

# 拱 橋

## 高中職組物理科第二名

台北市立明倫高級中學

作者：吳智偉、謝明益、李資強

指導教師：謝國基、王黎順

### 一、研究動機

某日我看到學校旁邊的高架橋之時，忽然想起了中國古代的拱橋，想到古代的科技並不是很好，而其所能承載的重量卻也不見得比現在的橋差，所以我開始想到一橋的型狀是否會影響到它所能支撐的最大力量？如果不會的話，那中國的老祖先又為何要把橋做成彎曲的型狀呢？那如果會的話，它的曲率半徑和它所能支撐的最大力量之間又有什麼樣關係呢？所以我開始進行這個實驗。

### 二、研究目的

(一)在一開始的時候，我們做這個實驗只是爲了興趣而已，並無任何特定的目的，但希望我們做的這個實驗可以對各位在做某些計算（如：計算建築結構……等）時，能有所助益。

(二)而我們做了下列的二種實驗：

1. 石膏橋的二端沒有支撐時，荷重（應力）與曲率半徑的關係。
2. 石膏橋的二端有受外力影響。荷重與曲率半徑的關係。

### 三、實驗器材

| 製模之器材： |                                      |       |
|--------|--------------------------------------|-------|
| 器材名稱：  | 器材規格：                                | 器材數量： |
| 石膏粉    | 壹包 25 公斤                             | 三包    |
| 燒杯     | 225 毫升                               | 五個    |
|        | 400 毫升                               | 壹個    |
| 電子秤    | 永田牌 LCS-3000                         | 壹台    |
| 保麗龍    | $90 \times 60 \times 2.2\text{cm}^2$ | 若干塊   |
| 果汁機    | 最大容量 1500 毫升                         | 壹台    |
| 鐵釘     | 5 公分                                 | 若干支   |
| 保麗龍切割器 |                                      | 壹台    |
| 游標尺    | 最小刻度 0.05 公釐                         | 貳把    |

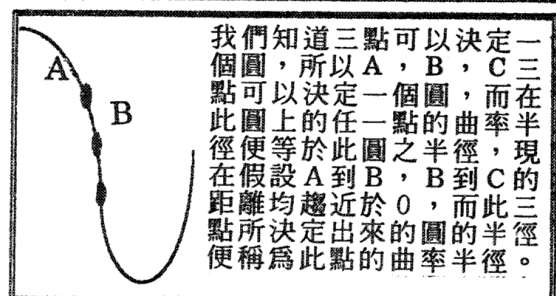
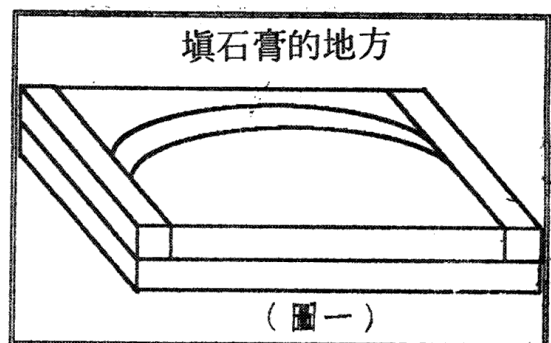
| 實驗之器材： |              |       |
|--------|--------------|-------|
| 器材名稱：  | 器材規格：        | 器材數量： |
| 槓桿支架   |              | 壹台    |
| 滑車     |              | 壹台    |
| 砝碼     | 100、110、500g | 1、2、1 |
| 滑輪     | 半徑6公分        | 貳個    |
| 驅動馬達   |              | 壹個    |
| 釣魚線    | 3號           | 壹捲    |
| 載玻片    |              | 四片    |
| 木塊、木條  |              | 若干個   |
| C型夾    | 大、中、小        | 若干個   |

#### 四、實驗設計原理

- (一)在此次的實驗中，我們使用槓桿原理來設計我們這一次的測量工具，我們把砝碼掛在滑車上，然後用驅動馬達來帶動滑車向遠離支點的方向走，如此一來施在石膏橋上的力量便會漸漸地增大，這是因為連接石膏橋和槓桿的繩子是固定的，所以抗力臂不會改變，但施力臂則會隨著滑車的走動而更變，所以在砝碼重固定，而施力臂會漸漸變大，但抗力臂不變的情況下一則抗力也要跟著變大，而施在石膏橋上的力量也會跟著變大。
- (二)另外我們為了能做二種實驗（石膏橋的二端有支撐力和無支撐力的二種）我們特別在石膏橋和所接觸的木塊之間放了二塊載玻片，這是為了消除石膏橋和木塊的摩擦力；而為了做二端有摩擦力的實驗，我們在石膏橋的二端施了二塊木塊並用C型夾來做固定。

#### 五、研究過程

- (一)首先我們會先用保麗龍做一個模（如右圖一），而後填入石膏（石膏和水的重量比是8:5），再等待一天，然後拆模讓石膏再風乾約一星期。
- (二)在實驗前我們會先製造幾套石膏橋〔每套拾壹支從曲率半徑30公分~130公分〕請向下看，每隔10公分一支〕，而後用測試工具

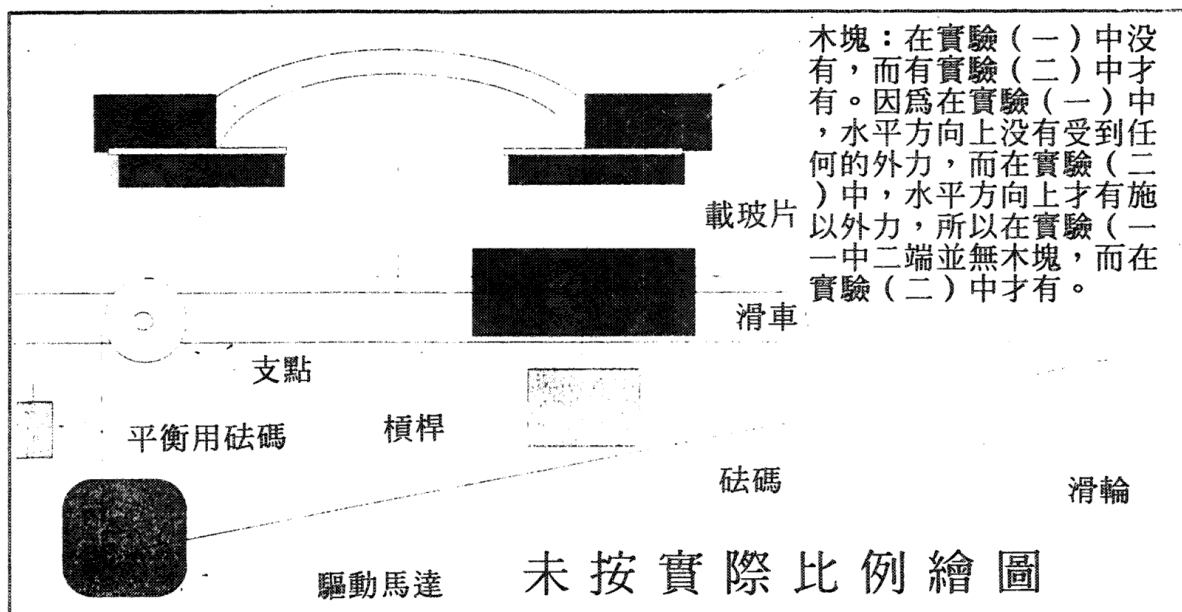


來測它的應力（在此我們以應力作爲就是物體所能承受的最大力量度量）。過程如下：

1. 首先將石膏橋放在測試工具上〔如果在實驗（二）中則須在二端夾上木塊，而在實驗（一）中則不必〕，而後將砝碼掛在滑車下，然後啓動馬達，而後馬達便會帶動滑車，當滑車向外走動時，繩子給石膏橋拉力便會改變，等到石膏橋斷掉時，馬達便會停止（左支點與滑車之間，我們設計了一個開關，當石膏橋斷掉時，槓桿會往下掉而碰觸到開關，此時馬達便會停止運轉）之後便可以測得滑車到支點的距離（也就是施力臂的距離，而抗力臂的距離是固定的，我們要的只是曲率半徑和應力之間的關係，和抗力臂無關）、砝碼重、石膏橋的厚度、石膏橋的寬度等，而後就可以測得石膏橋的曲率半徑和應力之間的關係了。

## 六、研究結果

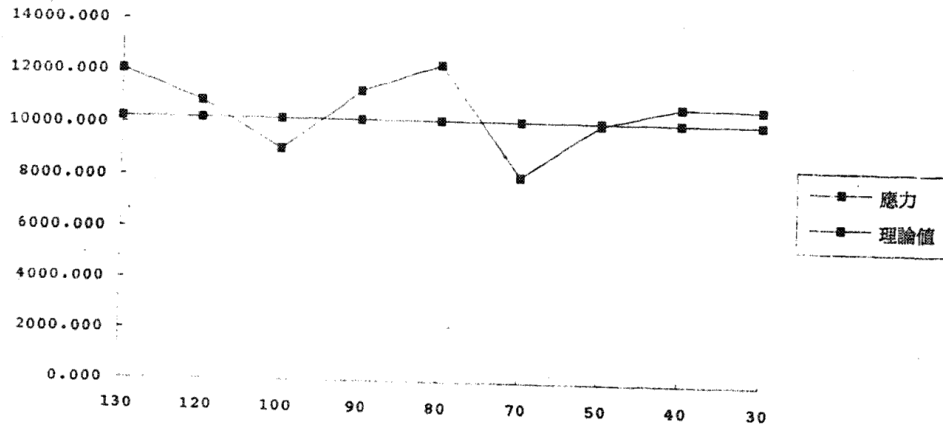
解說：在下面幾頁有我們一部份的實驗數據，在開頭名爲 NO.1 的是實驗(一)的數據，而開頭名爲 NO.2 的是實驗(二)的數據，而在圖表中：紅色的線代表的是我們實驗所做應力，而綠色的線代表實理論值〔在而在實驗(一)中則是代表石膏的最大支撐力（和曲率無關），實驗(二)中代表的是  $\tan$  值〕。



### NO1-1.XLS

| 曲率半徑 | 砵碼重 | 施力臂  | 寬度    | 厚度    | 應力        | 理論值     | 誤差      |
|------|-----|------|-------|-------|-----------|---------|---------|
| 130  | 320 | 83.7 | 2.330 | 0.955 | 12036.941 | 10220.5 | 17.77%  |
| 120  | 320 | 69.8 | 2.025 | 1.015 | 10867.117 | 10220.5 | 6.33%   |
| 100  | 320 | 60.0 | 2.425 | 0.875 | 9048.601  | 10220.5 | -11.47% |
| 90   | 320 | 87.4 | 2.410 | 1.025 | 11321.931 | 10220.5 | 10.78%  |
| 80   | 320 | 95.2 | 2.295 | 1.075 | 12347.976 | 10220.5 | 20.82%  |
| 70   | 320 | 60.8 | 2.345 | 1.025 | 8094.441  | 10220.5 | -20.80% |
| 50   | 320 | 82.0 | 2.450 | 1.055 | 10151.852 | 10220.5 | -0.67%  |
| 40   | 320 | 79.7 | 2.375 | 0.990 | 10846.996 | 10220.5 | 6.13%   |
| 30   | 320 | 80.7 | 2.275 | 1.050 | 10810.675 | 10220.5 | 5.77%   |

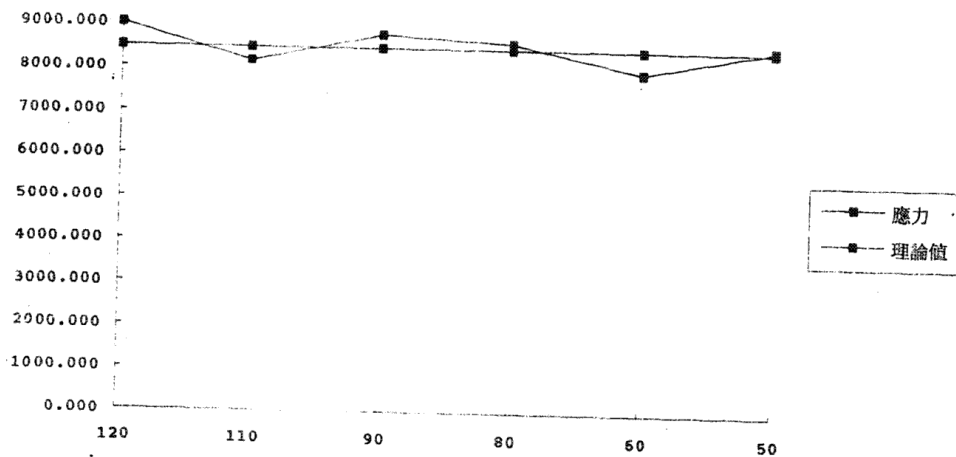
| 製造日期 | 拆模日期 | 實驗日期 | 誤差   |
|------|------|------|------|
| 2月1日 | 2月2日 | 2月9日 | 2.0% |



### NO1-2.XLS

| 曲率半徑 | 砵碼重 | 施力臂 | 寬度    | 厚度    | 應力       | 理論值  | 誤差     |
|------|-----|-----|-------|-------|----------|------|--------|
| 120  | 320 | 62  | 2.250 | 0.980 | 8997.732 | 8477 | 6.14%  |
| 110  | 320 | 57  | 2.350 | 0.950 | 8170.213 | 8477 | -3.62% |
| 90   | 320 | 59  | 2.180 | 0.985 | 8792.437 | 8477 | 3.72%  |
| 80   | 320 | 62  | 2.300 | 1.000 | 8626.087 | 8477 | 1.76%  |
| 60   | 320 | 63  | 2.400 | 1.055 | 7962.085 | 8477 | -6.07% |
| 50   | 320 | 73  | 2.455 | 1.115 | 8533.879 | 8477 | 0.67%  |

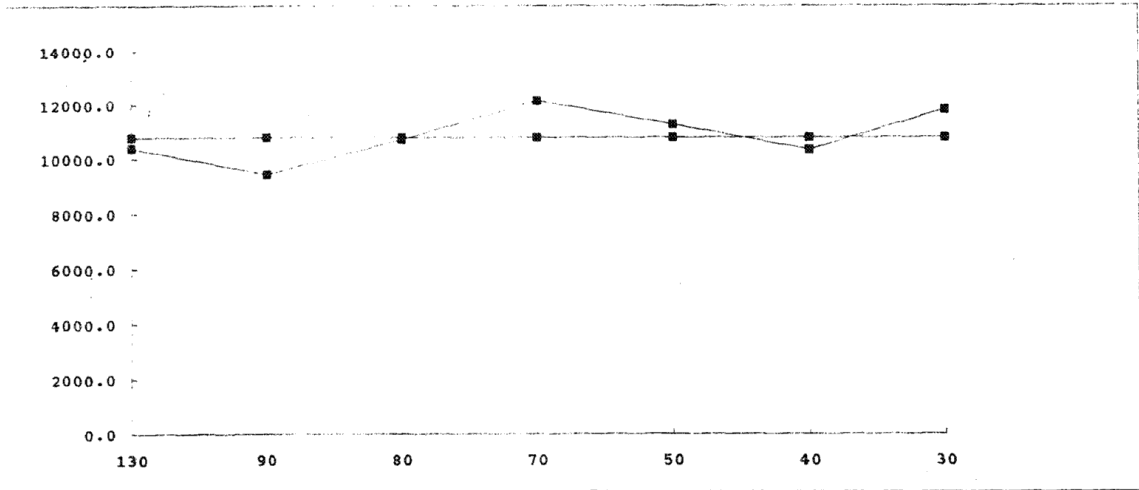
| 製造日期 | 拆模日期 | 實驗日期 | 誤差 |
|------|------|------|----|
| 2月1日 | 2月2日 | 2月9日 | 6% |



### NO1-3.XLS

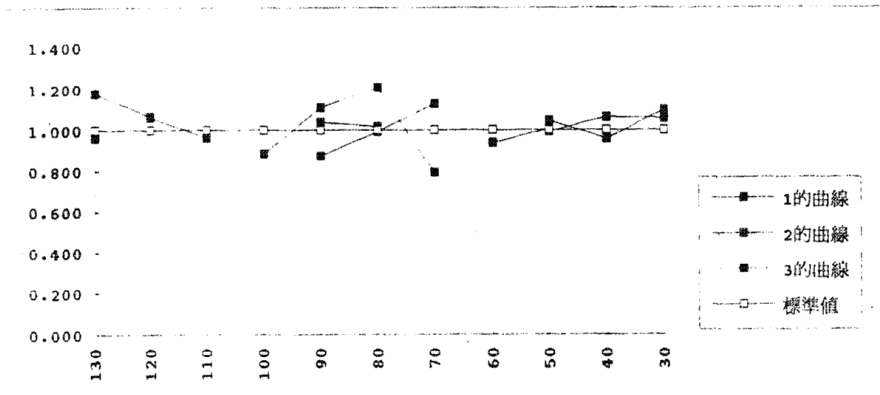
| 曲率半徑 | 砝碼重 | 施力臂 | 寬度    | 厚度    | 應力      | 理論值     | 誤差      |
|------|-----|-----|-------|-------|---------|---------|---------|
| 130  | 320 | 102 | 2.425 | 1.295 | 10393.7 | 10785.8 | -3.64%  |
| 90   | 320 | 70  | 2.375 | 1.000 | 9431.6  | 10785.8 | -12.56% |
| 80   | 320 | 85  | 2.605 | 0.975 | 10709.2 | 10785.8 | -0.71%  |
| 70   | 320 | 86  | 2.325 | 0.975 | 12140.1 | 10785.8 | 12.56%  |
| 50   | 320 | 84  | 2.305 | 1.035 | 11267.3 | 10785.8 | 4.46%   |
| 40   | 320 | 113 | 2.545 | 1.375 | 10333.3 | 10785.8 | -4.20%  |
| 30   | 320 | 84  | 2.275 | 1.000 | 11815.4 | 10785.8 | 9.55%   |

| 製造日期 | 拆模日期 | 實驗日期  | 誤差   |
|------|------|-------|------|
| 2月2日 | 2月3日 | 2月10日 | 1.3% |



### NO1-TOTA.XLS

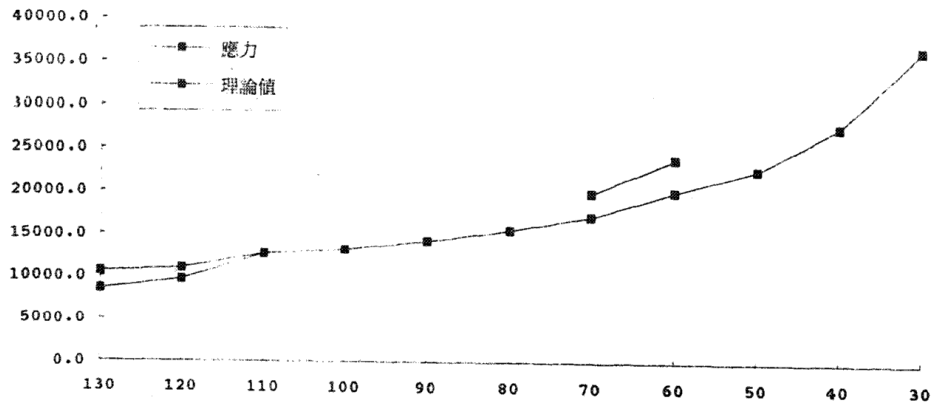
| 曲率半徑 | NO1-1應力 | NO1-2應力 | NO1-3應力 | 1的標準值   | 2的標準值 | 3的標準值   | 1的曲線  | 2的曲線  | 3的曲線  | 標準值 |
|------|---------|---------|---------|---------|-------|---------|-------|-------|-------|-----|
| 130  | 12036.9 |         | 10393.7 | 10220.5 | 8477  | 10785.8 | 1.178 |       | 0.964 | 1   |
| 120  | 10867.1 | 8997.7  |         | 10220.5 | 8477  | 10785.8 | 1.063 | 1.061 |       | 1   |
| 110  |         | 8170.2  |         | 10220.5 | 8477  | 10785.8 |       | 0.964 |       | 1   |
| 100  | 9048.6  |         |         | 10220.5 | 8477  | 10785.8 | 0.885 |       |       | 1   |
| 90   | 11121.9 | 8792.4  | 9431.6  | 10220.5 | 8477  | 10785.8 | 1.108 | 1.017 | 0.874 | 1   |
| 80   | 12348.0 | 8626.1  | 10709.2 | 10220.5 | 8477  | 10785.8 | 1.208 | 1.018 | 0.993 | 1   |
| 70   | 8094.4  |         | 12140.1 | 10220.5 | 8477  | 10785.8 | 0.792 |       | 1.126 | 1   |
| 60   |         | 7962.1  |         | 10220.5 | 8477  | 10785.8 |       | 0.939 |       | 1   |
| 50   | 10151.9 | 8533.9  | 11267.3 | 10220.5 | 8477  | 10785.8 | 0.993 | 1.007 | 1.045 | 1   |
| 40   | 10847.0 |         | 10333.3 | 10220.5 | 8477  | 10785.8 | 1.061 |       | 0.958 | 1   |
| 30   | 10816.7 |         | 11815.4 | 10220.5 | 8477  | 10785.8 | 1.058 |       | 1.095 | 1   |



## NO2-1.XLS

| 曲率半徑 | 砵碼量 | 施力臂   | 寬度  | 厚度   | 應力      | 理論值     | 誤差      |
|------|-----|-------|-----|------|---------|---------|---------|
| 130  | 500 | 35.2  | 2.4 | 0.88 | 8541.1  | 10579.8 | 19.27%  |
| 120  | 500 | 38.5  | 2.4 | 0.83 | 9661.8  | 10968.0 | 11.91%  |
| 110  | 500 | 71.2  | 2.6 | 1.08 | 12664.0 | 12680.3 | 0.13%   |
| 100  |     |       |     | 1.00 |         | 13218.0 |         |
| 90   |     |       |     | 1.00 |         | 14250.3 |         |
| 80   |     |       |     | 1.00 |         | 15546.9 |         |
| 70   | 500 | 90.6  | 2.3 | 0.99 | 19894.6 | 17185.1 | -15.77% |
| 60   | 500 | 122.0 | 2.2 | 1.15 | 23943.9 | 20075.4 | -19.27% |
| 50   |     |       |     | 1.00 |         | 22711.0 |         |
| 40   |     |       |     | 1.00 |         | 27701.7 |         |
| 30   |     |       |     | 1.00 |         | 36616.0 |         |

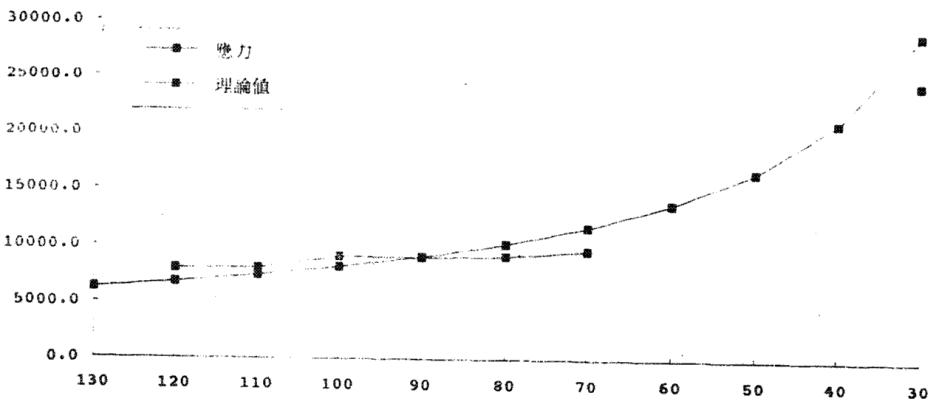
| 製造日期 | 拆機日期 | 實驗日期  | 誤差  |
|------|------|-------|-----|
| 1月4日 | 1月5日 | 1月12日 | 19% |



## NO2-2.XLS

| 曲率半徑 | 砵碼量 | 施力臂   | 寬度    | 厚度   | 應力      | 理論值     | 誤差      |
|------|-----|-------|-------|------|---------|---------|---------|
| 130  |     |       |       | 1.00 |         | 6248.2  |         |
| 120  | 500 | 42.9  | 2.505 | 1.08 | 7965.5  | 6772.8  | -17.61% |
| 110  | 500 | 40.9  | 2.510 | 1.02 | 8027.0  | 7394.1  | -8.56%  |
| 100  | 500 | 50.5  | 2.590 | 1.08 | 9068.9  | 8141.6  | -11.39% |
| 90   | 500 | 46.6  | 2.485 | 1.04 | 9015.6  | 9058.4  | 0.47%   |
| 80   | 500 | 42.3  | 2.375 | 0.98 | 9133.6  | 10210.0 | 10.54%  |
| 70   | 500 | 47.2  | 2.400 | 1.02 | 9640.5  | 11700.9 | 17.61%  |
| 60   |     |       |       | 1.00 |         | 13710.2 |         |
| 50   |     |       |       | 1.00 |         | 16572.7 |         |
| 40   |     |       |       | 1.00 |         | 21005.3 |         |
| 30   | 500 | 110.4 | 2.225 | 1.02 | 24442.4 | 28922.5 | 15.49%  |

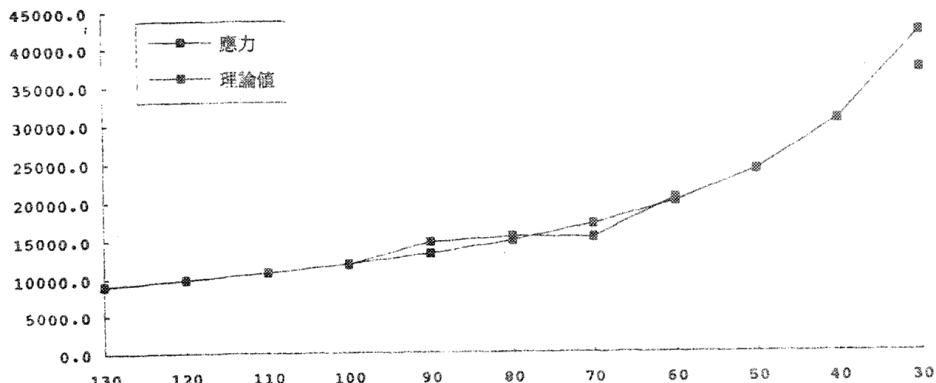
| 製造日期  | 拆機日期  | 實驗日期  | 誤差  |
|-------|-------|-------|-----|
| 1月12日 | 1月13日 | 1月20日 | 18% |



### NO2-3.XLS

| 曲率半徑 | 砵碼量 | 施力臂   | 寬度    | 厚度   | 應力      | 理論值     | 誤差      |
|------|-----|-------|-------|------|---------|---------|---------|
| 130  |     |       |       | 1.00 |         | 9078.2  |         |
| 120  |     |       |       | 1.00 |         | 9840.4  |         |
| 110  |     |       |       | 1.00 |         | 10743.1 |         |
| 100  | 500 | 57.3  | 2.230 | 1.10 | 11732.9 | 11829.1 | -0.81%  |
| 90   | 500 | 66.3  | 2.375 | 0.95 | 14692.5 | 13161.2 | 11.64%  |
| 80   | 500 | 71.8  | 2.200 | 1.06 | 15394.5 | 14834.3 | 3.78%   |
| 70   | 500 | 86.3  | 2.405 | 1.18 | 15269.6 | 17000.6 | -10.18% |
| 60   | 500 | 112.5 | 2.235 | 1.24 | 20378.8 | 19919.9 | 2.30%   |
| 50   |     |       |       | 1.00 |         | 24079.0 |         |
| 40   |     |       |       | 1.00 |         | 30519.1 |         |
| 30   | 710 | 120.7 | 2.285 | 1.01 | 37132.8 | 42022.3 | -11.64% |

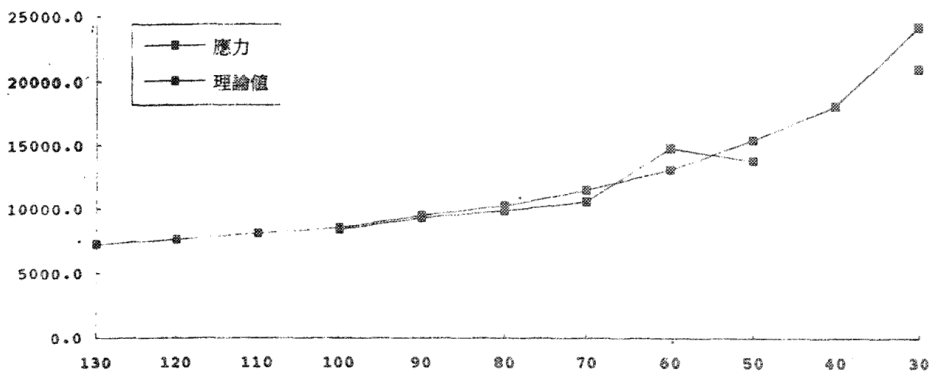
| 製造日期  | 拆模日期  | 實驗日期  | 誤差  |
|-------|-------|-------|-----|
| 1月16日 | 1月17日 | 1月24日 | 12% |



### NO2-4.XLS

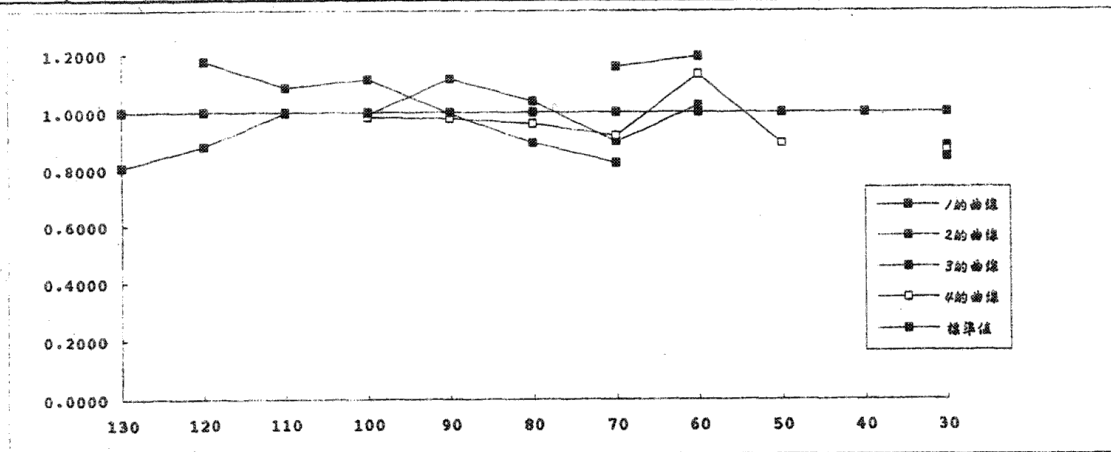
| 曲率半徑 | 砵碼量 | 施力臂   | 寬度    | 厚度    | 應力      | 理論值     | 誤差      |
|------|-----|-------|-------|-------|---------|---------|---------|
| 130  |     |       |       | 1.00  |         | 7244.2  |         |
| 120  |     |       |       | 1.00  |         | 7630.2  |         |
| 110  |     |       |       | 1.00  |         | 8097.3  |         |
| 100  | 500 | 40.0  | 2.500 | 0.955 | 9377.0  | 8518.1  | -1.66%  |
| 90   | 500 | 43.0  | 2.200 | 1.055 | 9263.2  | 9457.3  | -2.05%  |
| 80   | 500 | 44.3  | 2.225 | 1.015 | 9807.9  | 10198.7 | -3.83%  |
| 70   | 500 | 45.6  | 2.015 | 1.075 | 10525.7 | 11454.5 | -8.11%  |
| 60   | 500 | 74.0  | 2.225 | 1.125 | 14781.5 | 13065.2 | 13.14%  |
| 50   | 500 | 87.0  | 2.575 | 1.225 | 13790.4 | 15435.9 | -10.66% |
| 40   |     |       |       | 1.00  |         | 18101.5 |         |
| 30   | 500 | 115.0 | 2.475 | 1.105 | 21024.7 | 24204.4 | -13.14% |

| 製造日期  | 拆模日期  | 實驗日期  | 誤差  |
|-------|-------|-------|-----|
| 1月17日 | 1月18日 | 1月25日 | 13% |



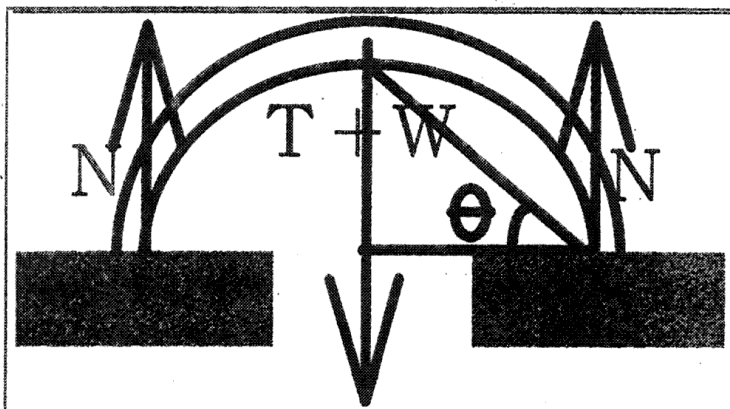
## NO2-TOTA.XLS

| 曲率半徑 | $\kappa a_2-1$ | $\kappa a_2-2$ | $\kappa a_2-3$ | $\kappa a_2-u$ | 1的標準值   | 2的標準值   | 3的標準值   | 4的標準值   | 1的曲線   | 2的曲線   | 3的曲線   | 4的曲線   | 標準值  |
|------|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|--------|--------|------|
| 130  | 8541.1         |                |                |                | 10579.8 | 6248.2  | 9078.2  | 7244.2  | 0.8073 |        |        |        | 1.00 |
| 120  | 9661.8         | 7965.5         |                |                | 10968.0 | 6772.8  | 9840.4  | 7630.2  | 0.8809 | 1.1761 |        |        | 1.00 |
| 110  | 12664.0        | 8027.0         |                |                | 12680.3 | 7394.1  | 10743.1 | 8087.3  | 0.9987 | 1.0856 |        |        | 1.00 |
| 100  |                | 9068.9         | 11732.9        | 8377.0         | 13218.0 | 8141.6  | 11829.1 | 8518.1  |        | 1.1139 | 0.9919 | 0.9834 | 1.00 |
| 90   |                | 9015.6         | 14692.5        | 9263.2         | 14250.3 | 9058.4  | 13161.2 | 9457.3  |        | 0.9953 | 1.1164 | 0.9795 | 1.00 |
| 80   |                | 9133.6         | 15394.5        | 9807.9         | 15546.9 | 10210.0 | 14834.3 | 10198.7 |        | 0.8946 | 1.0378 | 0.9617 | 1.00 |
| 70   | 19894.6        | 9640.5         | 15269.6        | 10525.7        | 17185.1 | 11700.9 | 17000.6 | 11454.5 | 1.1577 | 0.8239 | 0.8982 | 0.9189 | 1.00 |
| 60   | 23943.9        |                | 20378.8        | 14781.5        | 20075.4 | 13710.2 | 19919.9 | 13065.2 | 1.1927 |        | 1.0230 | 1.1314 | 1.00 |
| 50   |                |                |                | 13790.4        | 22711.0 | 16572.7 | 24079.0 | 15435.9 |        |        |        | 0.8934 | 1.00 |
| 40   |                |                |                |                | 27701.7 | 21005.3 | 30519.1 | 18101.5 |        |        |        |        | 1.00 |
| 30   |                | 24442.4        | 37132.8        | 21024.7        | 36616.0 | 28922.5 | 42022.3 | 24204.4 |        | 0.8451 | 0.8836 | 0.8686 | 1.00 |



## 七、研究討論

- (一)由於每一座石膏橋的密度並不完全相同，所以實驗仍有誤差。
- (二)分析石膏橋在實驗(一)中的受力我們可以發現：



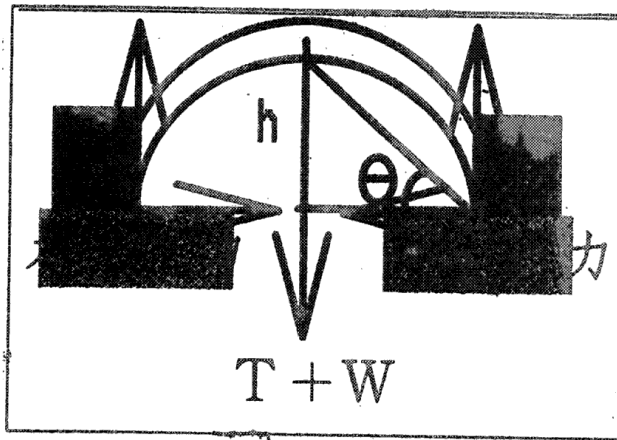
1. 在水平方向上，石膏橋沒有任何外力（石膏和支架之間有載玻片，所以摩擦力很小，可以忽略不計。）
2. 在垂直方向上，石膏橋受繩子向下的拉力和重力 ( $T+W$ )（但  $W$  和  $T$  比較起來很小，所以可以忽略不計），而向上的外力有兩邊支架所給予的反作



用力 ( $2 \times N$ ) [  $T+W$  平均施於兩木塊，所以兩木塊所給與的反作用力應相等 ]。

3. 分析石膏橋一端的受力，可以發現因為在水平方向上並無受到任何的外力，所以合力便與  $\theta$  無關 ( $\theta$  角見上圖)，所以石膏橋的應力便不會和曲率半徑有任何的關係，因此應力就只和石膏橋的材質、厚度、寬度、長度有關，但在此實驗中我們為了去除這些變因，我們已把材質和長度做了固定，而厚度和寬度，我們也在算應力時把它的影響給除去了，所以在實驗(一)中的應力對曲率半徑作圖應趨近於一條水平的直線。

(二)分析石膏橋在實驗(二)的受力我們可以發現：



1. 在水平方向上，石膏橋只有受到兩邊木塊所給予的推力（此推力的形成是因為石膏橋受到外力  $T$  向下，所以造成石膏橋的形變，而造成石膏橋的長度變長了，但因為石膏橋的二端有木塊固定，使石膏橋伸長的力便施於木塊上，而木塊便給石膏橋一個反作用力）此二力大小相等方向相反。而且水平推力會因外力（荷重） $T$  加大而增大。
2. 在垂直方向上，所受外力同實驗(一)。
3. 分析石膏橋一端的受力，在水平方向上的外力會和  $T$  成正比，而在垂直方向上的外力約等於  $T/2$  而此二力的合力方向應與弦成  $\theta$  的夾角方向上。（ $r$  是橋的半弦長）（石膏橋的應力大約等於  $\tan\theta$ ， $\tan\theta=h/r$ ， $h$  為橋的頂點到弦中點的高度）。

(四)由上面的討論得知：橋的曲率愈大時，則橋所能承受的最大荷重便愈大，所以古代的橋大多做成拱型。

## 八、實驗結論

(一)見「六：研究結果」，實驗(一)數據之百分誤差均小於 20%，而實驗(二)數據之

百分誤差均小於 19%，所以在力學實驗上是在可以接受的範圍內。

(二)在實驗中雖然有誤差存在，但依然可以由「六：研究結果」看出下列的結果：

1. 在實驗(一)中應力是大約相等的。
2. 在實驗(二)中應力大約與  $\tan \theta$  成正比。所以在「七、研究討論」的理論應該是正確的。

## 九、參考資料

- (1)費因曼物理學(二) 費因曼。
- (2)大學基礎物理 鄧中柱。
- (3)光復科技百科全書 13，15 光復書局中華民國第三十三屆中小學科學展覽優勝作品專輯。

## 評語

1. 能自行設計、製作實驗測量工具，且有效發揮測量功能。
2. 理論分析深入，對拱橋支撐有相當的了解。