

三等分一弦之問題探討

國中組數學科第一名

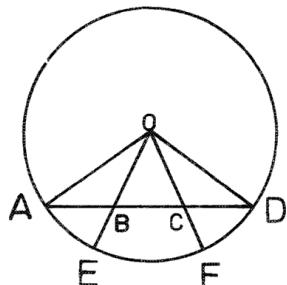
台北縣私立光仁中學

作 者：呂岳峰、徐嘉鴻、藍鈺邴、高嘉宏

指導教師：王意芝、林松潤

一、研究動機

在國中數學選修上冊中，第四章討論圓與直線的關係，老師曾講過一個這樣的題目類似此種圖形的題目在考試中也常出現，引起我們研究的興趣。



已知： $\overline{AO} = \overline{OD} = r = \overline{EO} = \overline{FO}$ ，

\overline{AD} 為圓內一弦，被 \overline{EO} 、 \overline{FO} 三等分
(即 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$)

求證： $\angle BOC > \angle AOB = \angle COD$

二、研究目的

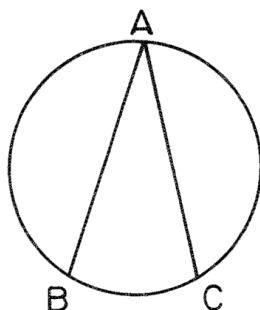
(一)如果圓內有共端點等長的兩弦，是否有一弦被它們三等分？

(二)若存在，應有幾條？有何限制？這個問題改成命題敘述如下：

已知：圓內兩弦 \overline{AB} ， \overline{AC} ， $\overline{AB} = \overline{AC}$

討論：是否有另一弦被 \overline{AB} ， \overline{AC} 三等分？

更進一步，是否有另一弦被它們分成 $m:n:m$?
(m, n 為自然數)。



三、預備知識

(一)餘弦定律。

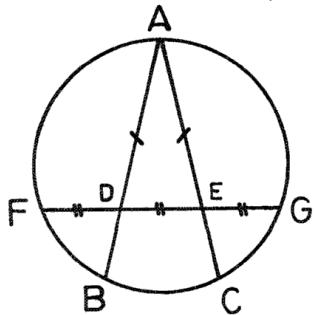
(二)作圖：求作 $a+b$ ， $a-b$ ， ab ， $\frac{1}{a}$ ， \sqrt{a} 。

(三)廣義三角函數。

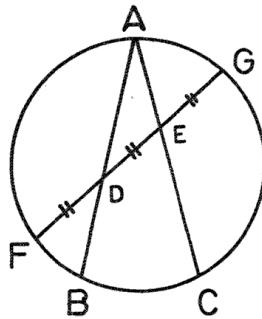
(四)特殊角之三角函數值。

四、研究過程

我們處理的過程是先研究 $\triangle ADE$ 為等腰三角形（如圖一），再討論 $\triangle ADE$ 非等腰三角形（如圖二）之情形。



(圖一)



(圖二)

2. 若 $\alpha = 90^\circ$ ，可得 $x = \frac{\ell}{5}$ 。

3. 若 $\alpha = 120^\circ$ ，可得 $x = \frac{\ell}{7}$ 。

至此發現似乎此弦應該存在。

4. 下面作 α 為任意角的情形 ($0^\circ < \alpha < 180^\circ$)。

已知： $\overline{AB} = \overline{AC} = \ell$ 設 $\overline{AD} = \overline{AE} = X$ ， $\overline{FD} = \overline{DE} = \overline{EG} = t$ ，

由 $x(\ell - x) = t(2t)$

$$\ell x - x^2 = 2t^2 \quad \therefore t^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos \alpha$$

$$\therefore \ell x - x^2 = 2(2x^2 - 2x^2 \cos \alpha)$$

$$= 4x^2 - 4x^2 \cos \alpha$$

$$\ell x = (5 - 4\cos \alpha)x^2$$

$$x = \frac{1}{5 - 4\cos \alpha} \quad \because 5 - 4\cos \alpha > 0$$

$\therefore x$ 必存在且可作！（註 1.）

(二) 不等腰：仍從特別角著手（如圖三）。

1. $\alpha = 60^\circ$ ， $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$$2t \cdot t = x(l-x)$$

$$2t \cdot t = y(l-y)$$

$$\rightarrow x(l-x) = y(l-y)$$

$$lx - x^2 = ly - y^2$$

$$l(x-y) = (x+y) \cdot (x-y)$$

(一) 等腰：從 $\angle DAE$ 為特別角時著手觀察（令 $\angle DAE = \alpha$ ）。

1. 若 $\alpha = 60^\circ$ 時 已知：

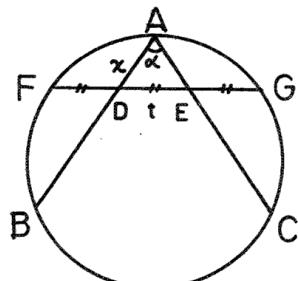
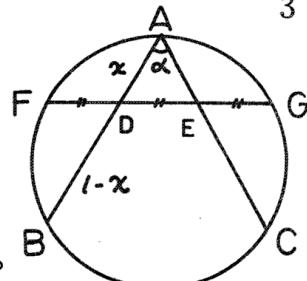
$$\alpha = 60^\circ, \overline{AB} = \overline{AC} = \ell$$

設 $\overline{AD} = x$

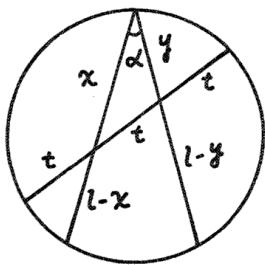
$$\text{由 } (\ell - x)x = x(2x)$$

$$\ell - x = 2x$$

$$3x = \ell \quad x = \frac{\ell}{3}$$



$$\therefore l = x+y$$



$$\therefore t^2 = x^2 + (l-x)^2 - 2x(l-x) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\therefore x(l-x) = 2x^2 + 2(l-x)^2 - 2x(l-x)$$

$$lx-x^2 = 2x^2 + 2l^2 + 2x^2 - 4lx - 2lx + 2x^2$$

$$7x^2 - 7lx + 2l^2 = 0$$

$$x = \frac{7l \pm \sqrt{(-7l)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2l^2}}{2 \cdot 7} = \frac{7l \pm \sqrt{-7l^2}}{14}$$

(圖三)

\therefore 無解

$$2. \alpha = 30^\circ, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

由上可得 $l = x+y$,

$$\therefore t^2 = x^2 + (l-x)^2 - 2x(l-x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore x(l-x) = 2x^2 + 2(l-x)^2 - 2\sqrt{3}x(l-x)$$

$$lx-x^2 = 2x^2 + 2l^2 + 2x^2 - 4lx - 2\sqrt{3}lx + 2\sqrt{3}x^2$$

$$(5+2\sqrt{3})x^2 - (5+2\sqrt{3})lx + 2l^2 = 0$$

$$x = \frac{(5+2\sqrt{3})l \pm \sqrt{[(5+2\sqrt{3})l]^2 - 4(5+2\sqrt{3}) \cdot 2l^2}}{2(5+2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{5+2\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2(5+2\sqrt{3})} l$$

$\therefore x$ 存在且有兩解！可作！（註2.）

至此發現似乎此弦有時存在，有時不存在。

3. 下面作 α 為任意角的情形

$$x(l-x) = t \cdot 2t$$

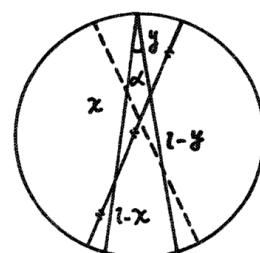
$$lx-x^2 = 2t^2$$

$$t^2 = x^2 + (l-x)^2 - 2x(l-x)\cos \alpha$$

$$2x^2 + 2l^2 + 2x^2 - 4lx - 4l\cos \alpha x + 4x^2 \cos \alpha \\ = lx - x^2$$

$$5x^2 + 2l^2 - 5lx - 4l\cos \alpha x + 4x^2 \cos \alpha = 0$$

$$(5+4\cos \alpha)x^2 - (4\cos \alpha + 5)lx + 2l^2 = 0$$



$$x = \left[\frac{4\cos \alpha + 5 \pm \sqrt{(4\cos \alpha + 5)^2 - 8(5 + 4\cos \alpha)}}{2(5 + 4\cos \alpha)} \right],$$

$$= \left[\frac{4\cos \alpha + 5 \pm \sqrt{(4\cos \alpha + 5) - (4\cos \alpha - 3)}}{2(5 + 4\cos \alpha)} \right],$$

若 x 有解，需 $4\cos \alpha - 3 \geq 0$

* $\cos \alpha \geq \frac{3}{4}$ 始有解 $\therefore \cos \alpha > \frac{3}{4}$ 有二解

$\cos \alpha = \frac{3}{4}$ 有一解，此時 $x = \frac{1}{2} \ell$ ，同等腰

五、結論

由上面(一)、(二)兩種情形，我們可以得到結論如下：

1. 不論 α 大小如何，必存在一弦被 \overline{AB} ， \overline{AC} 三等分。

2. 當 $\frac{3}{4} < \cos \alpha < 1$ 時，有三條弦可以滿足。

當 $-1 < \cos \alpha \leq \frac{3}{4}$ 時，只有一條弦可以滿足。

六、進一步討論

是否有一弦被 \overline{AB} ， \overline{AC} 二弦截成 $2 : 1 : 2$ ？

(一) 在 $\triangle ADE$ 為等腰三角形的情況下（如圖四）。

已知： $\angle DAE = \alpha$ ， $\overline{AB} = \overline{AC} = \ell$ ， $\overline{AD} = \overline{AE} = x$ ， $\overline{DE} = t$ 。

1. 當 $\alpha = 60^\circ$ 時，由前述之同樣方法可得 $x = \frac{\ell}{7}$

2. 當 α 為任意角時

$$2t + 3t = x(l - x)$$

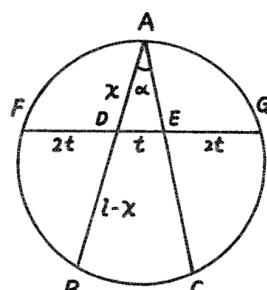
$$6t^2 = lx - x^2$$

$$\therefore t^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos \alpha$$

$$\therefore 12x^2 - 12x^2 \cos \alpha = lx - x^2$$

$$(13 - 12\cos \alpha)x^2 = lx$$

$$x = \frac{l}{13 - 12\cos \alpha}$$



$$\because 13 - 12\cos \alpha > 0$$

$\therefore x$ 必存在，且僅有一解

(二) 在 $\triangle ADE$ 非等腰三角形的情況下

1. 當 $\alpha = 60^\circ$ 時，由前述可知 $l = x + y$

$$2t + 3t = x(l - x)$$

$$6t^2 = lx - x^2$$

$$\begin{aligned} \because t^2 &= x^2 + (l - x)^2 - 2x(l - x) \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3x^2 - 3xl + 6l^2 \end{aligned}$$

$$\therefore 6(3x^2 - 3xl + 6l^2) = lx - x^2$$

$$\rightarrow 19x^2 - 19xl + 6l^2 = 0$$

$$\because \text{判別式 } D = (-95)l^2 < 0 \quad \therefore \text{無實數解， } x \text{ 不存在！}$$

我們想要確定是否在非等腰之情形下均不存在？所以我們又接著試做 α 為任意角的情形。

2. 當 α 為任意角時

$$x(l - x) = 2t + 3t = 6t^2$$

$$\therefore t^2 = x^2 + (l - x)^2 - 2x(l - x)\cos \alpha$$

$$\therefore lx - x^2 = 6x^2 + 6(l - x)^2 - 12x(l - x)\cos \alpha$$

$$\rightarrow (13 + 12\cos \alpha)x^2 - (13 + 12\cos \alpha)lx + 6l^2 = 0$$

$$\text{判別式 } D = [(13 + 12\cos \alpha)l]^2 - 4(13 + 12\cos \alpha) \cdot 6l^2$$

$$= (13 + 12\cos \alpha)(12\cos \alpha - 11)l^2$$

欲使 $D \geq 0$ (即 x 有解) 時，需 $12\cos \alpha - 11 \geq 0$ ，即 $\cos \alpha \geq \frac{11}{12}$ 。

3. 至此，我們可得結論如下：

(1) 不論 α 大小如何，必存在一弦被 \overline{AB} 、 \overline{AC} 成分 $2 : 1 : 2$ 。

(2) 當 $\frac{11}{12} < \cos \alpha < 1$ 時，有三條弦可以滿足。

當 $-1 < \cos \alpha \leq \frac{11}{12}$ 時，只有一條弦可以滿足。

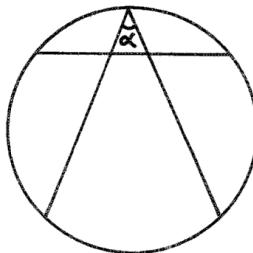
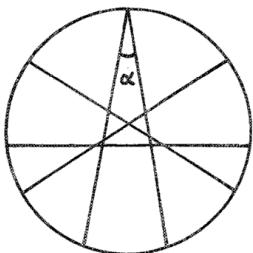
example:

$$\alpha = 20^\circ, \cos \alpha \approx 0.94$$

$$0.94 > \frac{11}{12}$$

$$\alpha = 45^\circ, \cos \alpha \approx 0.71$$

$$0.71 < \frac{11}{12}$$



七、推廣

是否有一弦被 \overline{AB} 、 \overline{AC} 二弦截成 K:1:K 之線段？

令 α 為任意角 ($k = \frac{m}{n}$, m 、 n 為自然數)

1. 等腰之情況下

$$x(l - x) = kt \cdot (kt + t)$$

$$lx - x^2 = k^2t^2 + kt^2$$

$$= (k^2 + k)(2x^2 - 2x^2\cos \alpha)$$

$$= 2k^2x^2 - 2k^2x^2\cos \alpha + 2kx^2 - 2k^2\cos \alpha$$

$$lx = (2k^2 - 2k^2\cos \alpha + 2k - 2k\cos \alpha + 1)x^2$$

$$x = \frac{l}{2k^2 + 2k - 2k^2\cos \alpha - 2k\cos \alpha + 1}$$

$$= \frac{l}{2k(k+1)(1-\cos \alpha) + 1} \quad \therefore x \text{ 有解!}$$

2. 非等腰之情況下 同上證得 $x + y = \ell$

$$x(l - x) = kt \cdot t(k + 1)$$

$$- x^2 + xl = k(k + 1)t^2$$

$$= k(k + 1)[x^2 + (l - x)^2 - 2x(l - x)\cos \alpha]$$

$$= k(k + 1)[(2 + 2\cos \alpha)x^2 - (2l + 2l\cos \alpha)x + l^2]$$

$$\rightarrow [2k(k + 1)(1 + \cos \alpha) + 1]x^2 - [k(k + 1)(2l + 2l\cos \alpha) + l]x + k(k + 1)l^2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$= [k(k + 1)(2l + 2l\cos \alpha) + l]^2 - 4[k(k + 1)l^2] \cdot [2k(k + 1)(1 + \cos \alpha) + 1]$$

$$= [4k^2(k + 1)^2(1 + \cos \alpha)^2 + 4k(k + 1)(1 + \cos \alpha) + 1 - 8k^2(k + 1)^2(1 + \cos \alpha) - 4k(k + 1)] \cdot l^2$$

$\because \ell$ 恒正 \therefore 不討論

$$\text{欲使 } 4k^2(k + 1)^2(1 + \cos \alpha)(1 + \cos \alpha - 2) + 4k(k + 1)(1 + \cos \alpha - 1) + 1 \geq 0$$

$$4k^2(k + 1)^2(1 + \cos \alpha)(\cos \alpha - 1) + 4k(k + 1)\cos \alpha + 1 \geq 0$$

以 $\cos \alpha$ 降幕

$$4k^2(k + 1)^2\cos^2 \alpha + 4k(k + 1)\cos \alpha + 1 - 4k^2(k + 1)^2 \geq 0$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 & \diagup & \diagdown & & \\
 & 2k(k+1)\cos\alpha & & 1+2k(k+1) & \\
 \diagup & & \diagdown & & \diagdown \\
 4k^2(k+1)^2\cos^2\alpha & & 2k(k+1)\cos\alpha & & 1-4k^2(k+1)^2 \\
 & \diagdown & \diagup & & \\
 & & 1-2k(k+1) & & \\
 & \diagup & \diagdown & & \\
 & & 4k(k+1)\cos\alpha & &
 \end{array}
 \end{array}$$

$$[\underline{2k(k+1)\cos\alpha} + \underline{1+2k(k+1)}] \cdot [\underline{2k(k+1)\cos\alpha} + \underline{1-2k(k+1)}] \geq 0$$

$$[\underline{2k(k+1)(1+\cos\alpha)} + 1] \cdot [\underline{2k(k+1)(\cos\alpha-1)} + 1] \geq 0$$

\because 恒正

$$\therefore \text{需 } 2k(k+1)(\cos\alpha-1) + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow 2k(k+1)\cos\alpha - 2k(k+1) + 1 \geq 0$$

$$\therefore \cos\alpha \geq \frac{2k(k+1)-1}{2k(k+1)} \text{ 始有解!}$$

八、總結

1. 不論 α 大小如何，必存在一弦被 \overline{AB} 、 \overline{AC} 二弦截成 K:1:K 之線段。

2. 當 $\cos\alpha > \frac{2k(k+1)-1}{2k(k+1)}$ 時，有三條弦可以滿足。

$\cos\alpha \leq \frac{2k(k+1)-1}{2k(k+1)}$ 時，只有一條弦滿足。

3. 當 K 值愈大時， α 角相對的要愈小，才能找到三條弦滿足。

4. 當 K 為整數時

\because 觀察分數 $\frac{2k(k+1)-1}{2k(k+1)}$ ，發現分子和分母只相差 1

\therefore 可以看成類似公式來應用

如：欲分成 3 : 1 : 3 時，此時 K = 3，代入

可得 只要 $\cos\alpha > \frac{23}{24}$ ，就有三個解

5. 當 K 不為整數時，代入計算仍十分方便

如：欲分成 3 : 2 : 3 時，此時 $K = \frac{3}{2}$ ，代入

可得 只要 $\cos \alpha > \frac{13}{15}$ ，就有三個解

九、展望

是否存在一弦被分成 m:n:k (m,n,k 是任意自然數) ?

若存在，條件又為何？又有幾個解呢？（註 3.）

這是我們希望再努力的方向。

十、參考資料

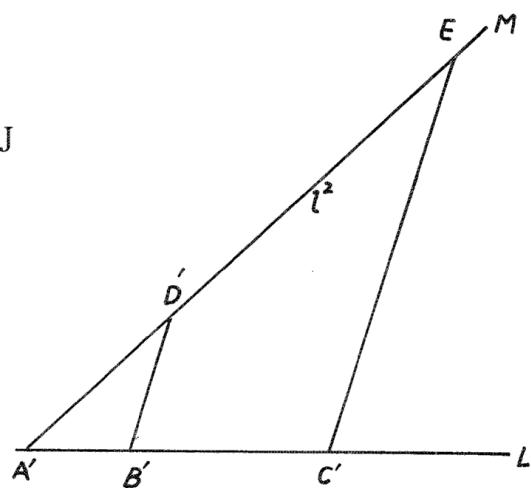
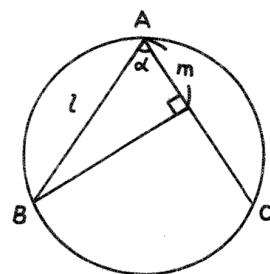
1. 國中數學選修上冊。
2. 高中基礎數學第二冊。
3. 三角函數 李躍進著 一流出版社
4. 世界數學競賽試題精選 正中書局

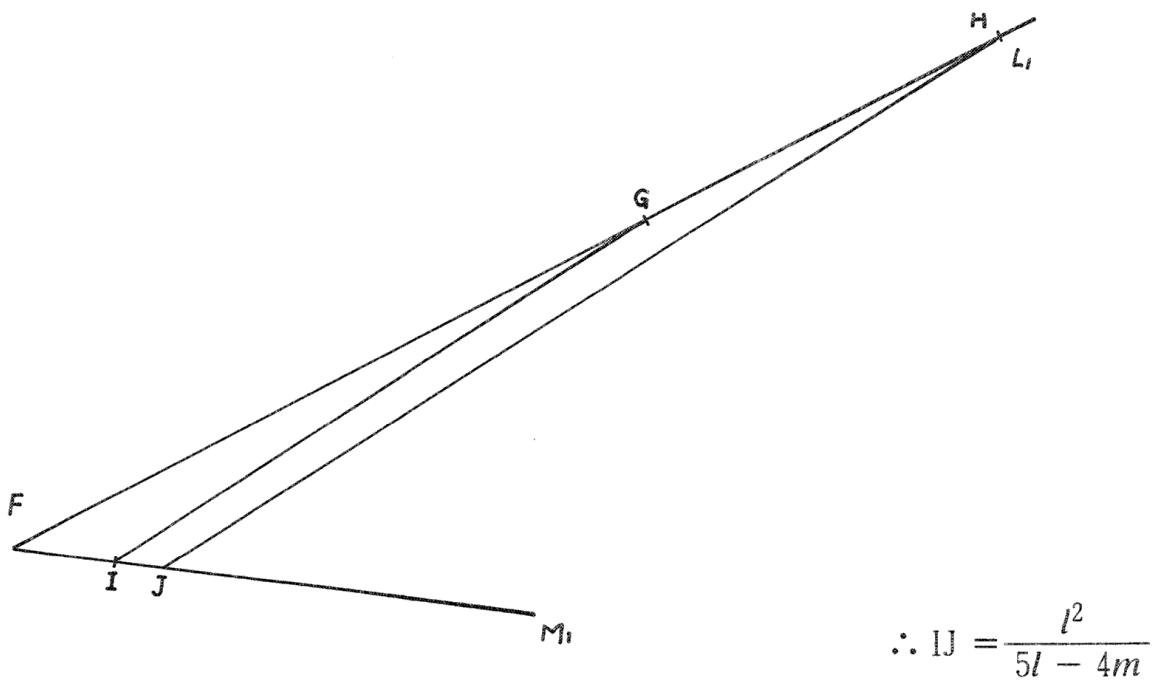
(註 1.) 已知： $\overline{AB} = \overline{AC} = l$ ， $\overline{AD} = m$ ， $\overline{BD} \perp \overline{AC}$

求作： $(\frac{l^2}{5l - 4m} = \frac{l}{5 - 4\cos \alpha})$ 先作 $\cos \alpha = \frac{m}{l}$

作法：

1. 在 L 上取 $\overline{A'B'} = 1$ ， $\overline{B'C'} = l$
2. 在 M 上取 $\overline{A'D'} = l'$
3. 連 $\overline{B'D'}$
4. 作 $\overline{C'E} \parallel \overline{B'D'}$ 交 M 於 E
5. 則 $\overline{D'E} = l^2$
6. 在 L_1 上取 $\overline{FG} = 5l - 4m$ ， $\overline{GH} = l^2$
7. 在 M_1 上取 $\overline{FI} = 1$
8. 連 \overline{IG}
9. 作 $\overline{JH} \parallel \overline{IG}$ ，交 M_1 於 J
10. \overline{IJ} 即為所求



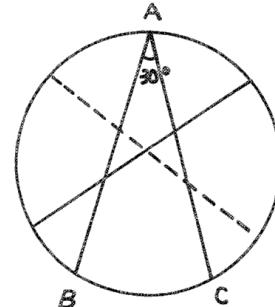


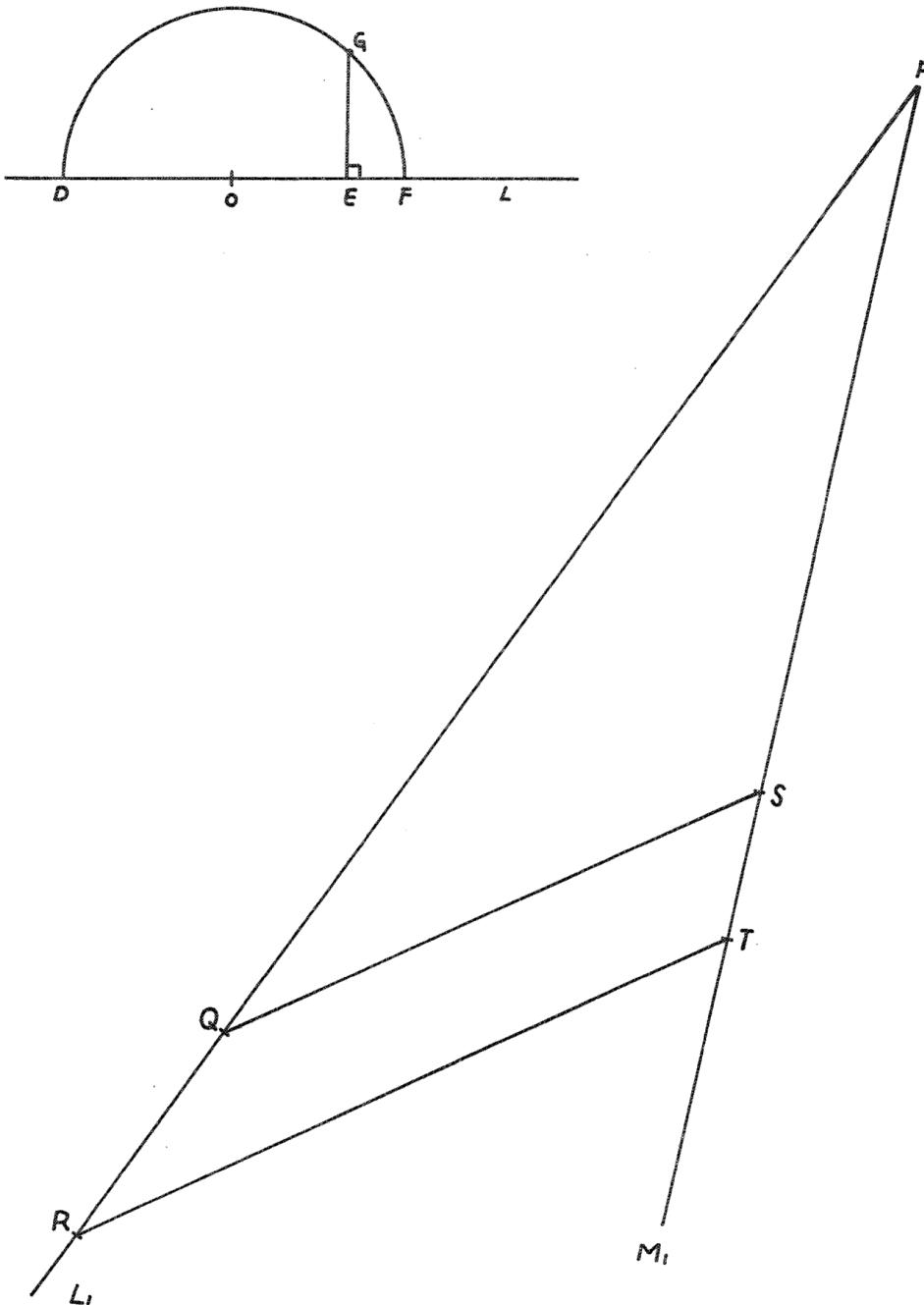
(註2.) 已知： $\overline{AB} = \overline{AC} = l$

$$\text{求作：} \left(\frac{5 + 2\sqrt{3} \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2(5 + 2\sqrt{3})} \right) l$$

作法：

1. 以預備知識(二)，5.之作法作 $\sqrt{3}$
2. 作直線 L ，在 L 上取 $\overline{DE} = 4\sqrt{3} - 3$ ， $\overline{EF} = 1$
3. 以 \overline{DF} 為直徑畫半圓
4. 過 E 作 $\overline{EG} \perp \overline{DF}$ 交半圓於 G
5. 則 $EG = \sqrt{4\sqrt{3} - 3}$
6. 在 L_1 上取 $\overline{PQ} = 2(5 + 2\sqrt{3})$ ， $\overline{QR} = 1$
7. 在 M_1 上取 $\overline{PS} = (5 + 2\sqrt{3} + \sqrt{4\sqrt{3} - 3})$
8. 連 \overline{QS}
9. 過 R 作 $\overline{RT} \parallel \overline{QS}$ 交 M_1 於 T
10. \overline{ST} 即為所求





$$\therefore ST = \frac{5 + 2\sqrt{3} + \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2(5 + 2\sqrt{3})} l, \text{ 同理可作 } \frac{5 + 2\sqrt{3} - \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2(5 + 2\sqrt{3})} l$$

(註3.) 對於這個方向，我們初步已得結論如下：

1. 當 $m = k$ 時，情形如前述之 “ $k : 1 : k$ ”，已討論過。
2. 當 $m \neq k$ 時，若在等腰的狀況下，我們已證得是不存在的！至於非等腰的狀況，尚有待突破。

評語

本作品由學習圓與直線的關係，引出圓內共端點等長的兩弦是否有一弦被它們三等分；研究者把問題討論的相當完整並能作適當推廣，頗具創意。