毛毛蟲拜年

高小組數學科第二名

台北縣興南國民小學　　作　　者：吳佩芪、呂倩儀、包秉潔、陳中澤
指導教師：張政義、蔡麗淑

一、研究動機

一天，上數學課時，老師一時興起拿了個魔術方塊給大家看，大家以爲老師要教我們玩魔術方塊的訣竅，沒想到老師卻出了難題，要我們說出在方塊上，由一點到另一點的最近路線來；並且是否可以由一點出發，不重覆的經過每一個點，不必經過每一個邊，再回到原點；我們絞盡腦汁，花了很多時間和同學討論，而在老師的指導之下做了深入的研究。

二、研究目的

㈠找出解決老師難題的方法
㈡由魔術方塊的變化探討多面體的變化和組合
㈢研究平面和立體形狀的關聯和變化

三、研究器材和設備

㈠西卡紙、尺、紙、筆、刀子、量角器、橡皮筋、牙籤、燈等。
㈡鐵絲、釘板。

四、研究過程及結果

〔研究一〕老師的問題

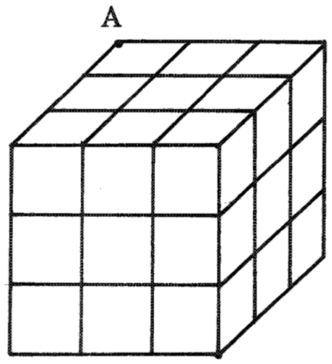
方法：就魔術方塊畫出圖來分析，並針對問題研究。

結果：㈠難題1.由A—B

條件：⑴由A—B的最短路線。
⑵點不能重覆。
⑶不必經過每一個點。

難題2.由A—A

條件：⑴由A出發，回到A點（原點）。
⑵必須經過每個點，但不能重覆。



魔術方塊圖形

⑶可以不必經過每一個邊。

㈡兩難題都和形狀及邊、點有關，應從方塊組成來加以觀察。

〔研究二〕魔術方塊有幾個面、點和邊？

方法：我們分割魔術方塊，並就分割前和分割後加以比較。

結果：

比較項目 結果 種類	點數				邊數	面數	體積	點＋邊組合方式
	頂點	面點	邊點	共計				
分割前	8	24	24	56	24×6－3×12＝108	54	27cm	
分割後	27×8＝216	0	0	216	27×12＝324	6×27＝162	27cm	

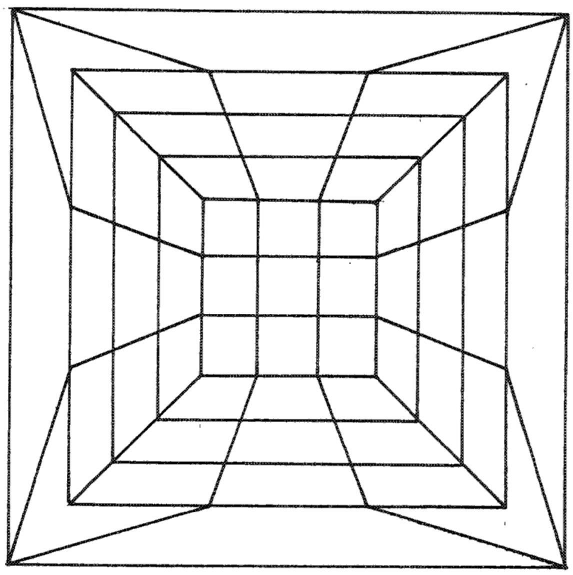
〔研究三〕魔術方塊可以看成平面嗎？

方法：分展開前，展開後（網形法）加以比較。

結果：1.由立體到平面展開後，面數減少一面，都由四個點組成一面。

2.點數、邊數組合方式種類不會改變。

3.展開形狀如右：



〔研究四〕角錐、角柱可以看成平面嗎？

方法：分展開前（立體模型），展開後（平面模型）加以比較。

結果：1.形狀可以由立體變成平面。

2.展開前、展開後點數、邊數不變，面都減1。

〔研究五〕在平面方格上，由A點到B點最近的路線怎樣？

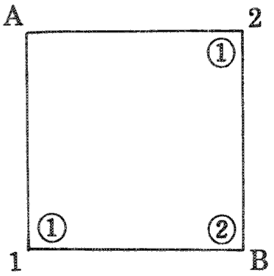
方法：畫出1、2、3、4、6、9平方的方格，並試走路線。

結果：我們發現可用累加法來算。

1.由A點到點1，有一種走法；

由A點到點2，也有一種走法，

（編號）



A點到B點有二種走法，

即1＋1＝2

2.用倒推法可以把走法完全表示出來。

3.走法路線：略。

〔研究六〕在平面方格上，由A點出發，經過每一點，不重覆，不必經過每一邊能否回到A點？有幾種走法？

方法：在紙上畫出1、2、3、4、6、9平方的方格，並試走路線。

結果：1.中間無點的圖形，走法只有二種，且這兩種方法方向相反。

2.若中間有點，則可依偶點個數判斷能否A—A。

3.偶點0個或偶數個都能A—A。

4.能A—A的走法，都呈一封閉曲線。

5.“＋”點間的組合位置不相鄰，會影響走法，無法完成。

6.走法路線：略。

〔研究七〕

方法：在紙上畫出1×1，2×2，3×3，……10×10的方格，畫出走法。

結果：1.我們發現2×2，4×4，6×6，8×8，10×10的方格，因爲偶點有奇數個，都不能符合條件。

2.能完成的方格，路線都呈一封閉曲線。

〔研究八〕一正方體由A點—B點，符合難題一條件的走法有幾種？

方法：1.我們畫出並做出模型：

①1×1×1　②1×1×2　③1×1×3

④1×1×4　⑤1×2×2　⑥2×2×2

⑦2×2×3　⑧3×3×3　的立方體。

2.用研究五發現的累加法，計算走法。

結果：1.立體形狀也能適用累加法。

2.走法：

①……… 6種　②……… 12種　③………20種

④……… 30種　⑤……… 26種　⑥………54種

⑦………102種　⑧………384種

3.路線：略。

〔研究九〕一正方體，能否符合難題二的條件，由A—A（回到原點）？

方法：1.做出1×1×1的正方體，並試走路線。

2.展開網狀研究。

結果：1.可以由A到A，走法有12種。

2.摺出的路線形狀都一樣，路線：略。

3.走法都呈一封閉曲線。

4.展開的結果，只有奇點，而無偶點，是符合條件的圖形。

〔研究十〕

方法：1.我們用研究九的方法做出：

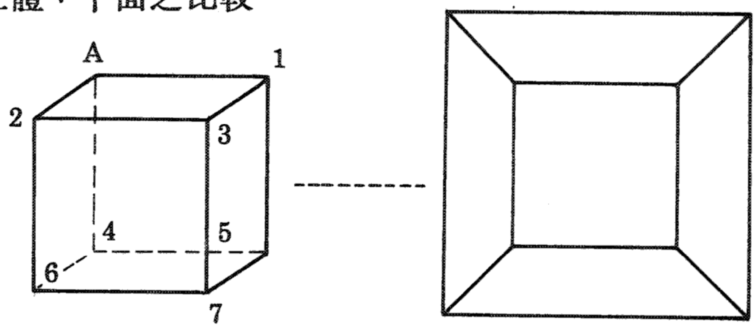
①1×1×1　②1×1×2　③1×1×3

④1×1×4　⑤1×2×2　⑥2×2×2

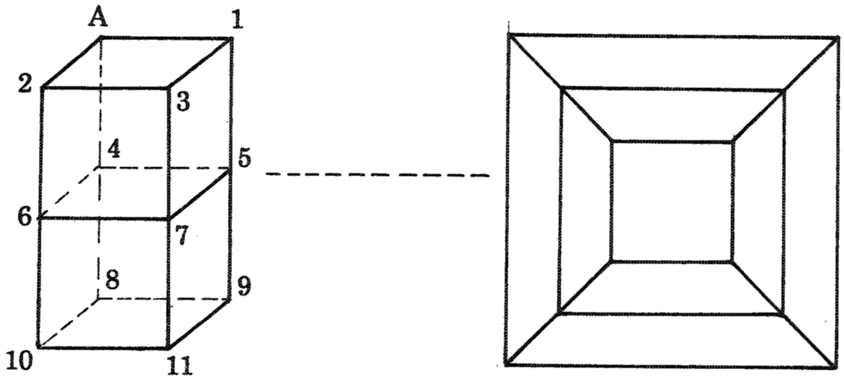
⑦2×2×3　⑧3×3×3　的立方體。

2.將模型展開網狀比較立體和平面不同。

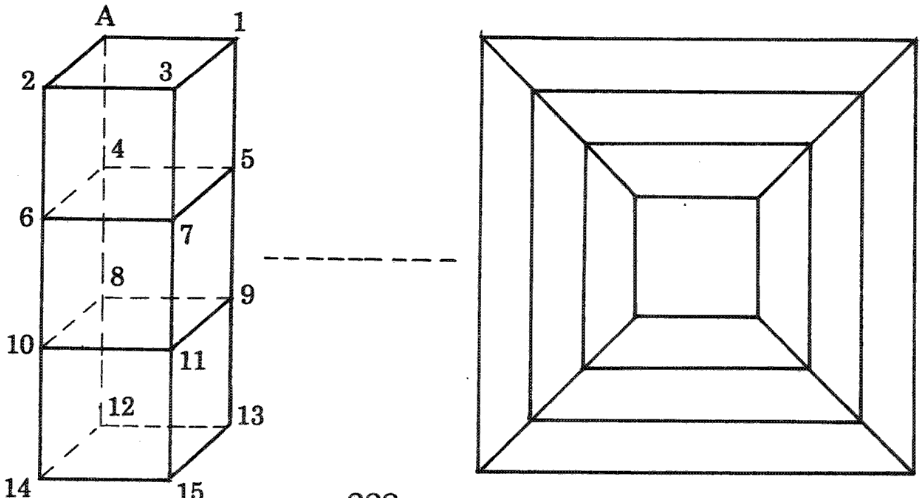
①1×1×1立體、平面之比較



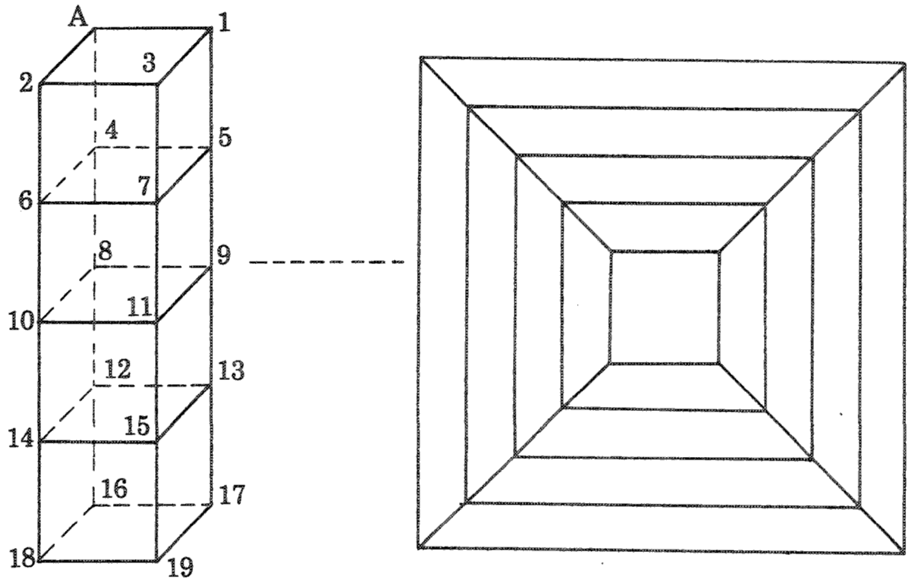
②1×1×2立體、平面之比較



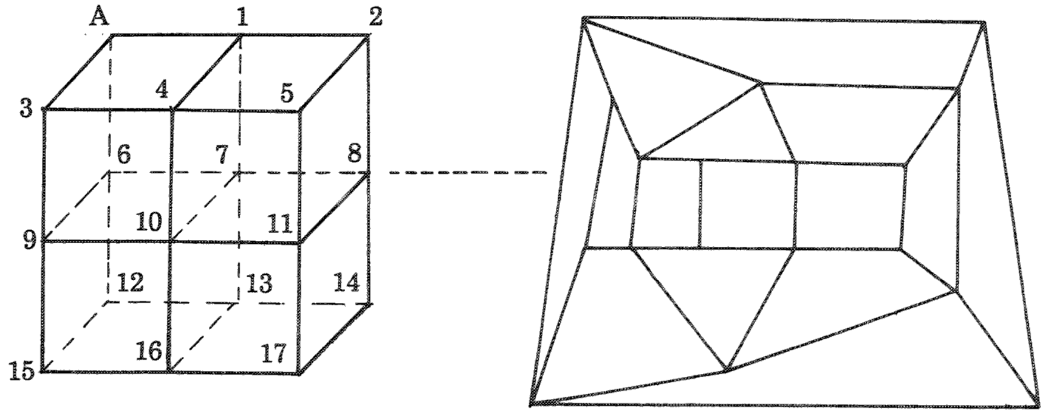
③1×1×3立體、平面之比較



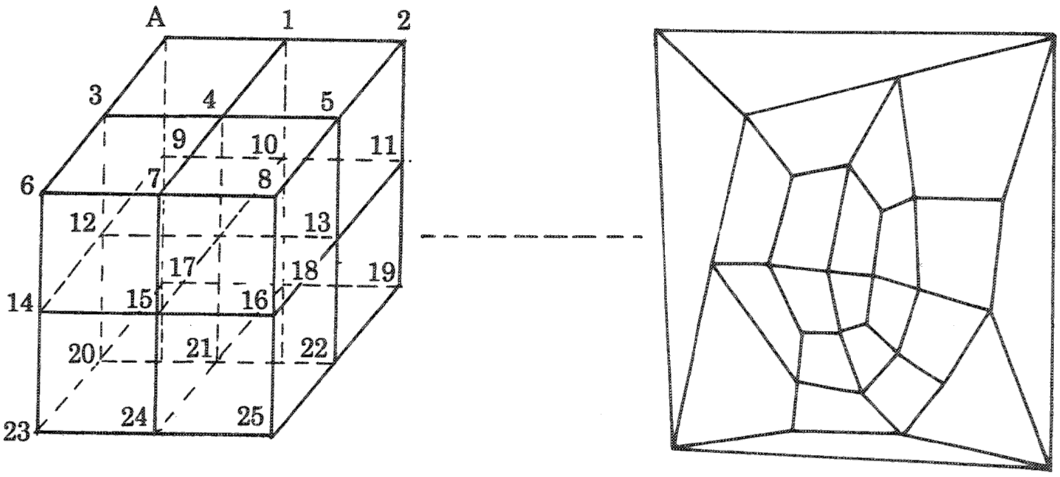
④1×1×4立體、平面之比較



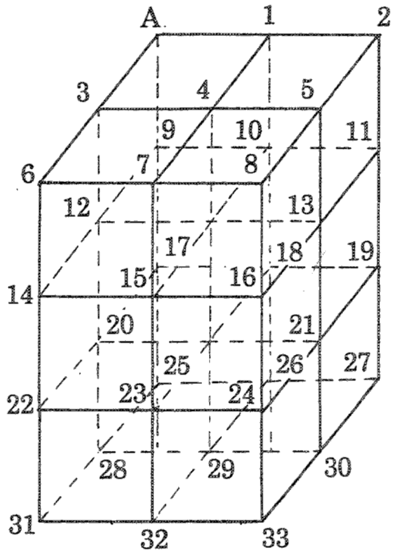
⑤1×2×2立體、平面之比較

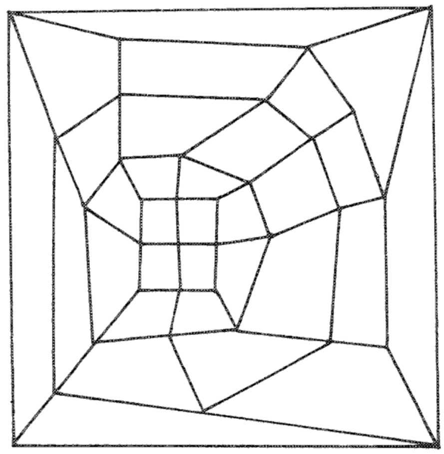


⑥2×2×2立體、平面之比較

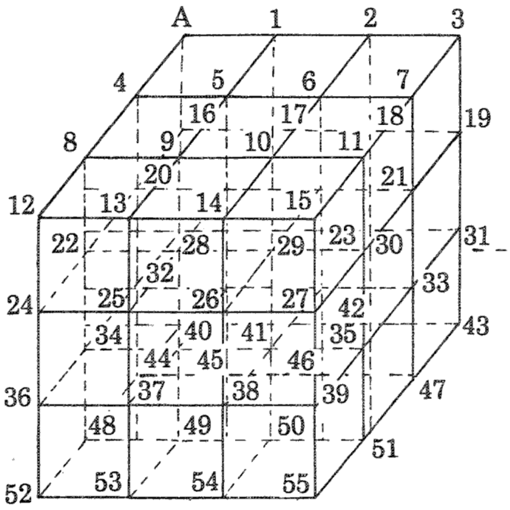


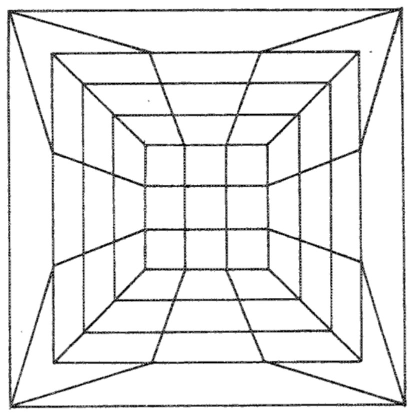
⑦2×2×3立體、平面之比較





⑧3×3×3立體、平面之比較





結果：1.依研究六、七的結果判斷，除⑥外，都能符合條件。

2.⑥的情形，我們推想：

(1)⑥的每個面的偶點均是奇數個。

(2)偶點的總點數雖有偶數個，但加上旋轉中心，仍爲奇數個，應視爲奇數個，所以無法A—A。

3.走法路線圖：略。

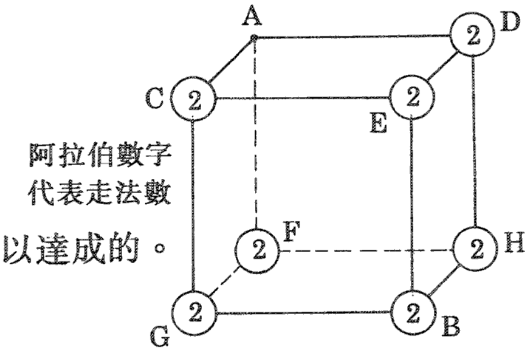
〔研究十一〕解決老師的難題。

方法：參考研究五、八，利用研究九、十。

結果：1.難題一，由A—B最短的路線有384條。

2.難題二，由A—A就魔術方法而言，是可以達成的。

3.我們可以用累乘法來計算A—A的走法。



立方體每個頂點的走法數

4.累乘法：

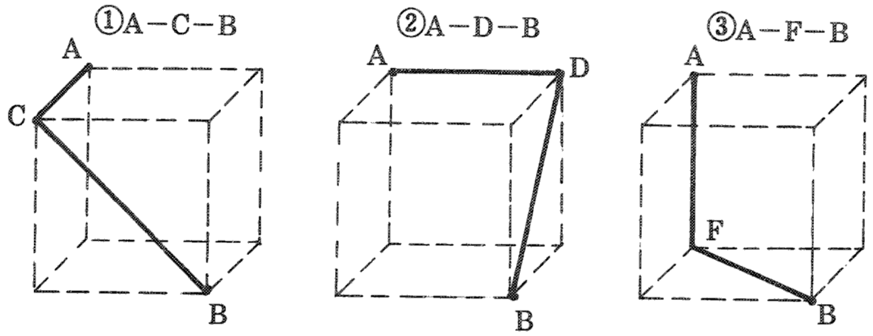
(1)我們認為走法和對稱有關而“走的頂點數＝走的邊數”且“頂點的走法數＝頂點稜數－1”

(2)A為起點，有三個稜即有三種出發走法，A—C、A—D、A—F

(3)為避免重覆計算，累乘法只乘至13點為止，即可。

(4)因為正方體是一個對稱圖形，由A—B事實上經過翻轉也可以看成B—A，因此A—B＝B—A走法相同不能重覆計算。

(5)累乘法的路線：



①＋②＋③＝12種走法，即A—A的走法有12種。

〔研究十二〕

方法一：我們設計各種不同路線圖。

結　果：都能適用累加法，求出A—B的最短路線。

方法二：1.我們做出各種正多邊形組合成各種多面體。

2.用網形法展開，觀察能否A—A。

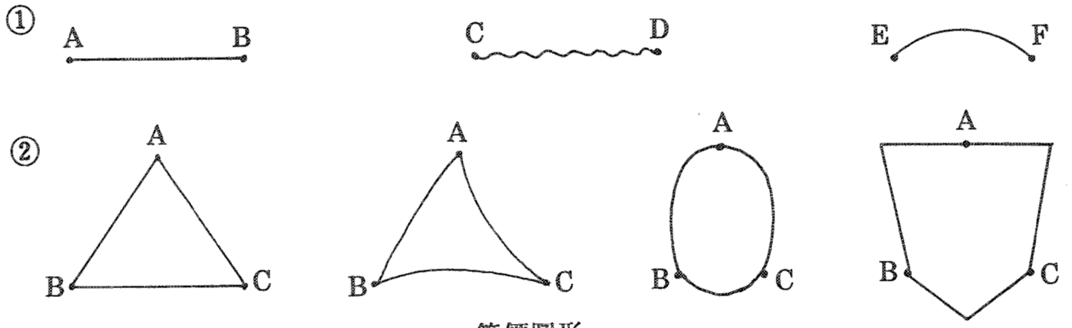
結　果：1.共找出了26種多面體，其中5種是正多面體，它們是正四面體、正方體、正八面體、正十二面體、正二十面體。

2.各多面體都能符合A—A的條件。

3.每一種走法都呈一封閉曲線。

五、討　論

(一)在展開魔術方塊的橡筋模型時，我們發現邊、面會扭曲，但觀察的結果，除面數少一外，邊、點的數不變，因此，我們認為“邊形”和“面形”並不影響我們觀察的結果，因此我們稱F圖為等價圖形。



等價圖形

㈡我們在研究中發現立體形狀展開後會少一面，及在研究十二做各種多面體時，比較“點”“邊”“面”的關係時發現。

平面→點的數＋面的數－邊的數＝1

立體→點的數＋面的數－邊的數＝2

經查閱資料，告訴我們這是尤拉定理，雖然是定理，但我們仍爲發現這結果而高興，並將此用在計算多面體的“邊、點數”上。

㈢我們認爲我們研究很有價值，用累加法找出A—B的最短路線和形狀能否由A—A（由一地回到原地），都可能用在大廈建築、水電配線、地下水道配置、立體道路的設計、鐵路、公路網的設計，乃至日後，立體太空站航路的建立，均可利用我們研究的方法加以規劃。

六、結　論

㈠各種立體形狀都能用網形法，由立體變成平面，並且“點的數”和“邊的數”不會改變。

㈡走法會受立體或平面形狀的影響，增加難度和走法。

㈢不論是立體或平面形狀，都能用累加法計算走法。

㈣不論是平面或立體都能找出A—B的路線數和A—B的路線。

㈤我們能用累加法計算任何形狀A—B的最短線數，並加以推廣應用。

㈥我們能用總點數是奇數、偶數的方法判斷能否由A—A。

㈦我們能用各種正多邊形組合成各種多面體，並且做出模型。

㈧我們發現圖㈩不能A—A，但㈨卻能A—A，我們認爲和圖㈩的“＋”與“□”相接在四邊上，而圖㈨的“＋”與“□”卻相接在四頂點有關。

七、參考資料

㈠簡明數學百科全書　陳碧真編　民國68年3月　九章出版社出版

㈡神祕有趣的數學　孫光文編　民國82年10月　凡異出版社出版

評　語

假設有一多面體相鄰頂點的稜長皆相同，從一頂點至另一頂點的最短路徑爲何，共有幾種？學生製作多面體模型，以及橡皮圈線連結成的多面體的稜網，可以展成平面來觀察。具有多方面的創意。

學生探討了多達二十餘個的稜網結構並加以記錄。雖然沒有什麼統一的理論體系，但學生的主動探索值得肯定。