

波動的模擬

高中組應用科學科第二名

師大附中

作者：葉倍秀、李中暘

指導教師：廖大淵、胡希真

一、研究動機

高三時，物理課探討了有關波動的概念，對於某些現象，只能靠靜態的圖解，再加上豐富的想像力來理解；對較複雜的現象，更是有如瞎子摸象一般。熟悉電腦的我們於是想到，何不利用電腦來模擬波動，不但可以將理論與實際相互證明，也許還能造福困惑的芸芸學子們呢？

二、研究目的

- (一)利用電腦模擬各種重要的波動現象。
- (二)學習如何藉電腦從事科學研究。
- (三)研究電腦模擬的技術。

三、研究設備

- (一)486 DX2-66 個人電腦。
- (二)Microsoft QuickBasic 4、5版。
- (三)人腦兩具。

四、研究大綱

- (一)橫波 Transverse Waves。
- (二)縱波 Longitudinal Waves。
- (三)水波 Water Waves。
- (四)光波 Light Waves。
- (五)都卜勒效應 Doppler Effect。

五、研究內容

- (一)橫波

1. 常見之橫波波動現象

首先，我們選定 5 種最典型的橫波波型來作為研究的對象，茲簡介如下：

- (1) 方塊波。
- (2) 三角波。
- (3) 鋸齒波。
- (4) 正弦波。
- (5) 整流正弦波。

2. 波動現象模擬之基本設定

顯示模式	SCREEN 9 640 × 350 16 色 2 頁		
動畫效果	SCREEN 切換		
參 數	Length	波長	點
	Amplitude	振幅	點
	Velocity	波速	點 / 單位時間

3. 橫波的行進

- (1) QB 的繪圖指令在座標超出顯示範圍時仍可執行，且能將在範圍內剩餘的部份顯示出來。所以，只要使一稍大於顯示範圍的波向前行進一週期，再反覆執行，便能達到動畫的效果。
- (2) 在正弦波部份，我們引進波動方程式的概念，因此，只要將 t 在 $0 \sim T$ 之間變化，就是一道向前傳遞的正弦波；換句話說，如此便可模擬出波形對 t 的變化，若能加以適當的延遲，就可以與真實世界的時間相符。

4. 橫波의 交會

兩波在交會時，遵守著重疊原理：

- (1) 波在交會時，質點的位移等於各波單獨位移的代數和。
- (2) 波在交會後，波形、波速不因交錯通過而改變。

5. 基本方法

依照重疊原理，我們先用最基本的方法：

- (1) 將各點的振動位移儲存在陣列中。
- (2) 依二波的位置，依重疊原理計算出合位移。
- (3) 考慮兩波在同一介質內交會，所以波速理應相同。
- (4) 這種方法適用於任何波形，而且就算兩波波形不同也能適用。但是既然

是典型的波形，當然有典型的運算方式。

A. 直線波—斜率

兩三角波共可產生 $2 \times 2 = 4$ 種不同的斜率，所以我們只要計算四種斜率的分布範圍對時間的關係，即可藉此畫出合成波。

B. 正弦波—波動方程式

利用波動方程式，配合三角函數的加角公式，即可算出疊合後的波形。

6. 橫波的反射

我們所要研究的情況為波入射於一端固定或自由時反射的情形。在最理想的情況下，波會原封不動地被反射回來，就好像是端點的另一端有一個假想的波射過來，和原本的行進波產生波的重疊現象；但因為端點的不同，會使方向上下顛倒。

在這裡，我們是利用基本的方法，來印證節點、腹點的現象。

7. 橫波的駐波

駐波，其實就好像是兩相等波長、振幅，但行進方向相反的波重疊而成的，而先前在研究波的反射情形時的確發現在此種情況下，重疊過程中有類似駐波的存在。

(1) 弦上駐波

給定一弦長 l 、端點型式及第 n 諧音，依照公式我們可以求出駐波的波長及節點腹點的位置。

(2) 來回反射的駐波

從另一個角度來看，駐波就是在兩端皆有端點的情況，不斷地被反射又反射；我們利用之前各個結果，來研究從一端不斷地起波，在兩端點間來回反射而產生駐波的情形。

(3) 波動方程式

正弦波的駐波，也可以利用波動方程式。

考慮駐波類似由兩相等波長、振幅，但行進方向相反的波交會而成；我們先以波動方程式表示此二波，再將二式相加，即可得出重疊後的波型。

8. 波的觀察器

統合以上所有的波動研究，我們撰寫了一個程式可方便地觀察這部份所有的波動現象。

波型		現象	可操縱參數	功能
直線波		行進	波長、振幅、波數	暫停
1	方塊波	交會	兩波波長、振幅、 相位差	重新執行
2	三角波			註解波形
3	鋸齒波	反射	波長、振幅、端點、 波數	更改參數
曲線波				顯示各獨立波
4	正弦波	駐波	弦長、振幅、 第?諧音	增減波速
5	整流正弦波			結束

(二)複雜波形的模擬

波動的變化可以說是一個對時間的函數。但是，只有一部份的波形，我們可以用簡單的數學式表達（如正弦波），其它大部份都是非常地複雜。在這裡，我們將研究如何用數學的方法來模擬一個已知的波形。

1. 波形的取樣模擬

波動是相對於時間來變化，是連續的，所以我們採用取樣的方式來分析它。我們的方法大致如下：

- (1)讀入某一週期的波形。
- (2)每隔某距離取樣一次。
- (3)將最大振幅分成 n 單位，將取樣得到的振幅歸類之。
- (4)把每三點當成拋物線的一部分，解聯立式以數學函數的形式來描述之。

如此，我們只要少許的資料便可模擬出很接近的波形了。

2. 傅立葉轉換

- (1)傅立葉轉換是由法國的數學家 Fourier 所發明，其基本內容為：任意週期函數，可表成多個正弦函數之和。所以，若利用在具有週期性橫波波動上，是非常恰當的。
- (2)關於傅立葉轉換出現的積分式，我們是以辛浦森拋物線法來逼近。對於我們任意給定的波形，傅立葉轉換取愈多次，得到的波形便愈接近。

(三)縱波（疏密波）

1. 利用波動方程式

這一部份，利用波動方程式可計算出整個波形對時間的變化，且應該非常符合真實世界的情形。

2. 利用顏色

(1)疏密的變化，利用顏色深淺變化也能達到效果；當然，愈密的地方顏色是愈深（暗）的。

(2)此處利用到漸層色，便無法使用 SCREEN 9 兩頁切換的功能；如果單純地用 CLS 會閃爍地不像話。於是，考慮波動的週期性，我們想到利用調色盤切換的方法。

3. 縱波的駐波

我們利用波動方程式計算各質點振動的位移，規則一如之前研究之橫波。

4. 彈簧

若要繪出有圓圈圈的彈簧，則必須利用 3D 繪圖的技術。我們先利用波動方程式求出每一質點位點，再以圓的參數式繪出螺線，連接每一個質點，且每兩個質點間恰繞一圈。

四水波

1. 水波的干涉

(1) 平面水波

A 程式中，可以看見兩個波源各自往四面八方發出圓形波的情形，不過因限於電腦螢幕為一個二度空間的 (x,y) 平面，只能以波峰及波谷的波前代表。

(2) 節線及腹線

C 我們連出腹線及節線的方法為

(a) 從起波起，在每一間隔計算出兩兩波峰波前的交點及兩兩平衡點波前的交點，記錄在陣列裡。此部份需要解方程式。

(b) 將所記錄的點連接起來。

D 接著，我們依理論，以雙曲線的方式繪出腹線節線，結果與我們的模擬相當接近。

(3) 彩色水波

A 我們將調色盤調成 64 個漸層的綠色（看得較清楚），再由其波程差計算出其振幅及對應之顏色。

(4) 3D 水波

我們利用多孔網模型表現水平面，計算水波振幅的方法一如前面的彩色水波。

2. 虛擬水波槽

我們在水波模擬這部份的目標之一，就是創造一個虛擬的水波槽。

(1)演算法

程式允許使用者設定四條直線，用來把水波槽分割成至多十一個區域。我們將水波視為許多點的集合，並分別計算出這些點所處的區域，以及他們的速度與方向。

(2)程式功能

可設定十一個區域的相對速度，以造成折射的效果。如果將速度定為零，程式就認定此區域為反射面。值得一提的是，我們並沒有使用司乃爾定律，但出來的結果卻符合此定律。也就是說，我們驗證了此定律的正確性。

(3)尚待改進

A 繞射現象未加入

B 輸出入界面有待加強

(五)光波

1. 課內範圍的研究（略）

2. 進階研究

(1)單狹縫繞射中，除了中央亮帶外，其他地方的亮度均較之小非常多，所以顏色的對應分配要有技巧。

(2)雙狹縫干涉的實驗中，若狹縫寬度夠大，就會產生繞射與干涉混合的情形。

(3)多狹縫繞射

多狹縫繞射的光強度分布，其實就是單狹縫繞射光強度分布與多狹縫干涉光強度分布之乘積。我們將分別顯示單狹縫繞射光強度分布與多狹縫干涉光強度分布，再計算其相乘情形，可得出多狹縫繞射的光強度分布。

(4)方型孔繞射

程式中，得出之方型孔繞射圖樣為一十字型，與真實情況相符。此外，對照用的 $I(X, Y)$ 的圖形必須以 3D 繪圖來表示。

(5)混合光的雙狹縫干涉現象

A RGB 三原色的混合光

三色混合光的干涉條紋，與三種顏色各別的條紋比較，果然每兩條紅色亮紋處，三色光的亮紋皆在此重疊，其混合光紋的顏色是白色。

B 白色混合光

電腦中的各色光，均是由 RGB 三色光所組成。

而白光是一連續的譜線，處理起來不似之前直接以三原色一般單純，要考慮其組成。以下說明我們的想法：

- (a) RGB 全滿時，剛好可填滿全部譜線，產生白光。
- (b) 之前七種色光，在圖上的位置其順序正確。
- (c) 譜線左邊為紅色漸暗至無色。
- (d) 譜線右邊為紫色漸暗至無色。

(六) 聲波

1. 都卜勒效應

(1) 圖解都卜勒效應

A 都卜勒現象只是一種概念，因此只能抽象的去理解它。課本上的圖示，也受限於靜態的表現，而無法讓人直觀上理解。故我們想到用動畫的方法產生示意圖，來模擬都卜勒現象。

B 程式的寫作方式是採用真實時間。

(2) 聲音的模擬

A 高中範圍內關於都卜勒效應的討論主要有兩種：

- (a) 聲源做直線運動：
- (b) 聲源做等速率圓周運動：

B 我們利用都卜勒效應的公式，連續計算每個瞬間聽者聽到的聲音頻率，並用 SOUND 指令發一短暫的聲音。最後的結果相當平滑。

2. 聲音波型的模擬

(1) 簡介：

A 聲音波型的輸入

B 依照此波型，利用聲霸卡發出週期波

(2) 設計方式：

首先由使用者定義波型

設計完波型後，程式便自動產生一格式為 .VOC 的聲音檔（檔名可自定），並呼叫外部程式來播放。檔案長度為兩秒鐘，取樣頻率 10000Hz。

(3) 結果：

我們利用此程式，設計了幾種不同頻率的正弦波、方塊波等等，供評審老師試聽。我們還對照真實的小提琴波型，試著模擬出一類似小提琴的聲音。當然，因為尚未考慮的因素還有很多，所以與真的小提琴聲仍有一段差距。

(因受限於篇幅，許多內容無法詳載)

若需詳細資料(程式、報告...等)

可洽(02)8932392 葉倍秀

(02)7667420 李中暘

評語

1. 將電腦的特性如快速計算，圖形顯示及巨量記憶裝置，應用於各種波動的及時模擬顯示，波的反射、穿透、折射或干涉均可及時模擬，是具有創意之作品。
2. 充分的運用電腦技巧，物理的理論機制及計算機之演算法，符合科學研究的嚴謹態度與思考模式，充分顯示作者正確的研究方法。
3. 作品之研究主題含蓋很寬，因而不易在某一特定之事項作深入的探討。整體而言，作品仍呈現優良的完整性。
4. 具有優秀的科學教育的教學器材之價值。