乾坤大挪移—離散數學中的一個問題

高中組數學科第三名

臺灣省立彰化高級中學　　作　　者：蘇浩立、李紹鳴、沈俊青、劉嘉哲
指導教師：王聖輝、王玲玉

一、研究動機

清華大學林哲雄教授曾經蒞臨本校演講，提到1994年IMO第6題曾被撤換，原題如下：

給定n堆銅板，允許採用下述規則來搬動：在每次搬動中，可任意選擇兩堆，從一推搬動一些銅板到另一堆，使得每次搬動後，另一堆的銅板數目增加一倍。

(一)試證：當 $n=3$ 時，經有限次搬動必可將3堆變2堆。

(二)當 $n=2$ 時，試找出兩堆銅板數的關係式，使得經過有限次搬動後，一定可以將2堆變成1堆的充要條件。

經過幾次的搬動後，我們對此問題產生濃厚的興趣。

二、研究目的

(一)找出2堆變成1堆的充要條並加以證明。

(二)證明必可將3堆變成2堆。

(三)推廣：n堆變成2堆。

(四)找出3堆變成1堆的充要條件，加以證明並推廣。

(五)用電腦找出一些特殊數列由〝3堆變2堆或1堆〞及〝由4堆變2堆〞所需最少次數的規則，從而得出最少次數的通式。

三、預備知識

(一)預理1：$x+y=2^t$、$\forall t\in N$，且 $z\nmid(x,y)\Rightarrow(x,y)=1$

(二)預理2：$r,s\in N\cup\{0\},(r,s)=1$

則：*1.* 若 $(r+s)$ 爲偶數 $\Rightarrow(r-s,2s)=2$

2. 若 $(r+s)$ 爲奇數 $\Rightarrow(r-s,2s)=1$

四、研究過程

(一)找出 2 堆變成 1 堆的充要條件並證明之。

1. 想法：我們以〝逆推〞方法來想：搬動結束時，1 堆為 0，則另一堆必含 $(r+s)$ 個銅板；之前的兩堆銅板必各有 $\frac{r+s}{2}$ 個；再之前的 2 堆各含 $\frac{r+s}{4}$ 個和 $\frac{3(r+s)}{4}$ 個銅板……。得：欲 2 堆變 1 堆需 $r+s=(r \cdot s)\times 2^t,\ t\in N$ #（ r 和 s 分別為一開始的兩堆銅板數）。

2. 已知：2 堆銅板，各有 r 個和 s 個，$r,s\in N$

求證：此 2 堆銅板可搬成 1 堆 $\Leftrightarrow r+s=(r,s)\times 2^t, t\in N$

證明：∵ $r>s$ 與 $r<s$ 顯然同理可證，故證 $r>s$ 即可。

令 $d=(r,s)\Rightarrow\begin{cases}r=dr' & \text{其中 } (r',s')=1', r',s'\in N \text{ 且 } r'+s'=2^t,c,\\ s=ds' & t\text{ 可能是 0 或某一固定自然數}, c\text{ 為某一正奇數}\end{cases}$

令 k 次搬動後，銅板數對 (r_k,s_k)，則 $r_k \cdot s_k$ 的一般型式：

$\begin{cases}r_k=2^m d\cdot r_k' & \text{其中 } r_k'\cdot s_k'\in N\cup\{0\},(r_k'\cdot s_k')=1\\ s_k=2^m d\cdot s_k' & r_k'+s_k'=2m'\cdot c \quad c\text{ 為一正奇數 } m\cdot m'\in N\cup\{0\}\end{cases}$

我們稱 (r_k',s_k') 為 (r_k,s_k) 的最簡數對

設經 l 次搬動後可將 2 堆變成 1 堆

由預理 2：$(r_k'+s_k')$ 為偶數 $\Rightarrow (r_k'-s_k',2s_k')=2$

知：每搬動一次恰可提出 1 個 2

$\Rightarrow\begin{cases}r_{\ell-1}'=2^{\ell-1}d\cdot r_{\ell-1}'\\ s_{\ell-1}'=2^{\ell-1}d\cdot s_{\ell-1}'\end{cases}\quad r_{\ell-1}'+s_{\ell-1}'=2^{m''}\cdot c \quad m''\in N\cup\{0\}$

∵搬動尚未結束，可證 $m''\in N$

<pf> 假設 $m''=0\Rightarrow r_{\ell-1}'+s_{\ell-1}'=c$ 為一正奇數

$\Rightarrow r_{\ell-1}'=s_{\ell-1}'\ \frac{C}{2}\notin N$〔矛盾〕∴ $M''\neq 0\Rightarrow m''\in N$#

$\Rightarrow r_{\ell-1}'+s_{\ell-1}'=2^{m''}\cdot c$ 且 $(r_{\ell-1}'\cdot s_{\ell-1}')=1\ \ m''\in N$

∵ $\ell-1$ 次是搬動完成的前一步

$\Rightarrow r_{\ell-1}'=s_{\ell-1}'=\frac{2^{m''}\cdot c}{2}=2^{m''-1}\cdot c$

又∵ $(r_{\ell-1}'\cdot s_{\ell-1}')=r_{\ell-1}'=s_{\ell-1}'=1$

$\Rightarrow c=1\Rightarrow r+s=d\cdot 2^t=(r,s)\cdot 2^t$ 至此已證出 [⇒]

且 $2^{m''-1}=1\Leftrightarrow m''=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} r_{\ell-1}=2_{\ell-1} \cdot d \cdot r_{\ell-1}' & \text{其中 } r_{\ell-1}'+s_{\ell-1}'=2 \\ s_{\ell-1}=2_{\ell-1} \cdot d \cdot s_{\ell-1}' \end{cases}$$

$\therefore$ 當 $r+s=2^t d$ 時：

$$2^t d=r+s=r_{\ell-1}+s_{\ell-1}=2^{\ell-1}d \cdot 2=2^{\ell}d \Leftrightarrow \ell=t$$

即共搬動 t 次可成 1 堆，至此證出 [$\Leftarrow$]

㈡求證：經過有限次搬動必可將 3 堆變成 2 堆。

證明：設甲、乙、丙三堆各有 x,y,z 個銅板，令 $x>y>z>0$，則：

1. 由除法原理知：$y=zq+r, 0 \leqslant r<z, q \in N, r \in N\cup\{0\}$ 則經 $([\log_2 q]+1)$ 次移動（我們稱此 $([\log_2 q]+1)$ 次移動爲〝一循環〞）後，乙堆剩下 r 個銅板的方法爲：

令 $[\log_2 q]=a$，即 $2^a \leqslant q<2^{a+1}, a \in N\cup\{0\}$

令 $q=\sum_{i=0}^{a} q_i \cdot z^i$，其中 $q_i \in \{0,1\}$ $\forall i=0,1,2,\cdots,a-1$ 而 $q_a=1$

$$\Rightarrow y=zq+r=z \cdot \sum_{i=0}^{a} q_i \cdot 2^i+r$$

i 由 0 至 a 依序搬動中的第 $(i+1)$ 次搬動（移動 $q_i . 2^i$ 項）中：

⑴若 $q_i=0$，由甲堆移 $2^i \cdot z$ 個銅板至丙堆。

⑵若 $q_i=1$，由乙堆移 $2^i \cdot z$ 個銅板至丙堆。

則經 $(a+1)$ 次搬動，即一次循環後：由甲、乙 2 堆共搬了 $(2^0+2^1+2^2+\cdots\cdots+2^a)z=(2^{a+1}-1)$ z 個銅板至丙堆。乙堆搬了 qz 個銅板至丙堆，故甲搬了 $(2^{a+1}-1-q)z$ 個銅板至丙堆。

令 x_k,y_k,z_k 分別表 k 次循環後甲、乙、丙 3 堆的銅板數。至此甲、乙、丙 3 堆銅板數的情形分別爲：

甲：$x_1=x-(2^{a+1}-q-1) \cdot z$

乙：$y_1=r$

丙：$z_1=2^{a+1} \cdot z>z$

$\therefore \min\{x_1,y_1,z_1\}=x_1$ 或 $y_1=\min\{x,y,z\}=z$

2. 同 *1.* 之方法，可得另一組數 x_2,y_2,z_2

且 $\min\{x_2,y_2,z_2\}<\min\{x_1,y_1,z_1\}<\min\{x,y,z\}=z$

令 $a_i=\min\{x_i,y_i,z_i\} \Rightarrow a_i \in \{0,1,2,3 \cdots z-1\}$

$z>a_1>a_2>\cdots>a_m>a_{m+1}>\cdots$ 爲一絕對遞減數列

$\because$ z 是一個固定正整數 $\therefore$ a_i 的個數至多 z 個

$\Rightarrow$必在有限次循環中存在 $t \in N s.t. \min\{x_t \cdot y_t \cdot z_t\} = 0$

由 *1.* *2.* 知：$n=3$ 時，經有限次搬動後必可將其中 1 堆的銅板數變成 0 。

㈢推論至 n 堆：

由㈡知：從 n 堆中任取 3 堆出來搬動，經過有限次後必可使其成爲 2 堆，即總維數爲 (n-1) 堆。重覆此步驟 (n-2) 次後，總堆數變爲 2 堆，故任意 n 堆必可搬成 2 堆。

㈣找出 3 堆變成 1 堆的充要條件，並加以證明：

1. 求證：3 堆可變成 1 堆的充要條件爲：$x+y+z=2^{t_3}$ for some $t_3 \in N$

<pf> 只要證明 "$x+y+z=(x,y,z) \cdot 2^{t_3} \Leftrightarrow r+s=(r,s) \cdot 2^t$ for some $t,t_3 \in N$" 即可

令 x_i, y_i, z_i 表 x,y,z3 堆搬動 i 次後的 3 堆銅板數，

x_j, y_j, z_j 表 3 堆搬成 r ，s2 堆的前一次之 3 堆銅板數

$[\Leftarrow]$ (1)先證：$p \nmid (x_i,y_i,z_i) \Rightarrow p \nmid (x_{i+1},y_{i+1},z_{i+1})$ 其中 p 爲奇質數

<pf> 不失一般性下，可設 $x_i > y_i > z_i$

$\Rightarrow (x_{i+1},y_{i+1},z_{i+1})=(x_i-y_i,2y_i,z_i)$ 或 $(x_i,y_i-z_i,2z_i)$ 或 $(x_i-z_i,y_i,2z_i)$

假設 $p \mid (x_i-y_i,2y_i,z_i)$

$\Rightarrow p \mid x_i-y_i, p \mid 2y_i, p \mid z_i$

$\Rightarrow p \mid 2(x_i-y_i)+2y_i=2x_i \Rightarrow p \mid x_i$ 且 $p \mid i_i$ 又 $\because p \mid z_i$

$\Rightarrow p \mid (x_i,y_i,z_i)$ 〔矛盾〕故 $p \nmid (x_i-y_i,2y_i,z_i)$

同理可證：$p \nmid (x_i,y_i-z_i,2z_i), p \nmid (x_i-z_i,y_i,2z_i)$

$\therefore p \nmid (x_{i+1},y_{i+1},z_{i+1})$

(2)由(1)知：$\therefore p \nmid (x,y,z) \Rightarrow p \nmid (x_1,y_1,z_1)$

$\Rightarrow p \nmid (x_2,y_2,z_2) \Rightarrow \cdots \Rightarrow p \nmid (x_j,y_j,i_j)$

$\Rightarrow p \nmid (x_{j+1},y_{j+1},z_{j+1})$ 即 $p \nmid (r,s,0) \Rightarrow p \nmid (r,s)$

(3)$\because$ 當 $x+y+z=(x,y,z) \cdot 2^{t_3} \cdot c$，其中 c 爲一正奇數。

當 $c \neq 1$ 時，令 $c=p_1^{\alpha 1} p_2^{\alpha 2} \cdots p_n^{\alpha n}$ ，p_i 均爲奇質數

由(2)$\because p_i \nmid (x,y,z) \therefore \forall p_i \nmid (r,s) \Rightarrow c \nmid (r,s)$

$\therefore$必不能搬成 r 和 s 的 2 堆銅板 $s.t. r+s=(r.s) \cdot 2^t$，此與已知矛盾 $\therefore c=1$

故 x,y,z3 堆搬成 r ，s2 堆且 $r+s=(r,s) \cdot 2^t$

則 $x+y+z=(x,y,z) \cdot 2^{t_3}$

$[\Rightarrow]$ 令 $d=(x,y,z)$

$\because d \mid x, d \mid y, d \mid z \therefore d \mid ax+by+cz \ \forall a.b.c \in z$

$\because x_{j+1},y_{j+1},z_{j+1}$ 必爲 $ax+by+cz$ for some $a.b.c \in N$

$\therefore d \mid x_{j+1}, d \mid y_{j+1}, d \mid z_{j+1}$ 即 $d \mid r, d \mid s, d \mid 0 \Rightarrow d|(r,s)$

又 $\because x+y+z=(x,y,z) \cdot 2^{t_3}=d \cdot 2^{t_3}=r+s$

$\therefore \exists w \in N \cup \{0\}$ s.t. $(r,s)=d \cdot 2^{w}$

取 $t=t_3-w \Rightarrow r+s=(r,s) \cdot 2^{t}$#

至此得證3堆銅板數分別爲 x,y,z s.t. $x+y+z=(x,y,z)\cdot 2^{t_3}$ for some $t_3 \in N$

則搬成2堆時之 r，s 必可使 $r+s=(r,s) \cdot 2^{t}$，反之亦同

又 $\because r+s=(r,s) \cdot 2^{t} \Leftrightarrow$ r,s 的2堆可搬成1堆

$\therefore x+y+z=(x,y,z) \cdot 2^{t_3} \Leftrightarrow$ 可搬成1堆

2.欲證：$x+y+z=(x,y,z) \cdot 2^{t_3}$，則經 t_3 步恰可搬成1堆

<pf> 令 (x',y',z') 爲 x,y,z 之最簡數對

$x+y+z=(x,y,z) \cdot 2^{t_3} \Rightarrow x',y',z'$ 必乙奇1偶

設 x' 爲偶數，則以二進位法表示 $x'=(\cdots 0)_=, y'=(\cdots 1)_=, z'=(\cdots 1)_=$

將大可數搬給小奇數，則三數必爲：$x_1=(\cdots 0)_=$ 此爲原偶數；$y_1=(\cdots 0)_=$ 此爲原大奇數一原小奇數；$z_1=(\cdots 10)_=$ 此爲原小奇數×2

在三數均爲偶數之情況下，可再取一次最簡數對 (x_1',y_1',z_1')，$x_1'+y_1'+z_1'=2^{t_3-1}$ 亦爲偶數 $\therefore (x_1)_=,(y_1)_=,(z_1)_=$ 之倒數第二位必有2個1。

依此類推，經 t_3 次搬動後，產生一數爲 $(1\underbrace{00\cdots 0}_{t_3\text{個}0})_=$，其餘均爲0。

$\because x'+y'+z'=2^{t_3}=(1\underbrace{00\cdots 0}_{t_3\text{個}0})_=$ $\therefore$ 經 t_3 次恰 t_3 個0，不可能比 t_3 多

$\Rightarrow$ 至多 t_3 次—①

若只搬 t_3' 次，且 $t_3' < t_3$ 則 t_3' 次後 $(\cdots 1 \underbrace{\cdots 0}_{t'_3\text{個}0})_= \neq (1\underbrace{00\cdots 0}_{t_3\text{個}0})_=$

$\therefore$ 至少須 t_3 次—②

由①、②得證恰在 t_3 次完成#

3.同1.之證明方法，可推得：n 堆變1推的充要條件爲：

$\sum_{i=1}^{n} x_i=(x_1,x_2,\cdots,x_n) \cdot 2^{t_n}$ for some $tn \in N$

㈤觀察：我們找到下列特殊數列的最快搬動規則及最少次數，其中有些例外，我們也試圖解釋其成因。

1.等差數列 a_1,a_2,a_3（試至 $a_1=300$）

(1)公差 $d=1$

A. 奇偶奇三數：

$2b-1, 2b, 2b+1 \quad \forall b \in N$

$\longleftarrow$

$2(2b-1), 2b, 2 \quad deg=[\log_2(a_1+1)]+1$

$\Longrightarrow$

其中〝$\longleftarrow$〞表一次搬動的方法

〝$\Longleftarrow$〞表一循環的搬動

deg 表總搬動次數

〝$\Leftarrow\!\Rightarrow$〞表連續互換至結束

B. 偶奇偶三數：

a. $a_1+a_2+a_3=2^{2t+1}+1, t \in N$

則：$a_1, a_2, a_3 \quad deg=2t=[\log_2 a_1]+1$

$\overset{\longleftarrow}{\Longleftarrow\!\Longrightarrow}$

b. 其它：$2b, 2b+1, 2b+2 \quad \forall b \in N$

$\longleftarrow$

$2b, 2(2b+1), 1$

$\Longrightarrow$

$deg=[\log_2 a_1]+2$

c. 推廣：$P \in N$，三數同乘 $p: a_1p, a_2p, a_3p$

即 $a_1p, (a_{1+1})p, (a_{1+2})p$ 結果同上

(2)公差 $d=2$

A. 奇奇奇三數：

a. 方法 1：a_1, a_2, a_3

$\overset{\longleftarrow}{\Longrightarrow}$

即 $2b-1, 2b+1, 2b+3 \quad \forall b \in N$

$\longleftarrow$

$2b-1, 2(2b+1), 2 \quad deg[\log_2 a_2]+2$

例外的發生：當 $a_1=2^n{}_{-1}$ 時，其後會有 m_n 項例外：

$$m_n=\begin{cases}\sum_{k=0}^{P}[2^{2k-3}]+1 & (\text{當 } n=2p) \\ \sum_{k=0}^{p}[2^{2k-2}] & (\text{當 } n=2p-1) \ \forall P \in N\end{cases}$$

b. 方法 2 ： a_1, a_2, a_3

$\longleftarrow$
$\Longrightarrow$

即 $2b-1, 2b+1, 2b+3 \ \forall b \in N$

$\longleftarrow$

$2(2b-1), 2, 2b+3 \quad deg = [\log_2 a_1] + 2$

$\Longrightarrow$

例外的發生：當 $a_1 = 2^n + 1$ 時，其後會有 m_n 項例外：

$$m_n = \begin{cases} \sum_{K=0}^{P} [2^{k-3}] & (\text{當 } n = 2p\ ) \\ \sum_{K=0}^{P} [2^{2k-2}] - 1 & (\text{當 } n = 2p-1\ ) \ \forall P \in N \end{cases}$$

例外的原因：第一次搬動後，剩下二堆的總和不夠產生一循環的搬動，故產生例外。

B. 偶偶偶三數：同(1) C. 推廣。

2. 階差數列 a_1, a_1+1, a_1+3:

當 $a_1 \equiv 2 (\bmod 3)$ 時： $3b-1, 3b, 3b+2 \ \forall b \in N \quad deg[\log_2 b] + 2 = [\log_2 \frac{a_1+1}{3}] + 2$

$\longleftarrow$

$2(3b-1), 3b, 3$

$\Longrightarrow$

3. 費氏數列： $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

(1)連續三費氏數：

a_{n-2}, a_{n-1}, a_n 或 a_{n-2}, a_{n-1}, a_n

$deg = 2$

(2)間隔之三費氏數：

a_{n-2}, a_n, a_{n+2} 或 $a_{n-2}, a_n, a_{n+2} \qquad deg = 3$

當 a_{n-2} 時例外： $deg = 2$

4. $x + y + z = (x, y, z) \cdot 2^t$ （試至 $t = 6$ ）

若 $x + y + z = (x, y, z) \cdot 2^t$ ， t 爲某一固定正整數

(1)取 x,y,z 的最簡整數比爲 x',y',z' ⇒必爲二奇一偶。

(2)將大奇數搬給小奇數得三偶，再重覆(1)(2)步驟循環。

則搬動 t 次恰可將 x,y,z 三堆搬成一堆且必爲最少次數搬法。

5. $n=4$ 堆搬成 2 堆時，排序後所得最少搬動次數及其搬動規則：連續四費氏數 $a_n,a_{n+1},\ a_{n+2},a_{n+3}$

$\Rightarrow a_n,a_{n+1},a_n+a_{n+1},a_n+2a_{n+1}$

搬動方法（其中一種）：$a_n,a_{n+1},a_n+a_{n+1},a_n+2a_{n+1}$

$\longleftarrow$

$\longleftarrow$

$a_n,2a_{n+1},2a_n+2a_{n+1},0$

$\longleftarrow$

$a_n,4a_{n+1},2a_n,0$

$\longleftarrow$

$2a_n,4a_{n+1}-a_n,2a_n,0$

$\longleftarrow$

$4a_n,4a_{n+1}-a_n,0,0$

$deg=5$

五、結　論

(一)分別含 r 和 s 個的 2 堆銅板經恰 t 次搬動可變成 1 堆

$\Leftrightarrow r+s=(r,s)\times 2^t$ for some $t\in N$。

(二)任意 n 堆必可搬成 2 堆。

(三)分別含 x,y,z 個的 3 堆銅板經恰 t_3 次搬動可變成 1 堆

$\Leftrightarrow x+y+z=(x,y,z)\times 2^{t_3}$ for som $t_3\in N$

(四)個數分別爲 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$ 的 n 堆銅板可搬成 1 堆

$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i=(x_1,x_2,x_3,\cdots x_n)\times 2^{t_n}$ for some $t_n\in N$

(五)特殊數列的最少搬動次數：

1. 由 3 堆搬成 1 堆：

數　　　　列	最 少 次 數 deg	備　註
滿足 $x+y+z=(x,y,z)\times 2^t,t\in N$ 的 x,y,z 三數	$deg=t$	已證明

2. 由 3 堆搬成 2 堆，列表如下：

<table>
<tr><th colspan="3">數　　　　列</th><th>最 少 次 數 deg</th><th>備 註</th></tr>
<tr><td rowspan="3">等差</td><td rowspan="3">三數為：
$ap,(a+1)p,(a+2)p$
者其中 $P \in N$</td><td>a 為奇數</td><td>$deg=[\log_2(a+1)]+1$</td><td rowspan="5">試至
$a=300$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">a 為偶數</td><td>$3a+3=2^{2k+1}+1, k \in N$ 時：
$deg=[\log_2(a+1)]+1$</td></tr>
<tr><td>其它：$deg=[\log_2 a]+2$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">階差</td><td>$ap,(a+2)p,(a+4)p$
$\forall P \in N$</td><td>a 為奇數</td><td>例外者除外，
$deg=[\log_2 a]+2$</td></tr>
<tr><td>三數為
a, a+1,a+3 者</td><td>$a \equiv 2(med3)$</td><td>$deg=[\log_2 \frac{a+1}{3}]+2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">費氏數列</td><td colspan="2">三數為 a_n,a_{n+1},a_{n+2} 者</td><td>$deg=2$</td><td rowspan="3">有固定
搬動法</td></tr>
<tr><td colspan="2">三數為 a_n,a_{n+2},a_{n+4} 者</td><td>$a_n=1$ 時，$deg=2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">（間隔之三費氏數）</td><td>$a_n \neq 1$ 時，$deg=3$</td></tr>
</table>

3.由 4 堆搬成 2 堆：連續 4 費氏數：$deg=5$

六、討　論

(一)由參考文獻中，我認為題目中的〝搬動〞，其實亦可將之視為一種函數對應：若定義 g 為重排函數，f 為轉換函數⇒整個搬動過程可表為 gofogofo … ofogofog$(x_1,x_2,x_3, \cdots ,x_n)$，其中 f 和 g 若以矩陣表示，皆為 n 階方陣。

(二)以上特殊數列之最少搬動次數有些是從有限資料觀察的結果，成因不詳，有待證明能否推至任意數。

(三)其它數列可能亦有其規則，有待繼續努力。

七、參考文獻

薛昭雄（民 75 年 4 月），離散數學。中央圖書出版社，P-155 ～ 193 。

評語

給定 n 個整數 $\{a_1,a_2, \cdots a_n\}$ 。設 $a_i \leq a_j$ ，則可做交換，而得另一組數，其中 $a_i \to 2a_i$ ，$a_j \to a_j - a_i$ 其餘皆固定。作者獲得的定理，任意 n 堆可變成二堆，二堆若要變成一堆，需 $r+s=(r,s) \cdot 2^t$ ，非常有力地把這個問題，一個因在國際奧林匹克出現而引發的問題，做了有力的解決，作者並運用電腦驗證最少移動次數。很有意思。