$ ，$\overline{DP_0B}$ 、$\overline{CQ_0A}$ 過圓心 O ，

圖 (11)

$\overset{\frown}{P_0M} = \overset{\frown}{Q_0M}$ ，$P_0N = \overset{\frown}{Q_0N}$

則(1) P 由 N 移向 M 時，$\overline{AP} + \overline{BP}$ 之值漸增。

(2) M 爲最大值位置，N 爲最小值位置。




(11)

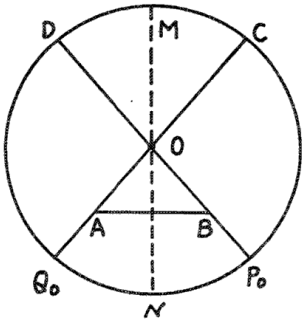
㈢圓內對稱兩點：圖 (12)

已知：A 、B 在圓內，$\overline{OA} = \overline{OB}$ ，A 、B 分別在直徑 $\overline{Q_0C}$ 、$\overline{P_0D}$ 上，$\overline{P_0M} = \overline{Q_0M}$ ，$\overline{P_0N} = \overline{Q_0N}$

觀察：

(1) $\overset{\frown}{P_0C}$ 、$\overset{\frown}{Q_0C}$ 爲生長區

(2) $\overset{\frown}{CMD}$ 、$\overset{\frown}{P_0NQ_0}$ 爲消長區。




(12)

證明：仿㈠中引理 1 ，可用樞紐定理證明。

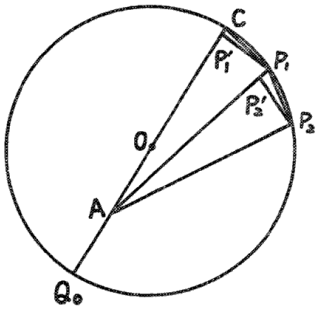
消長區討論：

引理 1 ：（仿㈠中引理 2 ）

圖 (13)

若 A 在直徑 $\overline{Q_0C}$ 上，$\widehat{CP_1} = \widehat{P_1P_2}$

則 $\overline{AC} - \overline{AP_1} < \overline{AP_1} - \overline{AP_2}$




(13)

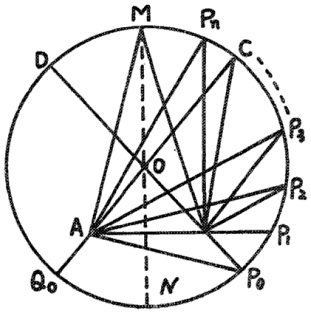
定理 3 ：若 A 、 B 在圓內，OA = OB 、 A 、 B 。

圖 (14)

分別在直徑 $\overline{Q_0C}$ 、 $\overline{P_0D}$ 上 $\widehat{P_0M} = \widehat{Q_0M}$ ，$\widehat{P_0N} = \widehat{Q_0N}$ 。

則(1) P 由 $P_0(Q_0)$ 移向 M 時， $\overline{AP} + \overline{BP}$ 之值漸增。

(2) M 爲最大值位置。

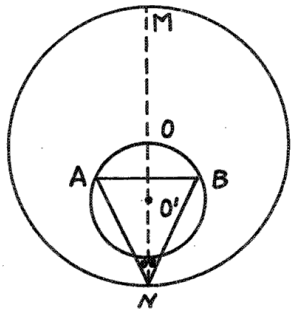



(14)

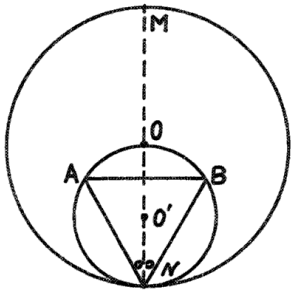
推論：

(1)若△ AOB 之外接圓與圓 O 沒有交點圖 (15) 則 N 爲最小值位置。

(2)若△ AOB 之外接圓與圓 O 有交點圖 (16) 、 (17) 則交點爲最小值位置。




(15)




(16)

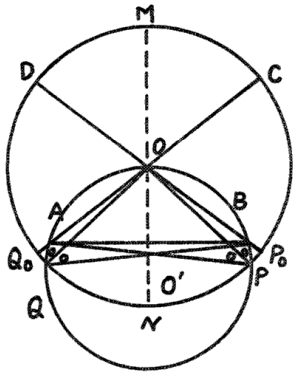
說明：由光行最短距離之性質，求入射角＝反射角之位置。

引理補充：轉折點 (T):$\overline{AP}$ 增加速率變動最大之位置。

目的：仿利用稱求最大值位置之方式，尋求最小值之位置。

推測：

(1) P 由 N(M) 移向 T 時， $\overline{AP}$ 增加速率增大。




(17)

(2) $\overset{\frown}{PT} = \overset{\frown}{QT} \Rightarrow \overline{AT} - \overline{AP} < \overline{AQ} - \overline{AT}$

附註：

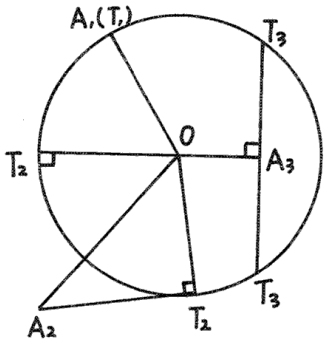
(1)圓上 $\Rightarrow T = A_1$

圖 (18)

(2)圓外 $\Rightarrow$ T 爲切點

(3)圓內 $\Rightarrow$ T 在以 $\overline{OA}$ 爲弦心距的弦上

註：此部份目前只以電腦資料觀察，仍待研究。




(18)

驗證：(1)圓上兩點：A 、B 爲小值位置　圖 (19)

說明：

(1)將 $\overline{P_1A}$ 、$\overline{P_2A}$ 對，$\overline{MN}$ 對稱取 $\overline{P'_1B}$ 、$\overline{P'_2B}$

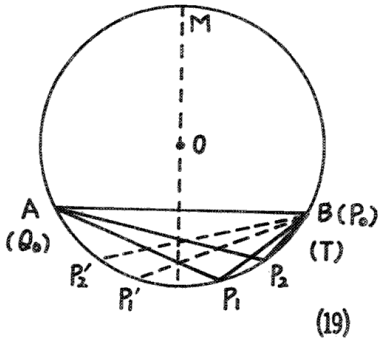
(2)$\because T = B \quad \therefore \overline{P_2'B} - \overline{P'_1B} < \overline{P_1'B} - \overline{P_2B}$

$\therefore \overline{P_2'B} + \overline{P_2B} < \overline{P_1'B} + \overline{P_1B} \Rightarrow \overline{P_2A} + \overline{P_2B}$

$< \overline{P_1A} + \overline{P_1B}$

$\Rightarrow$ P 由 N 移向 $P_0(Q_0)$ 時，$\overline{PA} + \overline{PB}$ 漸減

$\therefore$ A 、B 爲最小值位置




(19)

(2)圓外對稱兩點：N 爲最小值位置　圖 (20)

說明：

(1)將 $\overline{P_1A}$ 、$\overline{P_2A}$ 對 $\overline{MN}$ 對稱取 $\overline{P_1'B}$ 、$\overline{P_2'B}$

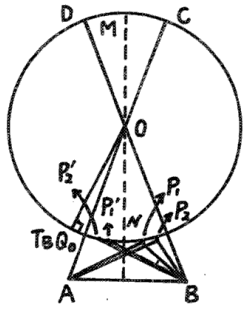
(2)$\because P_2'$ 、$P_1'$ 、$P_1$ 、$P_2$ 在 $T_B$ 之同側

$\therefore \overline{P_2'B} - \overline{P_1'B} > \overline{P_1B} - \overline{P_2B}$

$\Rightarrow \overline{P_2A} + \overline{P_2B} > \overline{P_1A} + \overline{P_1B}$

$\Rightarrow$ P 由 $P_0$ 移向 N 時，$\overline{PA} + \overline{PB}$ 漸減

$\therefore$ N 爲最小值位置




(20)

(3)圓內對稱兩點：外接圓與圓 O 交點

A: 不相交　圖 (21)

說明：同(2)之說明

B: 相切　圖 (22)

說明：

(1)將 $\overline{P_1A}$ 、$\overline{P_2A}$ 對 $\overline{MN}$ 對稱取 $\overline{P_1'B}$ 、$\overline{P_2'B}$

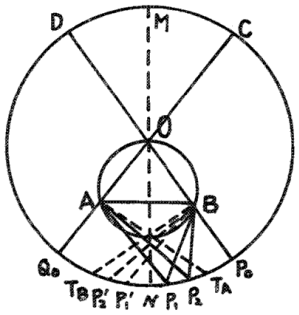
(2) $P_2'$ 、$P_1'$ 與 $P_1$ 、$P_2$ 在 $T_B$ 異側

由推測(2)可得 $\overline{P_2'B} - \overline{P_1'B} > \overline{P_1B} - \overline{P_2B}$

$\Rightarrow \overline{P_2A} + \overline{P_2B} > \overline{P_1A} + \overline{P_1B}$

$\Rightarrow$ P 由 $P_0$ 移向 N 時，$\overline{PA} + \overline{PB}$ 漸減

$\therefore$ 交點 N 爲最小值




(21)

C ：交於兩點　圖(23)

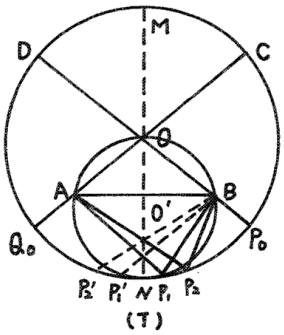



圖 22

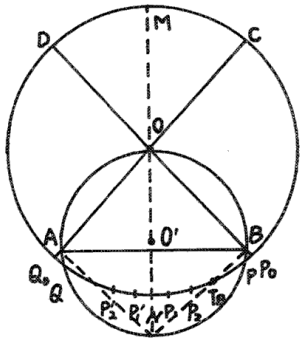



圖 23

說明：同(1)之說明可得：

P 由 N 移向 $T_B(T_A)$ 時，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 漸減

⇒最小值出現區域由消長區縮小爲 $\overset{\frown}{T_AQ_0}$ 、 $\overset{\frown}{T_BP_0}$

∴可排除 N 符合光學性質，但不爲最小值位置。

附註：由轉折點性質之推測，可將圓 O 與對稱兩定點距離和之變化做成結論，但證明部份仍待研究。

補充：同一外接圓之圓內對稱兩點之最小值位置相同（推論）。

㈣不對稱兩點：$\overline{OA}\neq\overline{OB}$

分類：可由直線 L 與圓 O 之位置關係尋找。

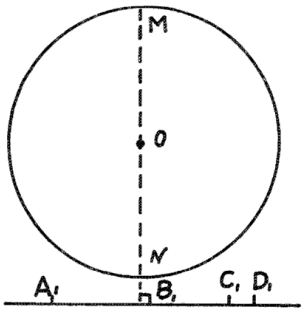



圖 24

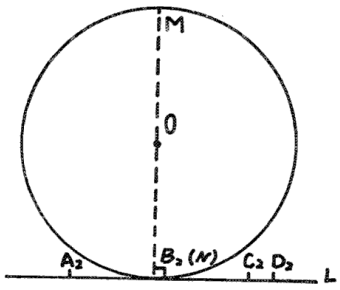



圖 25

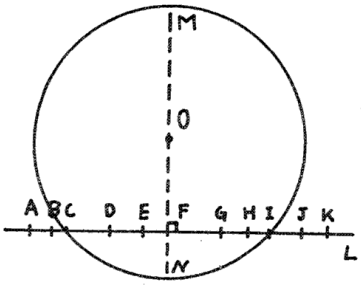



圖 26

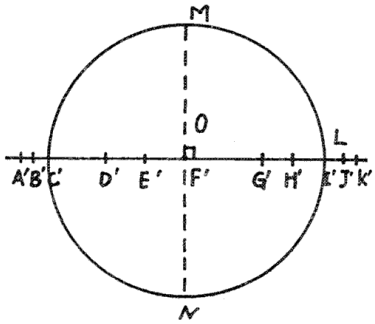



圖 27

*1.* L、O 不相交（圖(24)）

對　稱：$\overline{A_1C_1}$。

不對稱：$\overline{A_1D_1}$、$\overline{B_1D_1}$、$\overline{C_1D_1}$。

*2.* L、O 相切（圓(25)）

對　稱：$\overline{A_2C_2}$。

不對稱：$\overline{A_2D_2}$、$\overline{B_2D_2}$、$\overline{C_2D_2}$。

*3.* L、O 相於於兩點（圖(26)、(27)）

(1)對　稱：$\overline{AJ}$、$\overline{CI}$、$\overline{DG}$。

不對稱：$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{AD}$、$\overline{AF}$、$\overline{AG}$、$\overline{AI}$、$\overline{AK}$、$\overline{CD}$、$\overline{CF}$、$\overline{CG}$、$\overline{DE}$、$\overline{DF}$、$\overline{DH}$。

(2)對　稱：$\overline{A'J'}$、$\overline{C'I'}$、$\overline{D'G'}$。

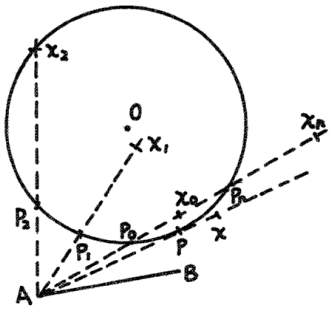
不對稱：$\overline{A'B'}$、$\overline{A'C'}$、$\overline{A'D'}$、$\overline{A'F'}$、$\overline{A'G'}$、$\overline{A'I'}$、$\overline{A'K'}$、$\overline{C'D'}$、$\overline{C'F'}$、$\overline{C'G'}$、$\overline{D'E'}$、$\overline{D'F'}$、$\overline{D'H}$。

㈤實驗觀察：

說明：因爲不對稱兩點之最大最小值位置無法以對稱方式觀察。

*1.* 將圓與點座標化：取 (0,0) 爲圓心，$r = 10\sqrt{2}$，利用畢氏定理求出圓上 40 個參考點，如：$(0、10\sqrt{2})$、$(2、14)$、$(4、\sqrt{184})$、$(6、\sqrt{164})$、$(8、\sqrt{136})$、$(10、10)$、$(\sqrt{136}、8)$、$(\sqrt{164}、6)$、$(\sqrt{184}、4)$、$(14、2)$、$(10\sqrt{2}、0)$（第一象限）其餘類推。請老師用電腦協助，實際算出 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 之大小，並作觀察、比較。

*2.* 將原欲比較之 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 兩段和利用尺規作圖爲一段長：$\overline{AX} = \overline{AP} + \overline{BP}$，由 X 之分佈圖形觀察大小變化。（得出許多如莞豆的圖形）（圖(28)）




(28)

註：*1.* 中取點並未形成等弧，由於三角函數尚未學習，故此部份請老師幫忙改成等弧操作綜合歸納：

*1.* 圓上對稱兩點：$\overline{CI}$、$\overline{CI'}$（定理 1）圖(26)、(27)。

| | $\overline{CI}$ | $\overline{C'I'}$ |
|---|---|---|
| 最大值 | M | M、N |
| 最小值 | C、I | C′，I′ |

*2.* 圓外對稱兩點：$\overline{A_1C_1}$、$\overline{A_2C_2}$、$\overline{AJ}$、$\overline{A'J'}$（定理 2）圖(24)、(25)、(26)、(27)。

| | $\overline{A_1C_1}$ | $\overline{A_2C_2}$ | $\overline{AJ}$ | $\overline{A'J'}$ |
|---|---|---|---|---|
| 最大值 | M | M | M | M.N |
| 最小值 | N | N(B2) | C、I | C′、I′ |

*3.* 圓內對稱兩點：$\overline{DG}$、$\overline{D'G'}$（定理3、推論）圖(26)、(27)

| | $\overline{DG}$ | $\overline{D'G'}$ |
|---|---|---|
| 最大值 | M | M、N |
| 最小值 | 推論 | C′、I′(*) |

*：此時 $\overset{\frown}{C'MI'}$、$\overset{\frown}{C'NI'}$ 同是消長區

*4.* 不對稱兩點：

(1) $\overline{A'B'}$、$\overline{A'C'}$、$\overline{A'D'}$、$\overline{A'F'}$、$\overline{C'D'}$、$\overline{C'F'}$、$\overline{D'E'}$、$\overline{D'F'}$ 之最大值皆爲 I′，最小值皆爲 C′。∵此時 $\overset{\frown}{C'M\cancel{N}I'}$、$\overset{\frown}{C'NI'}$、皆爲生長區。圖(27)

(2)兩定點所連線段若與圓 O 有交點，則交點必爲最小值位置。

(3)其它情況之最大最小值位置只能初步判斷必落於消長區，而以實驗法觀察其近似位置（待研究）。

(六)課外指導：橢圓

說明：研究內容一直在 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 之大小打轉，老師便問：平面上和 A、B 距離和爲定值之點圖形爲何？我們以細線套筆畫圖，形似橢圓，但不易操作且誤差大，後來老師告訴我們橢圓定義，並協助設計一畫具以減少誤差，如圖(29)A、B ⊥ $E_2$P ⊥ $E_1$,A // B // P // $E_3$。

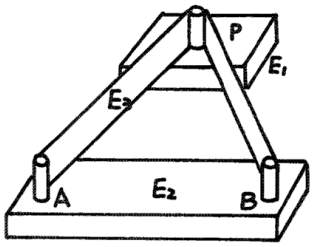



圖 29

目的：橢圓與圓 O 相切之處即爲最大或最小值位置。（待研究）

綜合觀察：

*1.* 對稱兩點橫向變化：

⇒最小值由一點 N 慢慢變成兩點向 P、Q 移動（圖(30)）。

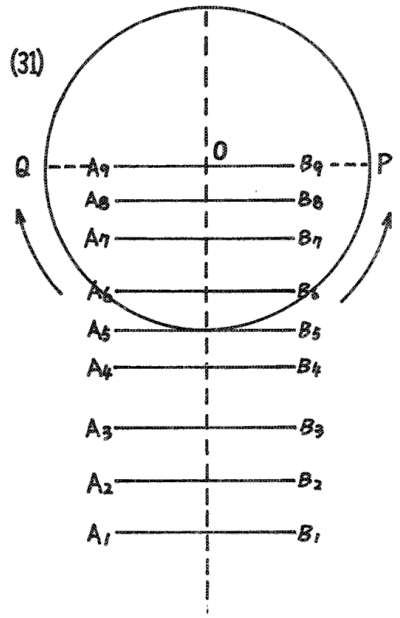
*2.* 對稱兩點縱向變化：

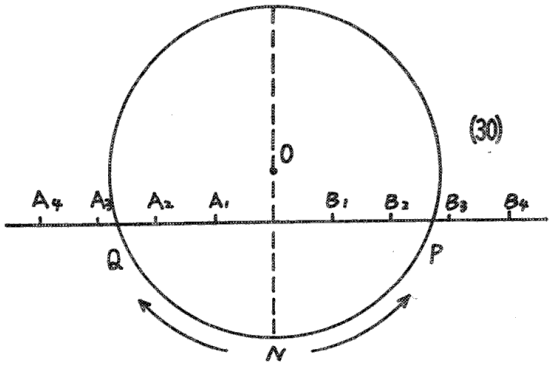
⇒最小值由一點 N 慢慢變成兩點向 P、Q 移動（圖(31)）。

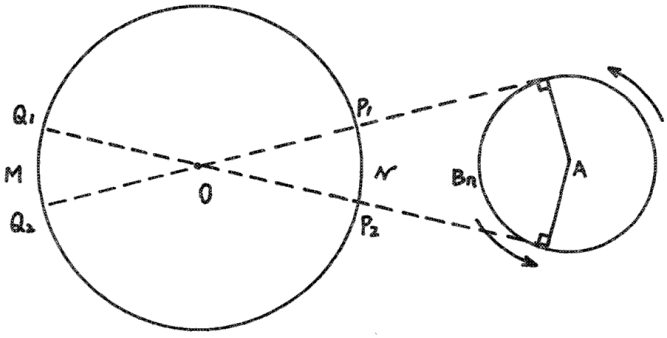
*3.* 不對稱兩點：以一點爲圓心，另一點旋轉（可分外離、內離、外切、內切、相交等情況觀察）。

最大最小值有單擺現象：$M \to Q_2 \to M \to Q_1 \to M$

圖(32)　$N \to P_1 \to N \to P_2 \to N$




(32)

# 五、研究結果

圓上任一點與兩定點距離和之最大最小位置及其變化。

# 六、討論

由於所學不多也不廣，研究時常碰釘子，除了與同學討論，請教老師之外，希望能學得更多相關知識，以更進一步研究。

# 七、結論

1.對稱兩點之最大最小值位置可用尺規作圖求出。

2.不對稱兩點，除了特例，餘皆只能判斷在消長區。

3.利用橢圓相切，可觀察最大最小值位置。

# 八、參考資料

國中數學及教師手冊。

註：由於篇幅有限，附件及部份證明未能詳載。

# 評語

本作品主要探討圓上任一點與兩定點距離就和的大小變化。整個問題討論頗有系統。