

# 我懂了！真方便！！

## 高小組數學科第三名

嘉義縣太保國民小學

作 者：楊淑雅、吳思穎、謝念圜、官宏霖

指導教師：王嘉宗、王欽哲

### 一、研究動機

每次做異分母分數的比較大小，為了求各分母的最小公倍數，又是乘，又是除，忙得不可開交，當時心裡就一直在嘀咕著：「如果有方法，只做簡單的計算，或者是一眼就能看出各個分數的大小，那該多棒呀！」

於是，就把這個心裡的想法，提出來請教老師，老師笑說：「你提出的問題很新鮮，也很有創意，照道理說，應該有比較方便的方法可以做分數的比較大小，不過也要看看使用的時機啊！問題既然提出了，那麼我們就用它來當做研究的主題吧！」於是……

### 二、研究目的

(一)對常用的分數比較方法，做一個有系統的整理。

(二)探求並設計出分數比較大小的新方式。

### 三、研究問題

(一)在什麼情形下，可以一眼就看出各分數的大小？

(二)常見的分數比較方法有那些？

(三)由常見的方法中，可導出那些特殊的分數比較法？

(四)是否有其他的分數比較方法？

### 四、研究過程與方法

(一)在什麼情形下，可以一眼就看出兩分數的大小。

設 $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$ 與 $\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$ 為兩分數，由分子與分母之間的大小比較，我們有下列兩種觀察方法：

1.本身分子與分母的大小比較

(1)如果甲>乙，丙<丁，那麼 $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}>1$ ，而且 $1>\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$ ，得 $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}>\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$ 。

(2)如果甲<乙，丙>丁，那麼 $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} < 1$ ，而且 $1 < \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$ ，得 $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} < \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$ 。

因此，可得到一個觀察規則：「假分數必大於真分數」。

## 2.兩分數分子與分子，分母與分母的大小比較

(1)甲=丙，乙=丁時， $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} = \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$

(2)甲>丙，乙=丁時， $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} > \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$

(3)甲=丙，乙<丁時， $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} > \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$

(4)甲>丙，乙<丁時， $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} > \frac{\text{丙}}{\text{乙}}$ 且 $\frac{\text{丙}}{\text{乙}} > \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$ ，得 $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} > \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$

(5)甲<丙，乙=丁時， $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} < \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$

(6)甲=丙，乙>丁時， $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} < \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$

(7)甲<丙，乙>丁時， $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} < \frac{\text{丙}}{\text{乙}}$ 且 $\frac{\text{丙}}{\text{乙}} < \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$ ，得 $\frac{\text{甲}}{\text{乙}} < \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$

(8)甲>丙，乙>丁時，則大小還沒決定

(9)甲<丙，乙<丁時，則大小還沒決定

因此，又可得到另一個觀察規則：「分子較大而分母不大，或分母較小而分子不小的分數，它的分數值較大」。

我們也可以說，有 $\frac{7}{9}$ 的機會能一下子就可以看出兩分數的大小，而只有 $\frac{2}{9}$ 的機會不能馬上看出大小。

## (二)常用的分數比較方法

我們經過搜集，整理各種分數比較大小的資料，一般常見的方法，大致有以下幾種：

### 1.通分法

利用約分或擴分的技巧，把異分母或異分子的分數化為同分母或同分子的分數，再利用觀察法比較它們的大小。

### 2.交叉相乘法

以本身的分子乘以對方的分母，所得的乘積稱為「交叉積」，而交叉積較

大的分數較大。

### 3.化小數法

將每一個分數的分子除以分母，把各分數都化為小數，再比較小數的大小，所得的結果就是原來分數的大小了。

### 4.取倒數法

將每一分數都取倒數，而比較新的分數的大小，而新分數較大的，原分數反而較小。（若分子只含質因數2或5的分數，最適合此法）。

## (三)由常用的方法中，可導出特殊的分數比較法

### 1.等增型

- (1)真分數，若分子和分母同時加上某正數，則所得的新分數比原分數大。
- (2)分子和分母相等的假分數，若分子和分母同時加上某正數，則所得的新分數等於原分數。
- (3)分子比分母大的假分數，若分子和分母同時加上某正數，則所得的新分數比原分數小。

### 2.補數型

若兩真分數，它們的值很接近1時，則可用1分別去減兩分數，然後再去比較所得的兩個差數的大小，差數較小的分數值較大。

## (四)我們設計的分數比較方法——替代法

（為了研究方便起見，我們只討論真分數的範圍）。

### 1.觀察

若  $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$ ,  $\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$  表示不同的兩分數，我們觀察  $\text{甲} > \text{丙}$ ,  $\text{乙} > \text{丁}$  時， $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}} >$

$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}, \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$  三分數的大小關係如下：

$\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}}$		$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$		$\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$
$\frac{1}{2}$	<	$\frac{3}{5}$	<	$\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	>	$\frac{5}{8}$	>	$\frac{3}{5}$
$\frac{3}{5}$	<	$\frac{8}{12}$	<	$\frac{5}{7}$
$\frac{8}{11}$	>	$\frac{25}{36}$	>	$\frac{17}{25}$

$\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}}$		$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$		$\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$
$\frac{9}{25}$	<	$\frac{22}{60}$	<	$\frac{13}{35}$
$\frac{6}{7}$	<	$\frac{15}{17}$	<	$\frac{9}{10}$
$\frac{3}{5}$	<	$\frac{10}{14}$	<	$\frac{7}{9}$
$\frac{13}{23}$	>	$\frac{35}{62}$	>	$\frac{22}{39}$

$\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}}$		$\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$		$\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$
$\frac{9}{13}$	>	$\frac{17}{28}$	>	$\frac{8}{15}$
$\frac{11}{15}$	>	$\frac{24}{37}$	>	$\frac{13}{22}$
$\frac{5}{8}$	>	$\frac{9}{15}$	>	$\frac{4}{7}$
$\frac{12}{25}$	<	$\frac{53}{105}$	<	$\frac{41}{80}$

## 2. 發現

從上表所列出的例子中，我們很明顯的看出

$$(1) \frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}} > \frac{\text{丙}}{\text{丁}} \text{ 時}, \frac{\text{甲}}{\text{乙}} > \frac{\text{丙}}{\text{丁}} \quad (2) \frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}} < \frac{\text{丙}}{\text{丁}} \text{ 時}, \frac{\text{甲}}{\text{乙}} < \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$$

既然有這樣的結果，我們心裡就有了一個想法，是不是可以用  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}}$  來

代替  $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$  去和  $\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$  做比較，而讓它們有相同的大小關係呢？於是我們更進一步的做了以下的實驗。

## 3. 實驗

(1) 準備勺，叉兩試管，勺的底面積為  $(\text{乙}-\text{丁})$  平方公分，叉的底面積為  $\text{丁}$  平方公分。

(2) 勺管裝水  $(\text{甲}-\text{丙})$  立方公分，叉管裝水  $\text{丙}$  立方公分，則勺管水高

$$\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}} \text{ 公分}, \text{ 叉管水高 } \frac{\text{丙}}{\text{丁}} \text{ 公分}.$$

(3) 兩管的總水量為  $(\text{甲}-\text{丙}) + \text{丙} = \text{甲}$  (立方公分)，且兩管的總底面積為  $(\text{乙}-\text{丁}) + \text{丁} = \text{乙}$  (平方公分)

所以將兩管的水面倒平時，它們的平均高度為用總水量去除以總底面積

$$\text{，即總平均高度} = \frac{\text{甲}}{\text{乙}} \text{ (公分).}$$

(4) 如果  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}} > \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$  時，則把勺管的水倒向叉管，使兩管的水面一樣高，

很明顯的，勺管的水面降低了，而叉管的水面升高了，所以  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}} >$

$$\frac{\text{甲}}{\text{乙}} > \frac{\text{丙}}{\text{丁}}.$$

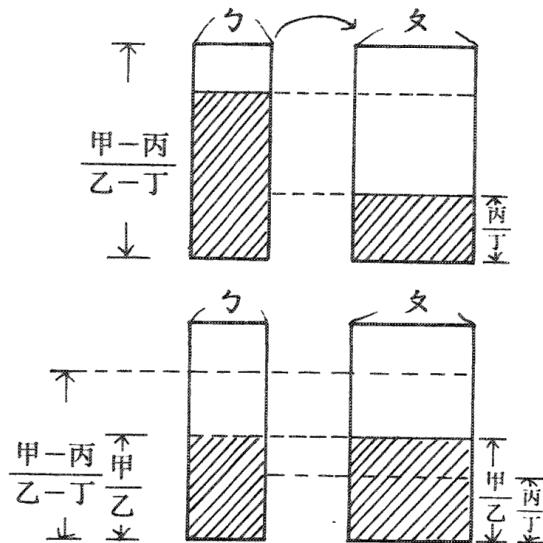
(5) 又如果  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}} < \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$  時，則把叉管的水倒向勺管，使兩管的水面有相同

的高度，那麼勺管的水面升高了，而叉管的水面降低了，所以  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}} <$

$$< \frac{\text{甲}}{\text{乙}} < \frac{\text{丙}}{\text{丁}}.$$

(6) 從以上(4)與(5)兩式中，可以知道  $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$  剛好夾在  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}}$  與  $\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$  之間，如圖

所示(以 $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}} > \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$ 為例)



U管：體積為(甲-丙)立方公分  
底面積為(乙-丁)平方公分

V管：體積為丙立方公分  
底面積為丁立方公分

平均高度  $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$  必小於  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}}$  而大於  $\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$

(7)若  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}} < \frac{\text{丙}}{\text{丁}}$ ，則將V管的水倒入U管中，使它們有一樣高的水面，

那麼可得平均高度  $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$  必大於  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}}$  而小於  $\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$ 。

因此，要比較  $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$  和  $\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$  的大小時，只要比較  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}}$  和  $\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$  的大小就可以了，換句話說，就是可以用  $\frac{\text{甲}-\text{丙}}{\text{乙}-\text{丁}}$  來代替  $\frac{\text{甲}}{\text{乙}}$  去跟  $\frac{\text{丙}}{\text{丁}}$  做比較，而所比較的大小關係是一樣的。

#### 4.方法設計

利用上面所說的代替比較方法，我們可以設計出一種分數的比較方法如下：

- (1)能用觀察法看出大小的，用觀察法做就可以了。
- (2)不能用觀察法做的，一定會有一個分數的分子和分母，都同時大於另一個分數的分子和分母。
- (3)用分子，分母都較大的分數，去減另一分數，方法是分子減分子，分母減分母，得一新分數。
- (4)比較新分數與原分數中，分子和分母較小的分數的大小。
- (5)若新分數較大，則原分數中，分子和分母較大的分數必大於分子和分母較小的分數。

(6)若新分數較小，則原分數中，分子和分母較大的分數必小於分子和分母較小的分數。

※在計算過程中，可以取該分數的等值分數，來做比較，也可以連續交互取各分數的「替代分數」來做比較，而所取的「替代分數」的分子與分母的數目字越來越小，比較起來也就越來越容易了。

### 5. 實例操作：比較下列各分數的大小

$$(1) \frac{15}{19}, \frac{18}{23}$$

$$\text{解: } \frac{18-15}{23-19} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{15}{20} < \frac{15}{19}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} < \frac{15}{19}$$

$$\Rightarrow \frac{18}{23} < \frac{15}{19}$$

(即以  $\frac{3}{4}$  替代  $\frac{18}{23}$ )

$$(2) \frac{27}{31}, \frac{79}{83}$$

$$\text{解: } \frac{79-27}{83-31} = \frac{52}{52} = 1$$

$$1 > \frac{27}{31}$$

$$\Rightarrow \frac{79}{83} > \frac{27}{31}$$

(以1替代  $\frac{79}{83}$ )

$$(3) \frac{80}{113}, \frac{26}{37}$$

$$\text{解: } \frac{26}{37} = \frac{26 \times 3}{37 \times 3} = \frac{78}{111}$$

$$\frac{80-78}{113-111} = \frac{2}{2} = 1$$

$$1 > \frac{26}{37}$$

$$\Rightarrow \frac{80}{113} > \frac{26}{37}$$

(以1替代  $\frac{80}{113}$ )

$$(4) \frac{45}{49}, \frac{87}{97}$$

$$\text{解: } \frac{45}{49} = \frac{45 \times 2}{49 \times 2} = \frac{90}{98}$$

$$\frac{90-87}{98-97} = \frac{3}{1} = 3$$

$$3 > \frac{87}{97}$$

$$\Rightarrow \frac{45}{49} > \frac{87}{97}$$

$$(5) \frac{5}{4}, \frac{19}{15}$$

$$\text{解: } \frac{19-5 \times 3}{15-4 \times 3} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{5-4}{4-3} = \frac{1}{1} = 1$$

$$1 < \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4} < \frac{19}{15}$$

$$(6) \frac{13}{21}, \frac{8}{13}$$

$$\text{解: } \frac{13-8}{21-13} = \frac{5}{8}, \frac{8-5}{13-8} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{5-3}{8-5} = \frac{2}{3}, \frac{3-2}{5-3} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{13}{21} > \frac{8}{13}$$

在以上的各例題中，果然看出「替代分數」的分子分母比原分數的分子分母迅速的縮小了很多。

尤其是替代法剛好可以彌補觀察法中，分子分母同大於或同小於另一分數的分子分母時，無法看出大小的缺失。

因此，兩種方法如果能互相配合使用，那麼分數的比較大小，就不是什麼困

難的題目了。

## 五、結論與感想

在還沒開始研究以前，本以為分數的比較大小，就只有課本裡面所說的，利用通分法把所要比較的分數化為同分母或同分子，再去比較大小。

後來，從許多的例子中，我們發現除了分子與分母同大於（或同小於）另一分數的分子與分母，此時還要再做比較以外，其他的情形都是可以一眼就看出它們的大小。由於這個發現，更增加了我們研究的信心。

在常用的分數比較方法方面，我們搜集有關資料，並一一加以實際計算，整理歸納而得通分法，交叉相乘法，化小數法，取倒數法等四種分數的比較方法。

至於特殊的分數比較研究方面，對於分子與分母的同增或同減，以及和某整數之差的關係，我們整理出等增型與補數型等兩種。

最後，在新方法的設計上，我們首先是將各分子，分母加加看，減減看，乘乘看，除除看，再一一的加以比比看，在嘗試過各種情況後，終於找到了一個規則。

「分子加分子，分母加分母，所得的新分數，剛好它的分數值夾在兩分數之間」。

用這個規則當基礎，我們設計了一套「替代分數」的比較方法，而「替代分數」的分子與分母的數字會越來越小，如此能使比較更容易進行。

分數比較大小，應該不止我們所研究的這些方法，不過我們經過了這一陣子的研討，至少我們獲得了一些如何去研究探討問題的經驗和方法，真是太值得呀！

## 六、參考資料

國小數學課本第十冊，第十二冊。

## 評 語

本作品是作者利用很簡單的法則或加、減、乘法能很快地比較出任意兩個分數的大小。雖然算不上很深的學問，但對一般的小朋友而言幫助很大。算得上是一件不錯的作品。