

錐體的體積

高小組數學科第三名

苗栗縣信德國民小學

作者：劉均滢、李美里、李仕皓

指導教師：莊廣凱

一、研究動機

國小五年級時學到了體積的求法，印象中的體積是很死的公式：長×寬×高，本來以為祇有長方體才能求體積，但是後來學到了柱形的體積，才知道原來體積的計算不祇限於長方體，圓柱體也可以算出體積，我們現在試著用切割與組合的方法，看看能不能求出錐形的體積。

二、研究目的

- (一)定義：什麼是錐形？
- (二)找出圓錐的體積。
- (三)找出三角錐的體積。
- (四)找出錐形的體積公式。

三、研究器材

筆、尺、三角板、圓規、西卡紙、美工刀、膠水。

四、研究過程

(一)已知條件：

- 1.柱形體積=底面積×高。
- 2.各邊長縮小為1/2倍且形狀不變，則體積縮小為1/8倍。
- 3.長方形對角線切割長方形成兩塊相等的直角三角形。
- 4.三角形任兩角相等則此三角形為等腰三角形，且等腰三角形過頂點的高垂直於底邊且平分底邊。
- 5.課本的圓形面積求法。

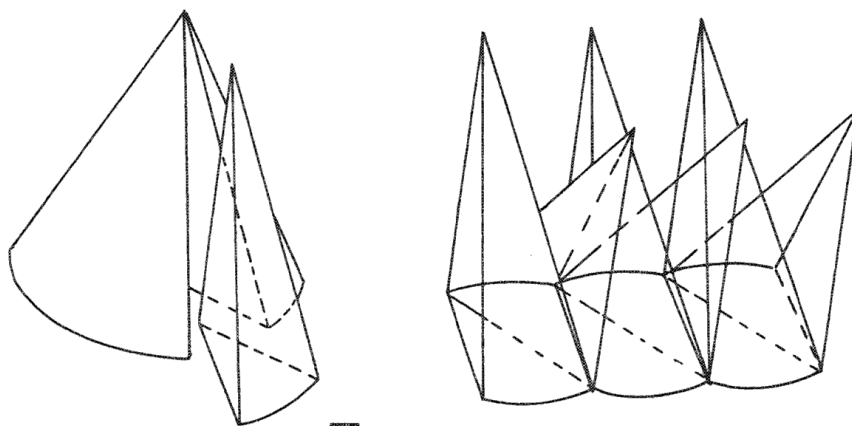
(二)我們將討論二種錐體：直立圓錐和三角錐

錐形是平面上的一個封閉圖形和平面外的一點，用直線連接所形成的形狀，平面外的一點我們稱為頂點，頂點到平面的距離我們稱為高。平面上圖形的

面積我們稱作底面積，這次我們討論的是有規劃的錐形，因為底是多邊形的錐形，可以切割成數個三角錐，所以我們這次討論的是三角錐和直立圓錐。

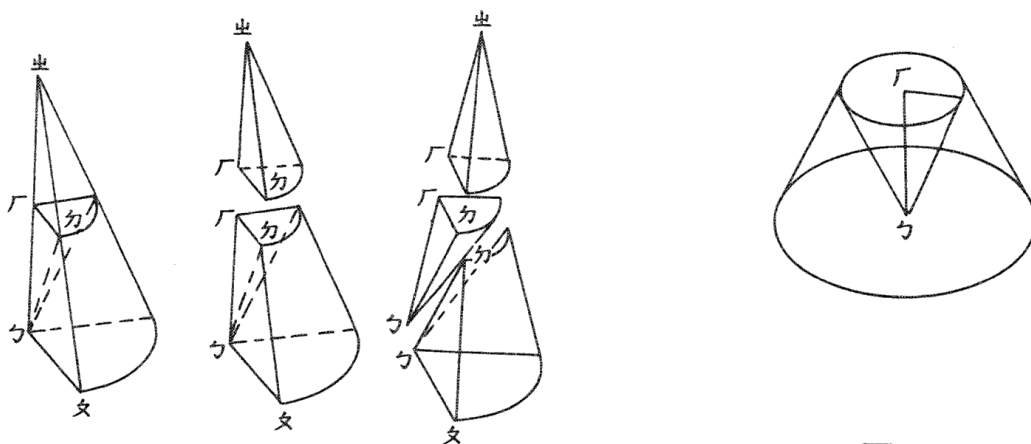
(三)直立圓錐：（以下我們簡稱為圓錐）

- 1.我們先觀察圓錐，圓錐的底是一個圓，圓心 o 和邊緣任一點 a 的連線，就是半徑（以下若無特別聲明所提到的半徑就是底的半徑，所提到的高就是指圓錐上的高），頂點 u 在圓心 o 的正上方；也就是說， uo 垂直底面上的圓，頂點到邊緣上每一點的距離都相等，所以錐形的展開圖應該是圓弧的一部份，和底面的組合。
- 2.要求圓錐的體積，我們想到數學課本第十冊的圓面積求法，就是將圓分解成相等的數個小片，再將頭尾交互顛倒橫排，分割越細，排出的形狀越像長方形，這個長方形的長為半徑 \times 圓周率，寬為半徑，所以長方形的面積是半徑 \times 半徑 $\times\pi$ 。
- 3.想要把圓錐像圓形一樣從中心向外切成數個小片、頭尾顛倒放置，是無法求出體積的，原因在於正反的兩片無法完全重疊。（如圖一）



圖一

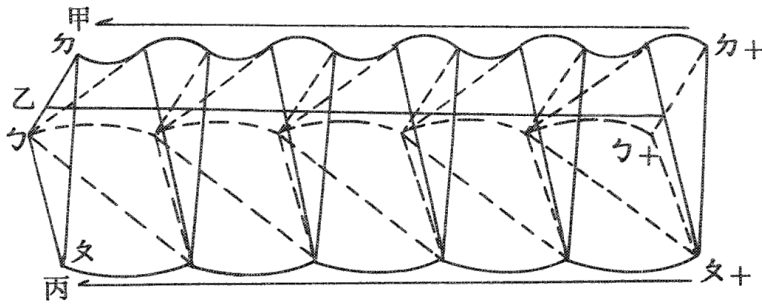
- 4.若要各小片完全重疊、我們只需要去掉圖二中的 $\triangle uoa$ 和 $\triangle uob$ 的部份。剩下的形狀，就如同圖三的火山口形。



圖二

圖三

5. 將火山口形截成數個小片，正反放置如圖四。



圖四

則乙邊的邊長 = $1/2$ 圓的周長 = 半徑 $\times \pi$ 。

圖四的圖形可以視為三角柱，底面積。

$$\triangle \text{クカ}\square = 1/2 \times (1/2 \times \text{高}) \times \text{半徑} = 1/4 \times \text{高} \times \text{半徑}$$

6. 火山口形的體積 = 圓錐的體積 - 兩個小圓錐的體積

$$= \text{圓錐的體積} - 1/4 \text{圓錐的體積}$$

$$= 3/4 \text{圓錐的體積}$$

$$3/4 \text{圓錐的體積} = 1/4 \times \text{高} \times \text{半徑} \times \text{半徑} \times \pi$$

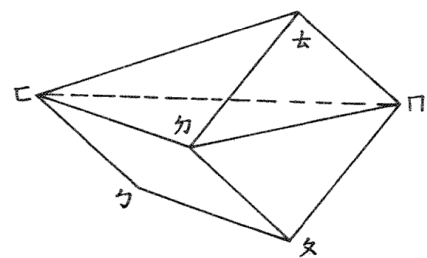
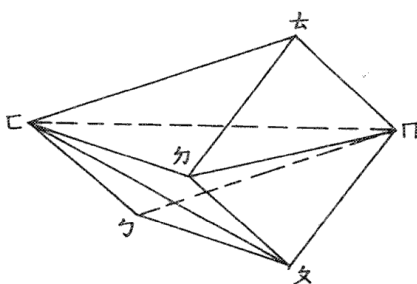
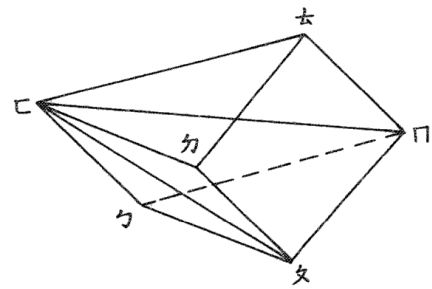
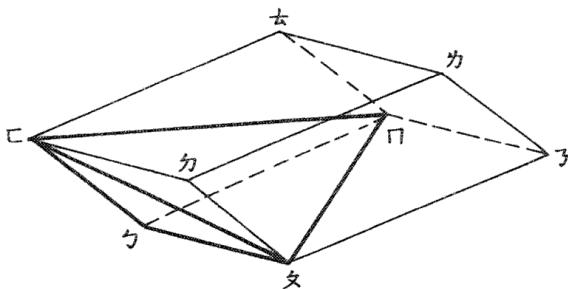
$$\text{圓錐的體積} = 1/3 \times \text{高} \times \text{底面積}$$

(四) 三角錐：我們推測三角錐的體積也是 $1/3 \times \text{高} \times \text{底面積}$ ，底下我們將證明 $1/3 \times \text{柱形體積}$ 會等於錐形體積的 $1/3$ 常數是正確的。

1. 一不規則三角錐 $\text{クカ}\square$ ，均可視為一平行六面體的一角，如圖五，在三角柱 $\text{クカ}\square \text{クカ}$ 中，可以切出三個三角錐：

$$\text{三角錐 } \text{クカ}\square + \text{三角錐 } \text{クカ}\square + \text{三角錐 } \square \text{クカ}$$

$$= \text{三角柱 } \text{クカ}\square \text{クカ}$$



經過觀察 三角錐 $\triangle ABC$ 與三角錐 $\triangle BAC$ 同底等高。

三角錐 $\triangle ABC$ 與三角錐 $\triangle CAB$ 同底等高。

所以，在體積上，三角錐 $\triangle ABC$ ， $\triangle BAC$ ， $\triangle CAB$ 的體積相等，故三角錐的體積 $=1/3 \times$ 底面積 \times 高。

五、結 論

(一)我們為錐形下了一個定義：錐形是平面上的一個封閉圖形和平面外一點用直線連接所成的形狀。

(二)我們利用國民小學數學課本第10冊中切割一個圓來求圓面積的方法來切割圓錐，但並不成功，必須將圓錐切成一個火山口形，以求得圓錐體積為 $1/3 \times$ 底面積 \times 高。

(三)用圓錐的體積公式來推測三角錐的體積，以是一個常數 \times 底面積 \times 高，並且用切割平行六面體的方式求得這個常數也是三分之一。

(四)用以上的錐形體積公式，我們推測所有錐形體積都是 $1/3 \times$ 底面積 \times 高。

六、參考資料

國民小學數學課本第10冊。

評 語

本作品是利用割切之方式找出圓錐及三角錐的體積，本來立體的東西就比較難，以一國小學生能懂得用簡易之割切進而求出物體之體積，應為不錯之成品。