

凹面？拋物面？！—— 液體旋轉所形成曲面之探討

高中組物理科第一名

臺灣省臺中市私立曉明女子高級中學

作者：黃筑筠、施盈如、
成欣芸、許彥寧
指導教師：張宇靖

一、研究動機

放洗澡水時，偶然間見到旋轉中的液面呈現下凹現象，做化學實驗調配藥品攪拌溶液時，亦可看到液面下凹的現象，十分有趣。而數學正學到拋物線的我們，靈機一動，心想：「這下凹的液面，會不會是『拋物面』呢？」

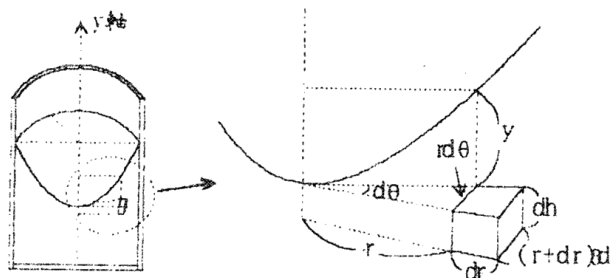
因此我們將整個容器旋轉，觀察其中之液體所形成之凹面，並設計實驗及利用電腦計算、繪圖，二者配合，加以比較、證明。若我們能在實驗室中以簡易的方式將拋物面製造成功，並設法產生鏡面，即可利用此結果，自製各式的光學儀器。

二、研究目的

1. 設計實驗證明旋轉中的液體表面形成之凹面為一拋物曲面，並使液體固化，以利證明其是否為一拋物面。
2. 嘗試設計程式處理實驗數據，畫出理論推導出的拋物線之圖形。
3. 以驗證所形成之凹面是否為拋物面。並討論影響其結果的變因和關係。
4. 利用幾何光學方法驗證實驗，驗證其是否可將平行光聚焦於一點，並藉此求其焦點。

三、理論推導：以兩種不同的推導方式加以推導：

(一)推導一：設有一圓柱容器，其溶液密度 P ，以等角速度 w 繞中心軸旋轉。取其液體內的一小單元體，如右圖。



設 m 爲此小單元體之質量， $dm = \rho dv$ 。

$$\text{因 } dv = dh \times r d\theta \times dr, \Rightarrow dm = \rho dr dh d\theta \dots\dots(1)$$

因爲以等角速度旋轉，所以此小單元體必受向心力 F_c 作用。

$$\text{又此小單元體，左邊受力 } F_1 = P \times A = P \times r d\theta \times dh \dots\dots(2)$$

$$\text{右邊受力 } F_2 = P' \times A' = (P + dp) \times (r + dr) \times d\theta \times dh \dots\dots(3)$$

(P : 向右之液體壓力 ; P' : 向左力之液體壓力 = $P + dp$)

$$\text{利用牛頓第二運動定律，合力 } \Sigma F_c = F_2 - F_1 = dm \times a = dm \times \omega^2 \times r \dots\dots(4)$$

其中向心加速度 $a = \omega^2 \times r$ ，自(1)(2)(3)(4)式，

$$\Rightarrow (P + dp) \times (r + dr) \times d\theta \times dh - P \times r d\theta \times dh = P \times (dh \times r d\theta \times dr) \times \omega^2 \times r \dots(5)$$

若 $dr \rightarrow 0 \Rightarrow r + dr \approx r$ ，並取 $r=0$ ，其壓力爲 P_c ，對(5)式積分，

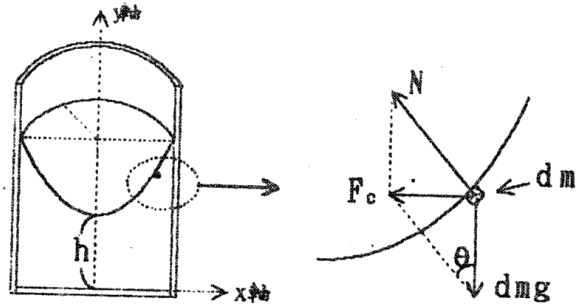
$$\Rightarrow \int_{P_c}^P dp = P \times \omega^2 \int_0^r r dr \Rightarrow P - P_c = P \omega^2 \times \frac{1}{2} r^2 \dots(6); \text{ 因 } P = P_c + \rho \times y \times g$$

$$\text{所以(6)式 } \Rightarrow \rho \times y \times g = \frac{1}{2} \times \rho \times \omega^2 \times r^2 \Rightarrow y = \frac{\omega^2}{2g} r^2 \dots(7) \sim \text{拋物線方程式。}$$

即得證：旋轉中液體所呈液面爲拋物面。

(二)推導二：設有一圓柱容器，以等角速度繞中心軸旋轉：

在液面上取一質點，其質量爲 dm ，在液面之面積爲 ds ，其所受的力爲重力 dmg 和正向力 Pds (P 爲液面所受之大氣壓力)，如右圖。



此質點所受之合力即爲其向心力， $\Rightarrow F_c = dm\omega^2 x$

$$\text{因此，小質點在液面上表面積之斜率爲 } \frac{dy}{dx} = \tan\theta = \frac{F_c}{dmg} = \frac{dm\omega^2 x}{dmg} = \frac{\omega^2 x}{g}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{\omega^2 x}{g} dx; \text{ 對左式積分 } \Rightarrow \int_0^y dy = \frac{\omega^2}{g} \int_0^x x dx \Rightarrow y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C;$$

C 爲常數... (8)

以 $x=0$ 代入(8)式，得 $C=h$ ； h 爲液面最低點至筒底之距離，

$$\Rightarrow y = \frac{\omega^2 x}{2g} x^2 + h \dots \text{即得證：旋轉中液體所呈之凹面爲拋物面。}$$

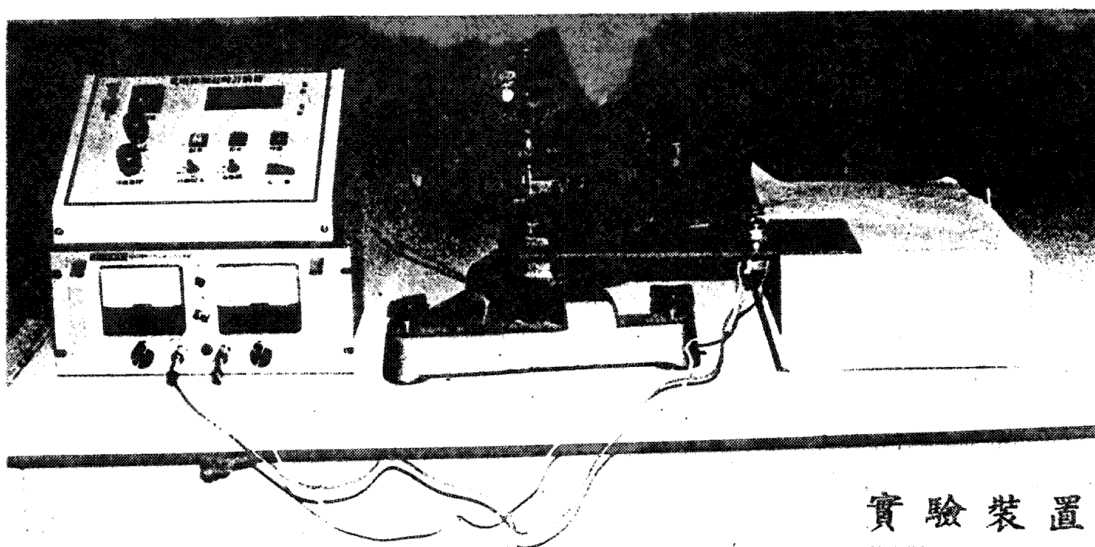
※註：以上兩種推導均只考慮其向心力、重力。

四、實驗儀器

(一)主要儀器：

1. 硬體設備：旋轉裝置（自製，以“轉動慣量實驗”之轉盤改裝）、電源供應器（直流）、光電計時器、抽真空用之幫浦、馬德堡半球（改裝成抽真空的裝置）、486 電腦、He-Ne 雷射。
2. 容器、器具：燒杯(250ml;100ml)、量筒、不同形狀的紙盒、試管、螺旋狀鐵絲、酒精燈。
3. 藥品：環氧樹脂、洋菜粉、硫酸銅粉末、矽酸鈉（水玻璃）、正丙酮(0.1M)、硝酸銀溶液(10%)、濃氨水。

(二)輔助儀器：電爐、電熱器、紗布、滴管、 θ BASIC、鋁箔紙。



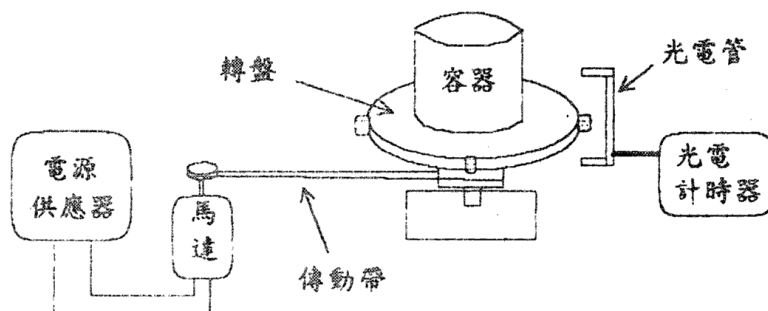
五、研究過程

(一)實驗裝置如右圖

(二)利用 θ BASIC 語言自行設計的程式（電腦程式略）

(三)實驗方法：

1. 在水中加入顏料，倒入容器並旋轉，觀察其曲面，並



拍照、記錄。

2. 拋物面的製作：

(1) 以洋菜為製造拋物面的材料：

- 步驟：
- 利用電爐加熱洋菜溶液使其溶解，並倒入 250ml 的燒杯。
 - 啟動裝置旋轉，並利用滴管將溶液中的氣泡吸出。
 - 達穩定轉速，測量其旋轉的週期。
 - 待燒杯中的溶液凝固，將其剖面取出。
 - 觀察所形成的曲面並拍照記錄。
 - 將其週期代入電腦程式並和拍攝所得的曲面加以分析比較。
 - 改變電源的大小以改變馬達之轉速，重覆步驟 a. ~ g.。

(2) 以樹脂為製造拋物面的材料：

- 步驟：
- 將環氧樹脂 A、B 劑以 1:1 混合倒入 100ml 的燒杯內。
 - 置於抽真空的裝置，利用幫浦，將其內部的氣泡抽出。
 - 將除去部分氣泡的混合液倒入紙盒內。
 - 啟動旋轉裝置，並利用電熱器加速其凝固。
 - 達穩定轉速時測量其旋轉週期。
 - 待紙盒內之混合液凝固，將外層紙盒除去，並拍照紀錄。
 - 將測量出的週期代入電腦程式並和拍攝所得曲面分析比較。
 - 改變電源的大小以改變馬達之轉速，重覆步驟 a. ~ g.。

(3) 改變容器的形狀：

- 步驟：
- 以樹脂為材料、形狀不同容器、相同電壓，重覆實驗(2)之步驟 a. ~ f.。
 - 就其不同形狀的容器所形成的曲面和週期加以分析比較。

(4) 改變容器的位置：

- 步驟：
- 以洋菜為材料，將兩個燒杯黏在對稱於中心的位置，重覆實驗(1)之步驟 a. ~ e.。
 - 再旋轉一直徑與兩燒杯容器距離相同之大容器，觀察其所形成的曲面，拍照記錄。並比較二者結果，加以討論。

(5) 改變不同半徑的圓形容器：

- 步驟：
- 以洋菜為材料，不同半徑之容器重覆實驗(1)步驟 a. ~ e.。
 - 改變容器的材質，重覆步驟 a.，二者加以比較討論。

(6) 高速旋轉下曲面現象的探討：（以洋菜為材料）

- 步驟：
- 以不等量溶液，較大電壓，相同半徑容器，重覆實驗(1) a、b

步驟。待其凝固後觀察所形成的曲面，並拍照記錄。

b. 改變容器半徑，固定等高度的溶液，以較大轉速旋轉，重覆實驗(1) a. ~ e. 步驟。

c. 改變容器的材質，重覆步驟 b. 。

(7) 轉速由快至慢或由慢至快曲面形成的探討：

步驟：重覆實驗步驟(1)作兩組實驗比較，一組轉速由靜止慢慢增加至一定電壓下，測量其週期；一組轉速由較快慢慢減速電壓下，測量其週期，比較二者相同、相異處。

3. 鏡面的製作：

(1) 銀鏡反應：（參考高中化學實驗手冊第四冊）

(2) 以薄鋁箔紙緊密貼覆於以樹脂製造之凹面。

4. 測量集距：

步驟：(1) 找出以電腦繪圖畫好之拋物線之主軸，並畫出四條與主軸平行的直線。

(2) 利用雷射光沿一平行線射向以貼妥鋁箔紙之凹面，並畫出其反射線。

(3) 分別沿此四條線射向凹面，觀察其反射線是否交於一點。並測量此焦點。

六、實驗結果

(一) 旋轉“水”所形成之凹面：

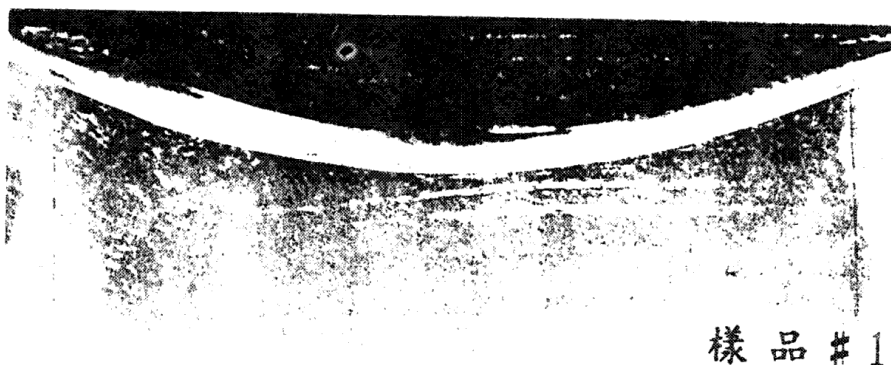
觀察水於旋轉中所形成之曲面，呈一穩定狀態，且隨其轉速不同，所形成之凹面亦隨之改變。

(二) 分別以洋菜及樹脂所製造之凹面：

1. 以洋菜為材料（實驗數據略）

樣品 #1：平均 = 8.211 秒 / 20 次

平均週期 = 0.411 秒 / 次



樣品 #2 : 平均 = 6.210 秒 / 20 次

平均週期 = 0.310 秒 / 次

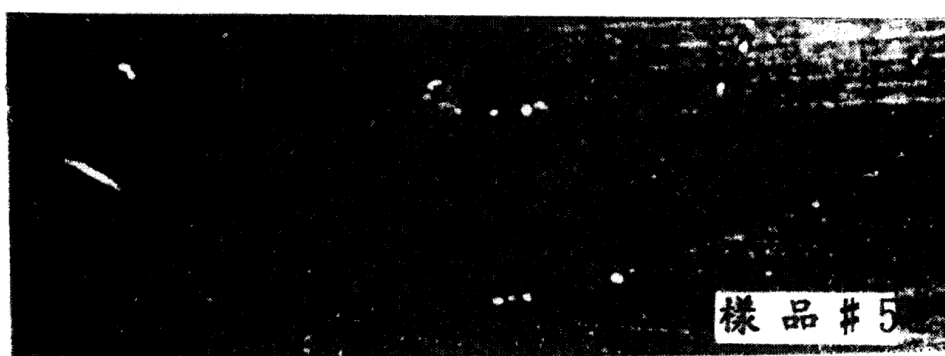


我們發現洋菜所形成曲面深度會隨著液體轉動週期的不同而變化。其週期越大轉速 W 就愈小，曲面就愈平緩，反之週期愈小轉速 W 就愈大，曲面就愈深，可由照片觀察出。

2. 以樹脂為材料 (實驗數據略)

樣品 #5 : 平均 = 8.805 秒 / 20 次

平均週期 = 0.440 秒 / 次



樣品 #6 : 平均 = 6.621 秒 / 20 次

平均週期 = 0.331 秒 / 次

樣品 #6 : 平均 = 6.621 秒 / 20 次
平均週期 = 0.331 秒 / 次



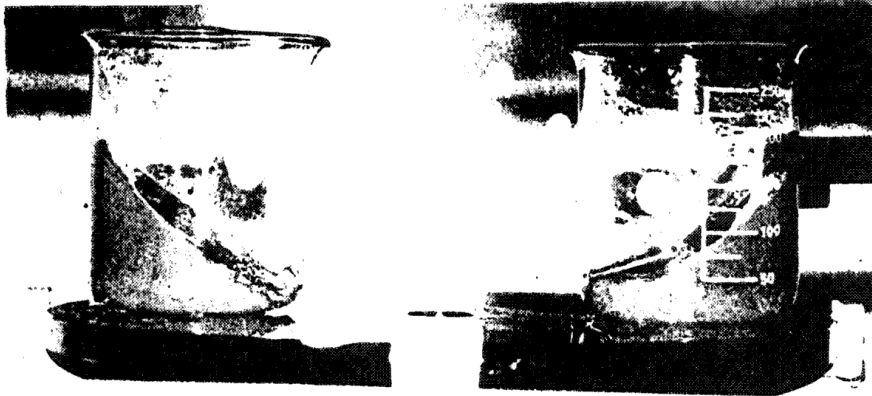
我們發現樹脂凝固後，所形成曲面深度也會隨週期不同而改變，週期愈大愈平緩，反之週期愈小曲面就愈深，由照片可觀察出。

(三) 改變容器的形狀：

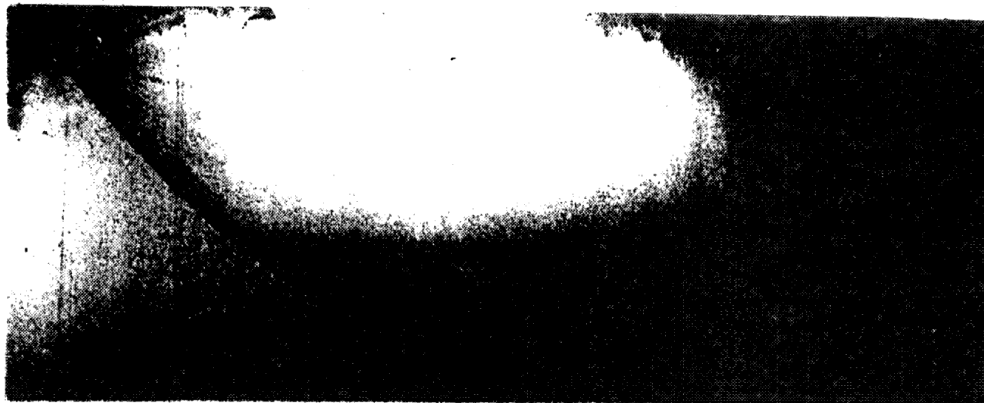
以圓形燒杯、截面分別為正方形及長方形之紙盒等不同形狀之容器進行實驗，所得之凹面與電腦繪圖的結果比對。（參考實驗(一)及(二)之結果）。

(四) 改變容器放置的位置：

1. 兩容器偏離中心。

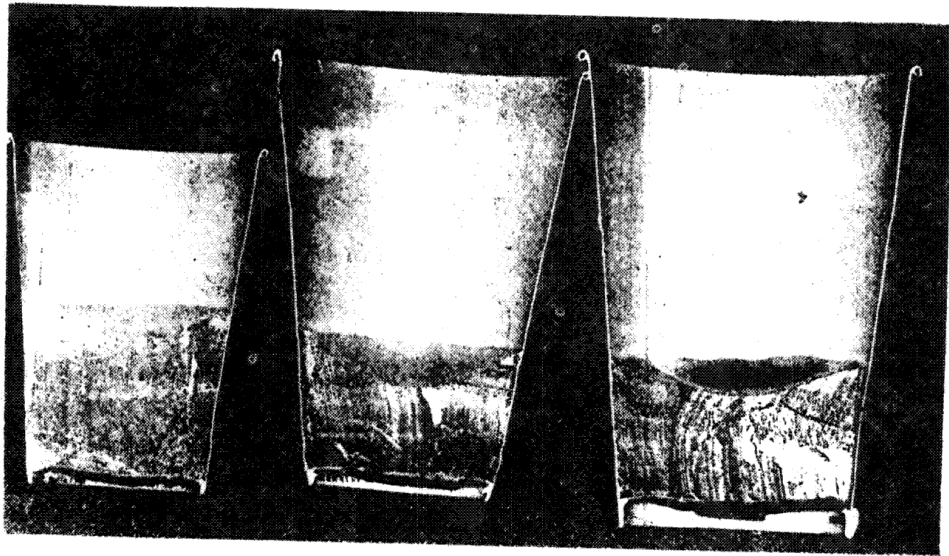


2. 直徑和兩容器相等之大容器。



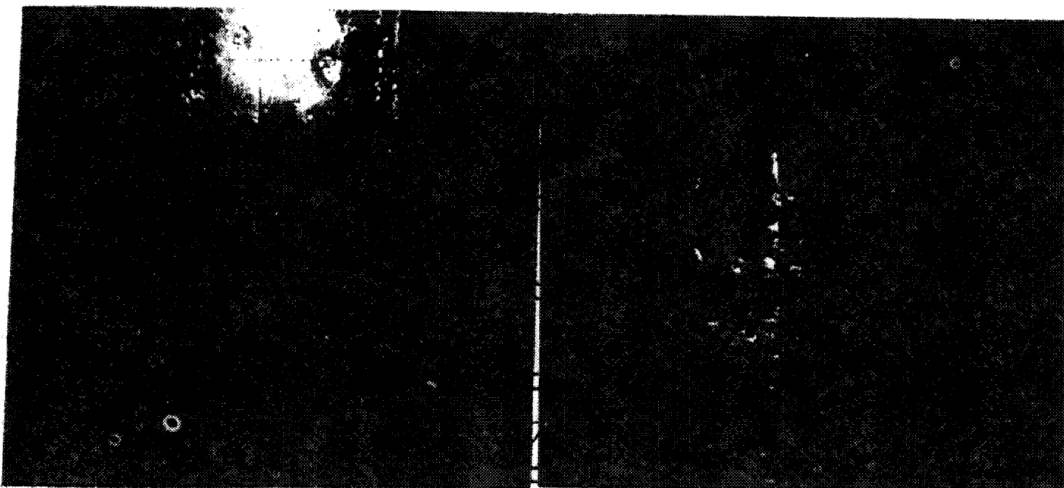
※註：因無法控制轉速相同，二曲面並非相同。

(五)改變不同半徑的圓形容器：（如下圖）

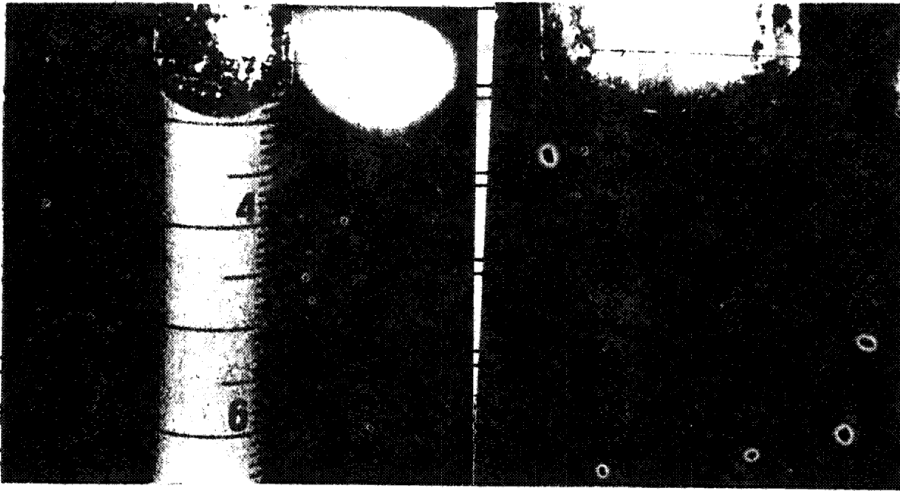


(六)高速旋轉下曲面之現象：

1. 相同的容器半徑，不等高度液體：



2. 改變容器的半徑，固定同高度的液體：



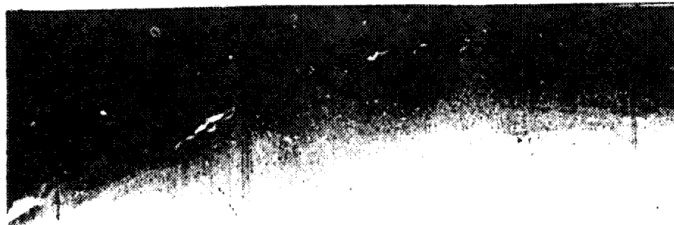
3. 改變容器的材質：作實驗(二)與(三)時，已分別以玻璃和塑膠的容器進行實驗。

(七) 轉速由快至慢或由慢至快曲面形成的探討：

1. 轉速由快至慢至一定轉速：



2. 轉速由靜止至快至一定轉速：



將兩組結果作對照比較，發現轉速由靜止而快至一定速度的樣品，其邊緣呈現下凹的現象；而轉速由快至慢至一定轉速的樣品，其邊緣的曲面較符合拋物面，如下圖。

(八)銀鏡反應：

我們嘗試用銀鏡反應鍍一層膜至樹脂所形成的拋物面上形成一鏡面，但表面不夠粗糙，使已形成之鏡面不易附著。以致實驗失敗。

(九)焦距測量：

以薄鋁箔紙緊密貼附於以樹脂製造之凹面。因為附著其上的薄鋁箔不能完全貼附樹脂之凹面，且表面無法達成完全平滑的目的，故四條反射線並未確實交於一點，且會造成雷射光束散開。

七、實驗分析與討論

(一)材料的選擇：

1. 選擇以洋菜為材料：

(1)優點：加熱時呈液體，待其旋轉冷卻後即凝結，易於觀察曲面，符合實驗需求。

(2)缺點：加熱會再熔化，且放置一段時間後會變形，以致一些實驗無法進行，且其透明度不高。

2. 選擇以樹脂為材料：

(1)優點：待其凝固後，不會熔化且不易變形，便於鏡面製作。

(2)缺點：以環氧樹脂 A、B 劑混合，其中包附著許多氣泡，影響形成的曲面，造成不光滑。

3. 在樹脂實驗中由於環氧樹脂 A、B 劑混合時，包附了許多空氣，所以以抽真空的方式減少氣泡產生，目的為了防止表面的氣泡會影響其剖面的結果，如圖。



(二)分別以洋葉及樹脂所製作之凹面：

(1)根據結果得知其曲面的深度會隨轉速成正變，和理論推導的拋物面方程式

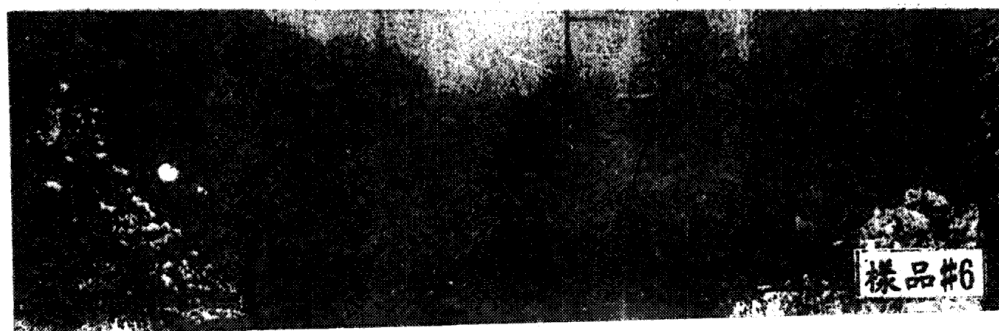
$y = \frac{w^2}{2g} r^2$ 作比較，其部分曲面符合公式 $y \propto w^2$ ，但其邊緣因考慮其附著力，所以並不完全符合。

(2)將實驗所得數據代入程式和實際曲面作比較：

a. 洋菜所得之結果：



b. 樹脂所得之結果：



※註：實際曲面和電腦所繪的圖形大致相同，但仍有一些誤差，在實驗操作過程中仍有一些疏失我們未考慮到。

1. 以洋菜和樹脂所得曲面，均可得到理論與實驗大致符合之結果。即液體的不同並非影響拋物面形成的變因，且在公式 $y = \frac{w^2}{2g} r^2$ 中並無液體密度的參數存在。
2. 洋菜及樹脂之黏滯性相差極大，但實驗所得之各樣品的凹面和電腦所繪之圖形比對後均符合，因此液體之黏滯性似非影響拋物面形成之變因。
3. 以洋菜和樹脂所測出的週期和曲面比較，發現在轉速相似時，二者的曲面近似相同，參考前述之樣品 #2 及樣品 #5。

(三)不同形狀之容器：

經觀察發現，容器形狀不同，並非影響拋物曲面形成的主要因素。

(四)容器偏離中心：

因為容器所放置的位置並非在轉盤中心處，所以其有效重力場除 $3g$ 以外，還有向心力 F_c 形成一傾斜的視重力場，所以產生的部分曲面為傾斜的拋物面；又兩個燒杯位置對稱，所以兩個部分曲面連結能形成一曲面的部分，但因其邊緣受洋菜附著力及洋菜本身之內聚力的影響，而呈凹陷的現象，不能形成一完美的拋物曲面；我們又和大容器所旋轉出的拋物曲面作比較（見實驗結果）發現其週期仍有些差距，且形成的曲面、曲度並不相同，我們推想造成此實驗的誤差可能是其容器的質量相差甚大，所以受其慣性質量的影響，造成馬達轉速不同。

(五)不同半徑之容器：

在同一水平面下，所看的部分曲面深度會隨容器半徑的增大而增加，且三個所形成的曲面，均可形成拋物面。但因邊緣受其附著力和內聚力的影響，所以在其邊緣又形成了另一層曲面，所觀察的並非單純一個拋物面。（見實驗結果）

(六)在高速旋轉下曲面呈現的現象之探討：

按理論推導，由於轉速較大，所形成的拋物面應會形成更陡的曲面。在旋轉過程中我們觀察其曲面，我們發現實驗結果並未如我們所預期的，形成更深之曲面。而由於各組實驗的轉速相差不多，故所形成的曲面差異不大。且拋物面不隨液面高低不同而改變。

(七)轉速由快至慢或由慢至快曲面形成的探討：

我們發現轉速由慢至快的樣品邊緣會有下凹的現象，是因為洋菜對燒杯壁的附着力不足，所以邊緣會下滑。而在旋轉過程中，因為邊緣的洋菜溶液較少散熱較快，所以表面凝固較快，但其內部並未全凝固。因此當轉速漸增時，內部的洋菜會擠壓表面，所以會發現邊緣呈下凹的現象。而轉速由快至慢的樣品，因為當其轉速漸慢時，其邊緣的曲面表面的洋菜已有部分凝固。因此當轉速漸減時，液面下降，已凝固的表面會貼附在燒杯壁上，對於拋物面的形成影響較小，且可看出整個曲面甚為平滑，邊緣無下凹的現象。而且洋菜的濃度愈大，現象愈明顯，因為洋菜濃度愈大，凝固速率愈快。

至於樹脂所製成的樣品則無以上所述之現象，因為其附着力較大、黏性強，且其凝固所需的時間較長，所以其邊緣就沒有下凹的現象。

由以上的結果也就解決了先前對於樣品邊緣所呈現不規則現象的疑問，我們也就可以以此結果作為製作樣品時，選擇材料的一個依據，並可針對這些現象來研究各種材料的附着力、內聚力等，對於曲面成型時的影響。

(八)鏡面的製作

我們在拋物面上鍍一層鏡面的目的，在於光學驗證，尋找拋物面的焦點。因為實驗有許多因素要考慮，在短暫有限的時間內，我們無法完成。

(九)實驗中產生的誤差討論

1. 旋轉裝置中，轉盤轉速並非十分平穩，造成全程並非等速。
2. 光電計時器計時所產生的誤差。
3. 每次溶液倒入容器的量，並非完全相同，此次實驗並未就此詳細進行討論。

八、結論與未來展望

我們試著以理論推導出的公式，分別以洋菜、樹脂為材料，改變轉速所得之結果相互對照比較，可知所形成之曲面均為拋物面。另外分別就不同容器形狀、不同半徑之容器、放置位置改變、不同材質的容器及高速旋轉來討論，觀察所得之凹面均為拋物面。但在液體與容器壁間發現一些不規則的現象，尚待更仔細地分析不同材料的附着力、內聚力等對其之影響。

若我們能改良我們的實驗，利用幾何光學加以證明，確切找出其焦點，整個實驗就更縝密了。未來我們將把研究重心放在幾何光學驗證的部分，及一些現象的更深入探討。現在傳統工業均以磨製的方法製造拋物面鏡，若我們能將此技術推展到工業上的應用，對於未來天文學的研究將更有所進展。

九、參考資料

1. 陳培堃，PK's World Watch 卡拉阿托天文台，牛頓雜誌，1996, Vol.13, No.8 158 期，P.31 ~ P.39。
2. 物理難題集萃（上册），陳秉乾等編著，凡異出版社，民國 83 年，P13 ~ P26。
3. "Fundamentals of Physics" edited by David Halliday and Robert Resnick, WILEY, 3rd edition, 1988, P.365 ~ P.369。
4. Ermanno F. Borra, "Liquid Mirrors", Scientific American, Feb. 1994, P. 50 ~ P.55。
5. 楊思廉等編著，新材料—塑膠，五洲出版社，民國 78 年，P.150 ~ P.154。
6. 國立師大科教中心主編，化學實驗手冊—第四冊，國立編譯館，民國 83 年，P.11 ~ P.16。

評語

「旋轉液體的表面會呈拋物面形狀」的結果，雖不是新的發現，但想到利用洋菜膠或樹脂膠。這些會很快變硬的液體，讓它們在旋轉中逐漸乾硬，以真實且長久性的保留下它們在旋轉中所呈現的液面形狀，則是頗具創意的想法。另外，爲了減少樹脂在變硬過程中，由於放出氣體所造成的表面不光滑現象，作者利用馬德堡半球，把轉動裝置放在球內抽真空，以增加拋物面的光滑度，這種探究原因，儘量利用手頭已有的儀器設備（加力桌、馬德堡半球…等）來解決問題的方式，是正確的科學態度及思考過程。本作品又以電腦繪出理論推導的表面形狀作實驗的驗證，亦具有相當程度的完整性，作品說明圖文並茂，相當生動，且具實用價值，故核爲高中組第一名。