0與1

高中組數學科第一名

北市建國高中　　　　　　　　　作　　者：林軒田、耿立達、黃元品、蘇柏榮
指導教師：張文良

一、研究動機

我們在討論 John Mason 的 Thinking Mathematically 時，發現一個有趣的問題：「隨便寫下一個 0 和 1 的排列，若連續兩個相同的話，在它們下面寫一個 0，否則寫一個 1。重複這過程直到你只剩下一個阿拉伯數字。能預測最後一個數字是什麼嗎？」如：

1 1 0 1 0 0
0 1 1 1 0
1 0 0 1
1 0 1
1 1
0

此題看似簡單，但涉獵其中後，卻令我們沉迷於它的奧秘，進而想繼續探討。我們能預測最後一個數嗎？能擴展這個系統嗎？能知道 1 的個數嗎？

二、研究目的

(一)在倒三角形的 0 、 1 圖形中，找出其規律，並預測最後一個數。
(二)擴展我們的系統，並使之適用於更多數字的狀況。
(三)研究圖形中數字的個數。

三、研究設備器材

紙、筆、電腦。

四、研究過程及方法

(一)探索：我們先以四階的倒三角形來研究，發現共有 16 種排列。乍看之下，只是一堆雜亂的數字排列，再研究後，發現下列性質：

1. 對稱性：把第一列的數字反序排列，所得的最後一個數不變。

例：

```
0   1   0   0        0   0   1   0
  1   1   0            0   1   1
    0   1                1   0
      1                    1
```

其意義爲若找出推算最後一個數的方法，應有某種對稱性。

2. 互補性：將首列的0 、 1互換，其所造成的下一列不變。

如：

```
0   1   0   0        1   0   1   1
  1   1   0            1   1   0
    0   1                0   1
      1                    1
```

其意義爲：爲n階倒三角擴展至(n+1)階時，會有二種互補的情形。即在n階倒三角形中，由最後一個數(0或1)往上推的情形各有 2^{n-1} 種，所以共有 2^n 種情形。

由對稱性和互補性，我們可將16種情形簡化，但這並不能幫助我們「算」出最後一個數。於是我們便研究此倒三角形的運算系統。

(二)系統：

1. 加法系統的建立：

	0	1
0	0	1
1	1	0

將題目所給的運算規則列成表，可得觀察上表，若令T(x,y)表由上往下第x列由左往右第y個數，可將規則寫成 $T^{+}(x+1,y) \equiv [T^{+}(x,y)+T^{-1}(x,y+1)] \bmod 2,\ T^{+}(x,y) \in \{o,1\}$

2. 轉化：乘法系統的建立

	+	−
+	+	−
−	−	+

不妨將 $0 \rightarrow +, 1 \rightarrow -$，所得的運算表和原來的同構：

則我們就可把加法規則改爲乘法規則，即 $T^*(x+1,y)=T^*(x,y)\times T^*(x,y+1)$，好處有：

(1)易於計算：可用直覺的乘法符號律計算，也便於電腦運算。

(2)便於表達：乘法系統較封閉，避免加法使用 mod 的麻煩。

㈢由乘法下手：

我們從乘法系統解決此題，於是用代數觀察：

$$
\begin{array}{c}
x \quad y \quad z \quad u \quad v \\
xy \quad yz \quad zu \quad uv \\
xy^2z \;\; yz^2u \;\; zu^2v \\
xy^3z^3u \;\; yz^3u^3v \\
xy^4z^6u^4v
\end{array}
$$

可知其指數與巴斯卡三角形很類似，於是我們假設

$T^*(x,y)=\prod_{k=y}^{x+y-1} T^*(1,k)^{C^{x-1}_{k-y}}$ 可用數學歸納法證明

1. $x=1$ 時，原式 $T^*(1,y)=\prod_{k=y}^{y} T^*(1,k)^{C^{0}_{k-y}}$ 顯然對 $\forall y\in N$ 成立。

2. 令 $x=r$ 時，$T^*(r,y)=\prod_{k=y}^{r+y-1} T^*(1,k)^{C^{r-1}_{k-y}}$ 對 $\forall y\in N$ 成立。

3. 若 $x=r+1$ 時，已設 $T^*(r,y)=\prod_{k=y}^{r+y-1} T^*(1,k)^{C^{r-1}_{k-y}}$

$$
\begin{aligned}
T^*(x,y) &= T^*(x-1,y)\times T^*(x-1,y+1)\\
&=\prod_{k=y}^{r+y-1} T^*(1,k)^{C^{r-1}_{k-y}} \times \prod_{k=y+1}^{r+y} T^*(1,k)^{C^{r-1}_{k-y-1}}\\
&=T^*(1,y)^{C^{r-1}_{0}} \times \prod_{k=y+1}^{r+y-1} T^*(1,k)^{C^{r-1}_{k-y}+C^{r-1}_{k-y-1}} \times T^*(1,r+y)^{C^{r-1}_{r-1}}\\
&=T^*(1,y)^{C^{r}_{0}} \times \prod_{k=y+1}^{r+y-1} T^*(1,k)^{C^{r}_{k-y}} \times T^*(1,r+y)^{C^{r}_{r}}\\
&=\prod_{k=y}^{(r+1)+y-1} T^*(1,k)^{C^{(r+1)-1}_{k-y}}\\
&=\prod_{k=y}^{x+y-1} T^*(1,k)^{C^{x-1}_{k-y}} \qquad \text{故得證}
\end{aligned}
$$

探討：*1.* 具有對稱性，符合（一）的探索。

2. 指數的意義即是 $T^*(1,k)$ 對 $T^*(x,y)$ 的影響力。

㈣轉回加法：

當我們把 0 → + 、1 → −，即把〝＋〞→〝＊〞，〝加法係數〞→〝乘法指數〞，亦即再加上 mod，符合 $T^+(x,y)\in\{0,1\}$，就可將公式改寫爲：

$$T^{+}(x,y) \equiv \sum_{k=y}^{x+y-1} C_{k-y}^{x-1} \cdot T^{+}(1,k) \pmod{2}$$

(五)擴展：

1. 加法：研究原有的運算表，可知其運算完全符合剩餘群，即擴展時也可使用剩餘群：

	0	1
0	0	1
1	1	0

	0	1	2	…	r
0	0	1	2	…	r
1	1	2	3	…	0
2	2	3	4	…	1
…	…	…	…	…	…
r	r	0	1	…	r+1

即當我們可用 $\{0,1,2,\cdots r\}$ 等 $(r+1)$ 個數時，規則便為 $T^{+}(x+1,y) \equiv [T^{+}(x,y)+T^{+}(x,y+1)] \bmod (r+1)$ 例如：$r=3$ 時

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & & 2 & & 1 & & 1 \\ & 3 & & 3 & & 2 & \\ & & 2 & & 1 & & \\ & & & 3 & & & \end{array}$$

而計算的公式也隨之變成 $T^{+}(x,y) \equiv \sum_{k=y}^{x+y-1} C_{k-y}^{x-1}\ T^{+}(1,k) \bmod (r+1)$

2. 乘法：

如何把加法映射到乘法呢？由群論可知：若令 $W^{r+1}=1$，則下表也滿足 $T^{*}(x+1,y)=T^{*}(x,y) \times T^{*}(x,y+1)$

如：$W^{5}=1$ 時

	1	w	w^2	…	w^r
1	1	w	w^2	…	w^r
w	w	w^2	w^3	…	1
w^2	w^2	w^3	w^4	…	w
…	…	…	…	…	…
w^r	w^r	1	w	…	w^{r-1}

$$\begin{array}{cccc} W^3 & W^2 & W & W^4 \\ & 1 \quad W^3 \quad 1 & & \\ & W^3 \quad W^3 & & \\ & W & & \end{array}$$

由於同是乘法規則，所以可得到 $T^*(x,y)=\prod_{k=y}^{x+y-1} T^*(1,k)^{C^{x-1}_{k-y}}$

㈥疊合法：

完成第一個目的後，我們並不滿足。而想進一步探討其它性質，尤其是 1 的個數。我們想到把倒三角形集合 a 視爲許多集合的疊合，如下：在 n 階倒三角形中，$(a_i)_n$ 表示當且僅當第一列第 i 個數爲 1 時所造成的倒三角形集合，簡寫爲 a_i 。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 0 & & 1 & & 0 \\ & 0 & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & 1 & & & \end{array}$$

例如：$(a_3)_4=(0010)$ 表示倒三角形於是我們就可以將倒三角形集合 a 視爲若干個 a_i 的疊合，例如：

$$\begin{array}{ccc} 1\ 1\ 0 & & 1\ 0\ 0 & & 0\ 1\ 0 \\ 0\ 1 & = & 1\ 0 & + & 1\ 1 \\ 1 & & 1 & & 0 \end{array}$$

因此疊合兩圖形時，重疊的 1 會全變成 0 ，即 a 中 1 的個數

$n(a)=n(a_i+a_j)=n(a_i)+n(a_j)-2n(a_i \cap a_j)$

由排容原理擴展可得 $n(a)=n(a_{i1}+a_{i2}+\cdots\cdots+a_{ik})$

$=1[$ n（個別集合）$]-2[$n（兩兩交集）$]$

$+4[$n（三三交集）$]+\cdots\cdots$

只要能找出這算式中的每一項，就可以算出 n(a) 爲何了。

(七)影響力：

利用疊合法統計倒三角形 a 中 1 的個數時必須先知道單一的一個 1 所造成的影響。舉個例子：

0 0 1 0 0 0 0 0
0 1 1 0 0 0 0
1 0 1 0 0 0
1 1 1 0 0
0 0 1 0
0 1 1
1 0
1

若使用普通加法時：圖形即巴斯卡三角形的一部分，如：

0 0 0 1 0 0 0
0 0 1 1 0 0
0 1 2 1 0
1 3 3 1
4 6 4
10 10
20

欲得符合群運算的圖形，將之 mod2 即可；即若將巴斯卡三角形 mod2 ，其圖形即是單一的 1 的影響力圖。（見研究結果）

影響力圖成有規律的往下發展。同狀態的圖形區不斷放大出現。但重點－1 在哪裡－卻無法看穿。故我們轉向其它方面研究。

(八)上推法：

疊合法強調的是寫好一些排列後，往下發展。但若改變作法，由已知的排列往上推，會發生什麼事呢？

我們來看一個例子：設第 (x+1) 列的排列為 b 、第 x 列為 a ，如下 b=(0100101001) 則 a=(11000110001) 或 $\bar{a}$=(00111001110) 均可由 b 上推而得。觀察當 $T^{+}(x,1)=1$ 時：

a 中的 1　2　2　1

a　11000110001

將第 (x+1) 列中 1 的編號標出來，可得序列 (2,5,7,10) ，而第 x 列中 1

的個數（簡表爲$|a|$）恰爲$(2-0+7-5+11-10)=5$，其意義爲：我們推導上一列時，若碰到下一列的某個位置是1，則我們所寫下的串列必須變號，如下：當s爲奇數時，我們把b和1的位置叫$(i_1, i_2, i_3, \cdots\cdots, i_4)$，則

$$\begin{array}{l}
\underline{|a| \quad i_1 \text{ 個 } 1 \qquad + \qquad i_3-i_2 \text{ 個 } 1 \qquad + \cdots\cdots + \qquad i_s-i_{s-1} \text{ 個 } 1} \\
a \ 1 \cdots\cdots 1\ 1\ 0 \cdots\cdots 0\ 0\ 1 \cdots\cdots 1\ 1\ 0 \cdots\cdots 0\ 0\ 1 \cdots\cdots 1\ 1\ 0 \cdots\cdots 0 \\
b \ 0 \cdots\cdots 0\ 1\ 0 \cdots\cdots 0\ 1\ 0 \cdots\cdots 0\ 1\ 0 \cdots\cdots 0\ 1\ 0 \cdots\cdots 0\ 1\ 0 \cdots\cdots \\
\qquad\quad i_1 \qquad\quad i_2 \qquad\quad i_3 \qquad\quad i_{s-1} \qquad\quad i_s
\end{array}$$

可得$|a|=i_1+(i_3-i_2)+(i_5-i_4)+\cdots+(i_s-i_{s-1})$個1

而s爲偶數時，可想像成把上圖由i_{s-1}處截斷，此時需有一個假想的1在第$x+1$個位置，即

$|a|=i_1+(i_3-i_2)+(i_5-i_4)+\cdots+(x+1-i_s)$個1

故$T^+(x,1)=1$時 $|a|\equiv\sum_{k=1}^{s} i_k \cdot (-1)^{k-1} \bmod (x+1)$

同理，不難驗證$T^+(x,1)=0$時 $a\equiv\sum_{k=1}^{s} i_k \cdot (-1)^{k} \bmod (x+1)$

因此可得 $|a|\equiv(-1)T^+(x,1)\sum_{k=1}^{s} i_k \cdot (-1)^{k} \bmod (x+1)$

(九)下推法：

下推法和上推法極相似，強調把數字定位。與上推法相同的是：它們都只能處理相近兩列間的關係。若第$(x+1)$列的排列爲b，第x列爲a，且a有m個元，其中1的位置在$(i_1,i_2, i_3\cdots i_s)$，則

$|b|=(m-1)-\sum_{k=1}^{s-1}|\, i_{k+1}-i_k-2\,|$。解釋如下：

若i_{k+1}和i_k不相鄰$(i_{k+1}-i_k\geqslant 2)$，則

a i_k $i_{k+1}-i_k-1$個0 i_{k+1}

$$\begin{array}{l}
a \cdots 1 \quad 0\ 0 \cdots 0 \quad 1 \cdots \\
\hline
b \cdots 1 \quad\ \ 0 \cdots 0 \quad 1 \cdots
\end{array}$$

b $i_{k+1}-i_k-2$個

故這$i_{k+1}-i_k-1$則可以造出$i_{k+1}-i_k-2$個0

而若$i_{k+1}-i_k=1$，則

a i_k i_{k+1}

$$\begin{array}{l}
a \cdots 1\ 1 \cdots \\
\hline
b \cdots\ 0 \cdots
\end{array}$$

b 1個0

亦可造出$|\, i_{k+1}-i_k-2\,|=1$個0

故 b 中 0 的個數有$\sum_{k=1}^{s-1} | i_{k+1}-i_k-2 |$個，而 1 的個數有

$(m-1)-\sum_{k=1}^{s-1} | i_{k+1}-i_k-2 |$個。

㈩發展：

由上下推法知道了把數字定位的好處，於是把它放入疊合法中，以表示倒三角形中的每一個數，若首列中 1 的位置是 $i_{11},i_{12}\cdots,i_{1s}$ 則

$T^+(x,y)\equiv\sum_{m=1}^{s} C_{i_{1m}-y}^{x-1} \pmod 2$（規定 $C_q^p=0$ 當 $P<q$ 或 $q<0$ ）

我們看看下面的例子：(10100100)≡

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 && 0 && 1 && 0 && 0 && 1 && 0 && 0 \\
& 1 && 1 && 1 && 0 && 1 && 1 && 0 & \\
&& 2 && 2 && 1 && 1 && 2 && 1 && \\
&&& 4 && 3 && 2 && 3 && 3 &&& \\
&&&& 7 && 5 && 5 && 6 &&&& \\
&&&&& 12 && 10 && 11 &&&&& \\
&&&&&& 22 && 21 &&&&&& \\
&&&&&&& 43 &&&&&&&
\end{array} \pmod 2$$

其中 $T^+(8,1)\equiv 43=C_0^7+C_2^7+C_5^7 \pmod 2$

$T^+(7,2)\equiv 21=C_7^6+C_5^6+C_2^6 \pmod 2\cdots$

再加發展，若可用 $\{0,1,2,\cdots,r\}$ 等 $(r+1)$ 個數，其中 k 的位置是 i_{k1}, $i_{k2},i_{k3},\cdots i_{ks(k)}$ 則 $T^+(x,y)\equiv\sum_{n=1}^{r}(n\sum_{m=1}^{s(n)} C_{i_{nm}-y}^{x-1})\ [\bmod(r+1)]$ 。

㈩統計：

我們發現，圖形中 1 的個數相當於〔（圖形的數字總數）減去（ 0 比 1 多的個數）〕的一半。

要求 0 比 1 多的個數，相當於把一個 0 計一點，一個 1 則減去一點。所得的點數就是 0 比 1 多的個數。

故 1 的個數，可表爲$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}n(n+1)-\sum_{X=1}^{n}\sum_{y=1}^{x}(-1)^{T^+(x,y)}]$，而由 $T^+(x,y)\equiv\sum_{m=1}^{s} C_{i_{1m}-y}^{x-1} \pmod 2$，就可以由第一列中 1 的位置來決定倒三角形中 1 的個數。

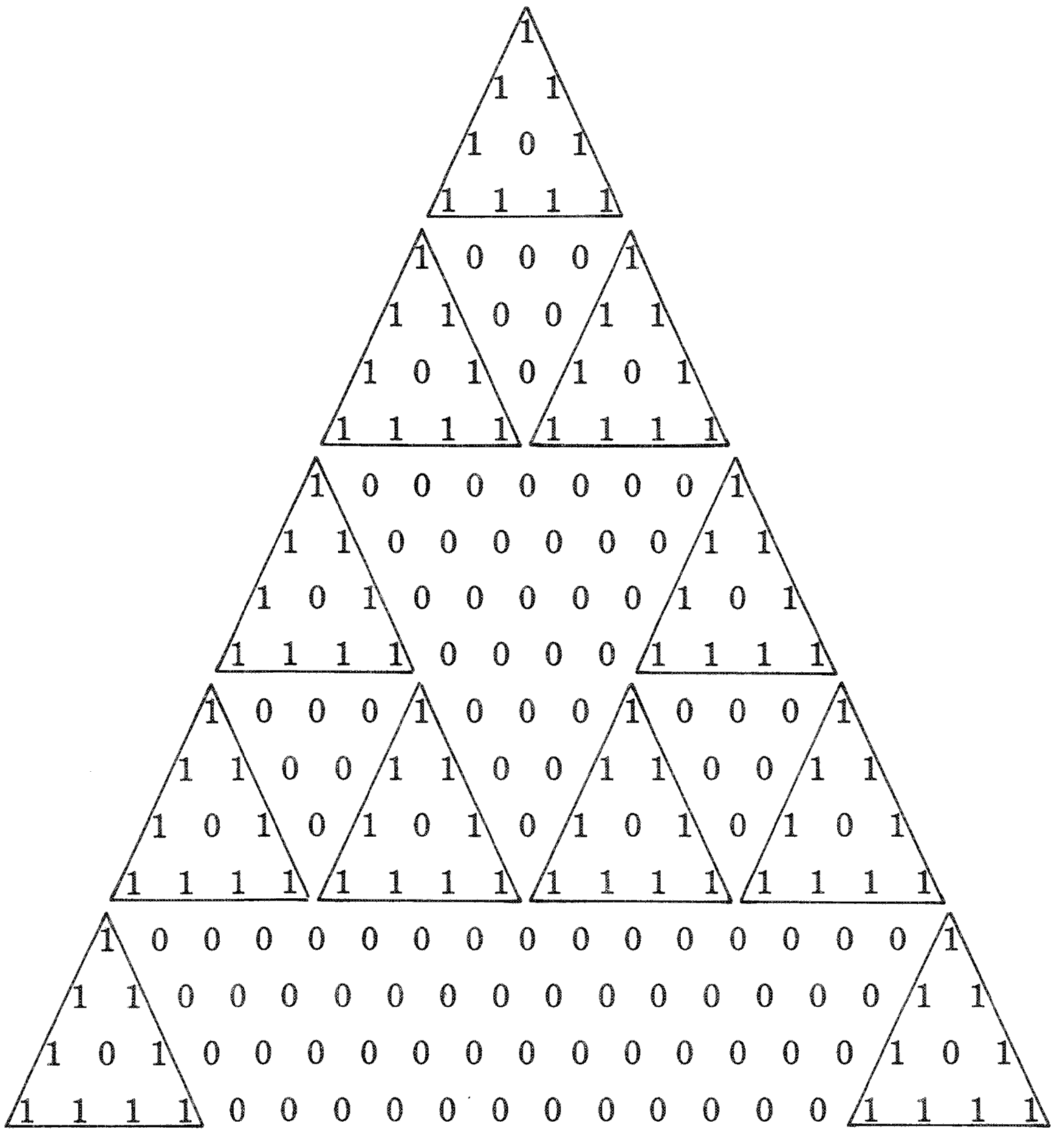
更進一步，若 $T^+(x,y)\equiv\sum_{n=1}^{r}(n\sum_{m=1}^{s(n)} C_{i_{nm}-y}^{x-1})[\bmod(r+1)]$ 時，圖形中 k 的個數相當於〔（圖形的數字總數）減去（其他數字〝分別〞比 1 多的個數）〕的

1/(r+1)。故若我們規定 $f_k(x)$，使

$$\begin{cases} f_k(x)=-r \text{，當 } x=k \\ f_k(x)=1 \text{，當 } x\neq k \end{cases} \quad \text{則 } k \text{ 的數目有} \frac{1}{r+1}\left[\frac{1}{2}n(n+1)-\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{x} f_k[T^{+}(x,y)]\right] \text{個。}$$

五、研究結果

影響力圖：



六、討論

㈠我們的擴展 {0,1,2, ⋯ ,r} 的意義在哪裡？

當初研究「0，1 問題」後想將之視為某種一般情形的特殊情形，這個一般情形就是 {0 ,1,2, ⋯ ,r} 等 (r+1) 個數的問題。其中若 r=1 即回到原題。在這個前提下，這個一般式必保有原題之特徵。

剩餘群成爲我們考慮的對象，主要便是由於它的一般性。它保留的原題特徵，就是其 mod 的過程。由於 mod 的限制，我們可將元素控制在有限的範圍，並研究其運算和同構。

(二)爲什麼 $\{0,1,2,\cdots,r\}$ 的剩餘群和 $W^{r+1}=1$ 之解所成之乘法群同構？其意義爲何？

我們知道：$W^{r+1}=1$ 之所有解其實就是 $W^{\{0,1,2\cdots,r\}}$，也就是這個映射是把 $k\rightarrow W^k$，因此它們同構。這是一種轉化，有助於將我們的運算用更簡潔的方法來表達。

七、結論

(一)若有 $\{0,1,2,3,\cdots,r\}$ 等 $(r+1)$ 個數可以用在金字塔中，則可用運算：

$$T^+(x+1,y)\equiv[T^+(x,y)+T^+(x,y+1)]\ mod(r+1)$$

來得到滿足 $T^+(x,y)\equiv\sum_{k=y}^{x+y-1}C_{k-y}^{x-1}\cdot T^+(1,k)\ [mod(r+1)]$ 的解。

(二)若有 $\{1,W,W^2,\cdots,W^r\}$ 等數，令 $W^{r+1}=1$ 則可得 $T^*(x,y)=\prod_{k=y}^{x+y-1}T^*(1,k)C_{k-y}^{x-1}$。

(三)影響力圖即是巴斯卡三角形以 2 爲模而得。具一定的規律。

(四)我們把第 $(x+1)$ 列 b 中有 1 的位置叫做 $(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_s)$a 爲 b 的上一列，則

$$|a|=(-1)^{T+(x,1)}\sum_{r=1}^{s}ir\cdot(-1)^r\ mod(x+1)$$。

(五)若第 $(x+1)$ 列的排列爲 b，第 x 列爲 a，且 a 有 m 個元，其中 1 的位置在 $(i_1,i_2,i_3\cdots i_s)$，則 $|b|=(m-1)-\sum_{k=1}^{s-1}|\ i_{kH}-i_{k\div}2\ |$。

(六)若 $T^+(x,y)\equiv\sum_{n=1}^{r}(n\sum_{m=1}^{S(n)}C_{inm-y}^{x-1})[mod(r+1)]$ 時，若規定 $f_k(x)$，使

$$\begin{cases}f_k(x)=-r\text{，當 }x=k\\ f_k(x)=1\text{，當 }x\neq k\end{cases}$$

則 k 的數目有 $\frac{1}{r+1}[\frac{1}{2}n(n+1)-\sum_{x=1}^{n}\sum_{y=1}^{x}f_k[T^+(x,y)]]$ 個。

八、参考資料

(1) Thinking Mathematically, John Mason, Leone Burton & Kaye Stacy.

(2)一百個數學問題，史坦豪斯著。

評　語

由一個簡單的倒三角形且僅由 0 和 1 兩個數字構成推廣至由任意 m 個數字組成的倒三角形，而運算方式也由 mod2 推廣至 mod m，問題本身清晰、有趣，推

廣部份十分自然，作者們的觀察力及選擇力相當突出。

問題解決的方法及邏輯的推演十分縝密，而且用到的課外知識（群論）也十分正確，顯出作者們極強的推理能力，及嚴格訓練的數學基礎，作者不厭其煩的做種種的模擬計算，耐心的歸納出其規律性，其興趣及努力都令人印象深刻。

作者表達清楚、自然，組織力強，百尺竿頭實可更進一步。