尤拉函數的推廣（由積性函數觀點探討）

高中組數學科第三名

高雄市立高雄高級中學　　作　　者：張永森、鐘法博、柏堂宏、辛逸軒
指導教師：翁清源、黃鴻洲

一、研究動機與目的

由積性函數特性馬上可證得尤拉公式

$\phi(B)= B\left(1-\frac{1}{9_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9_2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9_3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9_n}\right)$

現在，我們想把尤拉公式推廣，若A表另一正整數

令 $\phi(A,B)$ 表示：不大於A且與B互質的正整數個數

我們想由積性函數的觀點切入，探討下列等式成立的條件

$\phi(A_1,B)= A\left(1-\frac{1}{9_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{9_n}\right)$

二、研究過程與方法

為了簡化敘述與符號，我們規定本文往後

$9_1<9_2<9_3<\cdots\cdots<9_n$，9皆表示質數

當 $B=9_1$、9_2、$9_3\cdots\cdots 9_n$

正確值 $N=\phi(A,B)$

尤拉值 $M=A\left(1-\frac{1}{9_1}\right)$、$\left(1-\frac{1}{9_2}\right)\cdots\cdots\left(1-\frac{1}{9_n}\right)$

一般情形，尤拉值M不一定為整數，因此 $N\neq M$

即使尤拉值M為整數，也有大量的數據顯示 $N\neq M$

定理一：當 $B=9_1$、9_2 時，$9_1<9_2$ 為二質數，則

$$\phi(A,B)=A\left(1-\frac{1}{9_1}\right)、\left(1-\frac{1}{9_2}\right)\Leftrightarrow$$

$$A\cdot\left(1-\frac{1}{9_1}\right)\left(1-\frac{1}{9_2}\right)\text{為整數}$$

以下我們要找誤差為0的條件

討論 $\phi(A,B)$ 為積性函數的條件

預備定理一：若 $A\equiv R(\mathrm{mod}B),0\leqslant R<B$

$$\text{則}\ \phi(A,B)=\left[\frac{A}{B}\right]\phi(B)+\phi(R,B)$$

定理二：當 $B=9_1$ 、 9_2 、 $9_3 \cdots\cdots 9_n$ 時，A 除以 B 的餘數 R

則 $\phi(A,B)=A(1-\frac{1}{9_1})(1-\frac{1}{9_2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{9_n})$

$\Leftrightarrow \phi(R,B)=R(1-\frac{1}{9_1})(1-\frac{1}{9_2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{9_n})$

定理三：設 $A=9^* \cdot K,\ B=99^*,\ 9^* \equiv 1(\mathrm{mod})$

其中 $9<9^*$ 爲二質數，K 爲任意正整數

則 $\phi(9^* \cdot K, 99^*)=K\phi(9^*,99^*)$

定理四：設 $A=9^* \cdot K, B=B_1 \cdot 9^*, 9^* \equiv 1(\mathrm{mod}\ B_1)$

其中 9^* 爲質數，K 爲任意正整數

則 $\phi(9^* \cdot K, B_1 \cdot 9^*)=K \cdot \phi(9^*, B_1 \cdot 9^*)$

證明：因爲 $9^* \equiv 1(\mathrm{mod}\ B_1)$ ，令 $9^*=S \cdot B_1+1$

(1)令 $P=\phi(9^* \cdot K,\ B_1)$

$=\phi((S\ B_1+1) \cdot K, B_1)$

$=\phi(SB_1K,\ B_1)+\phi(K,\ B_1)$

(2)令 $Q=N\{9^*m \mid m \in N, 1 \leqslant m \leqslant K, (9^*m, B_1)=1\}$,n 表集合個數

因 9^* 和 B_1 互質，由數論性質知 $(9^*m, B_1)=1 \Leftrightarrow (m,B_1)=1$

故 $Q=n\{9^*m \mid m \in N, 1 \leqslant m \leqslant K, (m,B_1)=1\}$

$=\phi(K,B_1)$

(3)由上面(1)(2)知

$\phi(9^*, B_19^*)=P\text{-}Q=\phi(SB_1K,B_1)=SK\phi(B_1)$

(4)因 $9^* \equiv 1(\mathrm{mod}B_1)$ ，令 $9^*=SB_1+1$

因 9^* 本身爲質數，所以小於 9^* 的正整數均與 9^* 互質每一等分區間內和 B_19^* 互質者均分別有 $\phi(B_1)$ 個，所以 $\phi(9^*, B_19^*)=S \cdot \phi(B_1)$

由上面(3)(4)知

$\phi(9^*K, B_19^*)=K\phi(9^*, B_19^*)$

定理五：設 $B=9_19_29_3\cdots\cdots 9_n9^*$ ，其中 9^* 爲質數，K 爲任意正整數

若 $A=9^* \cdot K, 9^* \equiv 1(\mathrm{mod}9_19_29_3\cdots\cdots 9_n)$

則 $\phi(A,B)$

$=A(1-\frac{1}{9_1})(1-\frac{1}{9_2})(1-\frac{1}{9_3})\cdots\cdots(1-\frac{1}{9_n})(1-\frac{1}{9^*})$

證明：令 $B1=9_19_29_3\cdots 9_n$ ，因爲 $9^* \equiv 1(\mathrm{mod}B_1)$ 令 $9^*=SB_1+1$

由定理四

$\phi(A,B)=\phi(9^*K,B_19^*)$

$=K\phi(9^*,B_19^*)$

$=K\cdot S\cdot\phi(B_1)$

$=K\cdot S\cdot B_1(1-\frac{1}{9_1})(1-\frac{1}{9_2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{9_n})$

$=K\cdot(9^*-1)\cdot(1-\frac{1}{9_1})(1-\frac{1}{9_2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{9_n})$

$=A(1-\frac{1}{9_1})(1--\frac{1}{9_2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{9^n})(1-\frac{1}{9^*})$

定理六：$9_1<9_2<9_3<\cdots\cdots<9_n<9^*$ 均為質數

設 $B_1=9_19_29_3\cdots\cdots9_n,9^*\equiv1(\mathrm{mod}B_1)$,$B_2$ 與 B_19^* 互質則 $\phi(B_29^*K,B_1B_29^*)=\phi(9^*K,B_19^*)\cdot\phi(B_2,B_2)$ 其中 K 爲任意正整數〔註〕：

取 $B_2=1$，即爲定理四

證明：證明過程和定理⑾類似

因爲 $9^*\equiv1(\mathrm{mod}B_1)$，令 $9^*=SB_1+1$

(1)令 $P=\phi(B_29^*K,B_1B_2)$

$=\phi(B_2(SB_1+1)K,B_1B_2)$

$=\phi(SB_1B_2K,B_1B_2)+\phi(B_2K,B_1B_2)$

(2)令 $Q=n\{9^*m|m\in N，|\leqslant m\leqslant B_2K，(9^*m,B_1B_2)=1\}$，n 表集合個數

因 9^* 與 B_1B_2 互質

由數論性質知 $(9^*m,B_1B_2)=1\Leftrightarrow(m,B_1B_2)=1$

故 $Q=n\{9^*m\mid m\in N,1\leqslant m\leqslant B_2K,(m,B_1B_2)=1\}$

$=\phi(B_2K,B_1B_2)$

(3)上面(1)(2)知

$\phi(B_29^*K,B_1B_29^*)=P\text{-}Q$

$=\phi(SB_1B_2K,B_1B_2)=SK\phi(B_1B_2)$

(4)由定理四的第(4)部分知

$\phi(9^*,B_19^*)=S\cdot\phi(B_1)$

(5)由上面(3)(4)知

$\phi(B_29^*K,B_1B_29^*)$

$=SK\phi(B_1B_2)$

$=SK\phi(B_1)\phi(B_2)$

$=K\phi(9^*,B_19^*)\phi(B_2)$

$=\phi(9^*K,B_19^*)\phi(B_2,B_2)$

定理七：$9_1<9_2<9_3<\cdots\cdots<9_n<9^*$ 均爲質數

$P_1<P_2<P_3<\cdots\cdots<P_m$ 均爲質數

設 $B_1=9_19_29_3\cdots 9_n$ $9^*\equiv 1(\mathrm{mod}B_1)$

$B_2=P_1P_2P_3\cdots\cdots P_m$ B_2 與 B_19^* 互質

若 A 爲 B_29^* 的倍數

$B=B_1B_29^*=9_19_2\cdots 9_n9^*P_1P_2\cdots\cdots P_m$

則 $\phi(A,B)$ 可由尤拉公式得之

歸納：若 B 的所有質因數中

不整除 A 者可以全部一次被 B 的某一質因數減一約去

則 $\phi(A,B)$ 的正確值可由尤拉公式得之

預備定理二：設 $0<R<B,R,B,U\in N$

若 $U\mid B$ 且 $U+R$

$$則\left\{\frac{R}{U}\right\}+\left\{\frac{B-R}{U}\right\}=1$$

證明：設 $B=SU=(S-1)U+U$

$$則\left\{\frac{R}{U}\right\}+\left\{\frac{SU-R}{U}\right\}$$

$$=\left\{\frac{R}{U}\right\}+\left\{\frac{(S-1)\ U-R}{U}\right\}$$

$$=\left\{\frac{R}{U}\right\}+\left\{\frac{U-R}{U}\right\}$$

$$=\left\{\frac{R'}{U}\right\}+\left\{\frac{U-R'}{U}\right\}$$

其中 R' 爲 R 除以 U 的餘數，$R'\neq 0$

因爲 R' 與 $U-R'$ 均比 U 小，即 $\frac{R'}{U}$ 與 $\frac{U-R'}{U}$ 均爲正純小數

故上式 $=\frac{R'}{U}+\frac{U-R'}{U}=1$

定理八：當 $B=9_19_2\cdots\cdots 9_n$ 時，A 除以 B 的餘數 R

已知 R 對 B 的尤拉値爲整數

若正確値 $N=\phi(R,B)$ 與

尤拉值 $M=R(1-\frac{1}{9_1})(1-\frac{1}{9_2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{9_n})$ 之差 δ

則正確值 $=\phi(B-R,B)$ 與

尤拉值 $M=(B-R)(1-\frac{1}{9_1})(1-\frac{1}{9_2})\cdots\cdots(1-\frac{1}{9_n})$ 之差爲 $-\delta$

定理九：設(1) $A=q^xK, B=Bq^x, q^x$ 爲質數且與正整數 B_1 互質

(2) $q^x\equiv r_1(\mathrm{mod}B_1), 1\leqslant r_1\leqslant B_1$,

令 $\phi(A,B)$-尤拉值　的誤差值 δ

則 $\delta=\phi(Kr_1,B_1)-\phi(K,B_1)-\frac{K(r_1-1)}{B_1}$

$\phi(B_1,B_1)$

證明：$\phi(A,B)$　　依定理四的步驟(1)、(2)、(3)

$=\phi(q^xK,B_1q^x)$　　用與 B_1 互質者，

$=\phi(q^xK,B_1)-\phi(K,B_1)$　　扣除與 q^x 不互質者

$$=\frac{q^xK-r_1K}{B_1}\phi(B_1,B_1)+\phi(Kr_1,B_1)-\phi(K,B_1)$$

$$=\frac{K(r_1-1)}{B_1}\phi(B_1,B_1)$$

$$=\frac{K(q^*-1)}{B_1}\phi(B_1,B_1)+\delta$$

所以 $\delta=\phi(Kr_1,B_1)-\phi(K,B_1)-\frac{K(r_1-1)}{B_1}\phi(B_1,B_1)-$

定理十：在定理九中，我們針對 K 來加以調整，以 B_1 爲度量單位，承續定理九的條件，再加上 $K\equiv r_2(\mathrm{mod}B_1)$，其中 $0\leqslant r_2<B_1$，

則 $\delta=\phi(r_1r_2,B_1)-\phi(r_2,B_1)-\frac{r_2(r_1-1)}{B_1}\phi(B_1,B_1)$

首先，我們先定義一個符號以方便列式

定義：$A=q_1q_2q_3\cdots\cdots q_n\cdot K$

規定 $\mathrm{col}(n,i)=\Sigma\phi(q_1q_2\cdots\cdots q_iK,B_1)$

例：$A=q_1q_2q_3\cdots K$

則 $\mathrm{col}(3,2)=\phi(q_1q_2K,B_1)+\phi(q_1q_3K,B_1)+\phi(q_2q_3K,B_1)$

以下發展出的運算式，有點二項展開式的味道。

(1) $A=q_1q_2K, B=q_1q_2B_1, q_1, q_2$ 爲二相異質數且 $(q_1q_2, B_1)=1$

則 $\phi(A,B)$

$= \phi(q_1q_2k, q_1q_2B_1)$

$= \phi(q_1q_2K, q_2B_1)-(\phi(q_2K, q_2B_1)$

$= \phi(q_1q_2K, B_1)-\phi(q_1K, B_1)-(\phi(q_2K, B_1)+\phi(K, B_1)$

$=col(2,2)-col(2,1)+col(2,0)$

(2) $A=q_1q_2q_3K, B=q_1q_2q_3B_1,$

q_1, q_2, q_3 爲三相異質數且 $(q_1q_2q_3, B_1)=1$

則 $\phi(A,B)=\phi(q_1q_2q_3K, q_1q_2q_3B_1)$

$= \phi(q_1q_2q_3K, q_2q_3B_1)-\phi(q_2q_3K, q_2q_3B_1)$

$= \phi(q_1q_2q_3K, q_3B_1)-\phi(q_1q_3K, q_3B_1)-$

$\phi(q_2q_3K, q_3B_1)+\phi(q_3K, q_3B_1)$

$= \phi(q_1q_2q_3K, B_1)-\phi(q_1q_2K, B_1)-\phi(q_1q_3K, B_1)+\phi(q_1K, B_1)-$

$\phi(q_2q_3K, B_1)+\phi(q_2K, B_1)+\phi(q_3K, B_1)-(\phi(K, B_1)$

$= \phi(q_1q_2q_3K, B_1)-[\phi(q_1q_2K, B_1)+(q_1q_3K, B_1)+\phi(q_2q_3K, B_1)]+$

$[\phi(q_1K, B_1)+\phi(q_2K, B_1)+\phi(q_3K, B_1)]-\phi(K, B_1)$

$=col(3,3)-col(3,2)+col(3,1)-col(3,0)$

(3)歸納上面(1)、(2)的推演過程，得下面公式

$A=q_1q_2q_3 \cdots\cdots q_nK, B=q_1q_2q_3 \cdots\cdots q_nB_1$

其中 $q_1, q_2, q_3 \cdots\cdots, q_n$ 爲相異質數且 $(q_1q_2q_3 \cdots\cdots qn, B_1)=1$ 則 ϕ $(A,B)=col(n,n)-col(n, n-1)+col(n,n-2)-\cdots\cdots+(-1)^n col(n,0)$

(4)誤差公式的設計

r_2 必介於 $B_1/2$ 與 B_1 之間

我們先找出一個適當的 i 值使 $\frac{i\ B_1}{2^t} \leqslant r_2 \leqslant \frac{i\ B_1}{2^t}$

又取 n 值， $n=\frac{r_1\ r_2}{B^1/2^t}$ （採定理九與定理十的定義）

則可將定理十的誤差式

$$\delta = \phi(r_1r_2, B_1)-\phi(r_2, B_1)-\frac{r_2(r_{1-1})}{B_1}\phi(B_1, B_1)$$

改寫成下列的逼近式（前半段）

$$\boxed{\delta^1=-\frac{n-i}{2^t}\phi(B_1, B_1)+\frac{r_2(r_1-1)}{B_1}\phi(B_1, B_1)}$$

再將δ^1代入得$\delta = \dfrac{\delta'}{2^{t+2} \cdot (t+1)}$

(5)正確值與尤拉值的最大誤差範圍公式

定理十一：

$B=q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdots\cdots q_n, A=q_n \cdot K$

當q_n-1 與 B 的 m 個質因數可約分時

(1) $m=n-1$ 時，則誤差$\delta=0$

(2) $m<n-1$ 時，則誤差$|\delta| \leqslant 2^{n-1}-2^m-1$

因時間的關係，本文討論至此結束

我們以後仍要繼續研究下面主題：

1. 將誤差與積性函數結合在一起

   B_1,B_2 互質

   A 對 B_1 爲分子一次約分型，則誤差爲 0

   A 對 B_2 爲分子一次約分型，則誤差爲 0

   若 A 對 B_1B_2 爲分子二次約分型，則誤差爲多少？

   若此問題能解決，則ϕ (A,B) 中的 B 就可無限制地擴充。

2. 對尤拉值不是整數時，作更一般性的探討。

三、参考資料

1. 數論導引（華羅庚著）……凡異出版社。
2. 初等數論（閔嗣鶴，嚴士健）……凡異出版社。
3. 中華民國第 27 屆中小學科學展覽作品
   「由排容原理探討尤拉中函數及其推廣」

評　語

作者檢討 27 屆的獲獎作品，進一步討論ϕ (A,B)，即不大於 B 且與 A 互質的整數個數，其計算公式及誤差，較諸僅以排容原理來算者爲佳。在定理的運用，推理的嚴謹及想法的獨創上都有獨到之處，令人印象深刻。