正多邊形分割成三角形的分割總數及類型

高小組數學科第一名

台北市立師範學院附設實驗國民小學　　作　者：劉芯芸、蘇淑卉、馬躍峯
指導教師：蔡淑英

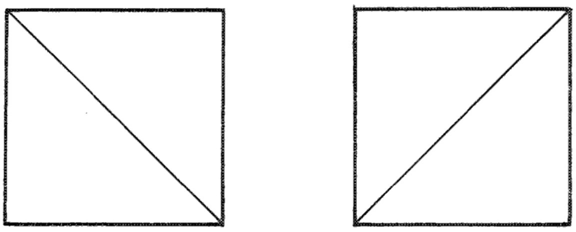
一、研究動機

五上第十一單元介紹正多邊形，並在綜合應用㈢介紹求正多邊內角和的方法。我們發現每一個正N邊形都可以被分割成N－2個三角形，因此正N邊形的內角和等於180°×（N－2）。但是分割正N邊形為三角形到底有多少種方法及類型（不同分割方法，旋轉後會相同的，我們將它們視為同一類型），我們是否能找到一些分割正多邊形成三角形的方法及類型的規律或關係呢？引發了我們的研究興趣。在老師的支持與鼓勵下，我們向正N邊形挑戰，希望能有突破性的發現。

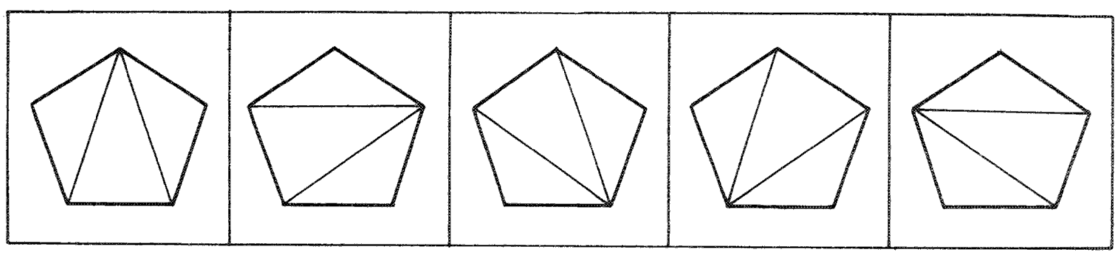
二、名詞釋義

㈠分割總數：

考慮正多邊形分割成三角形的問題，若將頂點固定，所有不同的分割方法，稱之為分割總數。正N邊形與普通N邊形的分割總數相同。正N邊形或N邊形的分割總數，以S(N)來表示。例如：正四邊形或四邊形的分割總數為二種，即S(4)＝2（如圖一）。正五邊形或五邊形的分割總數為五種，即S(5)＝5（如圖二）。



圖一　正四邊形分割總數為2



圖二　正五邊形分割總數為5

㈡分割類型：

在正多邊形分割成三角形的問題中，固定頂點時的不同分割方法，若經旋轉後會變成相同者，稱之爲同一分割類型，正N邊形的分割類型，以T(N)來表示。例如圖一中的正四邊形的二種分割方法，與圖二中的正五邊形的五種分割方法，經旋轉後均變成相同圖形，因此分割類型均只有一型，即T(4)＝1，T(5)＝1。至於一般的多邊形，其各邊不一定等長，因此我們不考慮其旋轉以後的變化。

三、研究目的

㈠研究正多邊形分割成三角形，分割類型的計算方法。
㈡研究正多邊形分割成三角形，分割總數的計算方法。
㈢探討分割類型與分割總數的關係。

四、正多邊形分割類型的計算方法

我們發現計算正N邊形分割類型時，N爲偶數與N爲奇數的計算方法略爲不同，分述如下：

㈠N爲偶數時：

步驟1：

1.由正多邊形任意一頂點，通過外接圓圓心畫對角線（直徑），將正N邊形對半分成左右兩個等大的（N÷2+1）邊形。

2.求出（N÷2+1）邊形的分割總數S（N÷2+1）。

3.令S×（N÷2+1）＝P，含有直徑的分割類型爲：

（P×P－P）÷2＋P……………………………………(1)

步驟2：

若N爲三的倍數，則含外接圓圓心的三角形必存在一個正三角形，正三角形之外有三個（N÷3+1）邊形，設其分割方法爲Q，則正N邊形在此種情況下的分割類型爲：

（Q×Q×Q－Q）÷3＋Q………………………………(2)

步驟3：

找出正N邊形內，除了前述正三角形以外，其它含有外接圓圓心的三角形類型：

正N邊形內含有外接圓圓心的三角形有下列特性：

1.最小邊至少對應三個頂點。

2.最大邊至多對應N÷2個頂點。

3.設三個邊對應頂點總數分別爲X、Y、Z，因爲三角形的三個頂點被重複計算，所以X＋Y＋Z＝N＋3。

依前述關係，用列表法可找出正N邊形內含有外接圓圓心所有的三角形類型。將正N邊形含外接圓圓心的三角形一一畫出來，我們發現正N邊形扣除含外接圓圓心的三角形以外的部分有三區，它們的邊數正好分別爲X、Y、Z。

步驟４：

針對某一含外接圓圓心的三角形，則正N邊形在此種情況下的分割類型爲：

S(X)×S(Y)×S(Z)……………………………………(3)

步驟５：

將(1)式、(2)式及重複使用(3)式分別計算各個含外接圓圓心三角形的分割類型，加以合併後，即可找出正N邊形的全部分割類型。

(二)N爲奇數時：

步驟１：

任選一頂點及其對邊，畫一含外接圓圓心的等腰三角形，該三角形將正N邊形以外的部分，分爲二區，它們均爲（N＋1）÷2邊形，設其分割方法爲P，則在此種情況下的分割類型爲：

P×P……………………………………………………(1)

步驟２：

若N爲3的倍數，則含外接圓圓心的三角形必存在一正三角形，正三角形之外有三個（N÷3＋1）邊形，設其分割方法爲Q，則正N邊形在此種情況下的分割類型爲：

（Q×Q×Q－Q）÷3＋Q……………………………(2)

步驟３：

找出正N邊形內，除了前述步驟１之等腰三角形與步驟２之正三角形以外，其他含有外接圓圓心的三角形類型：

(1)最小邊至少對應三個頂點。

(2)最大邊至多對應（N＋1）÷2個頂點。

(3)設三個邊對應頂點總數分別爲X、Y、Z，因爲三角形的三個頂點被重複計算，所以X＋Y＋Z＝N＋3。

依前述關係，用列表法可找出正N邊形內含有外接圓圓心所有的三角形類

型。將正N邊形含外接圓圓心的三角形一一畫出來，我們發現正N邊形扣除含外接圓圓心的三角形以外的部分有三區，它們的邊數正好分別爲X、Y、Z。

步驟4：

針對某一含外接圓圓心的三角形，則正N邊形在此種情況下的分割類型爲：

$$S(X)\times S(Y)\times S(Z)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

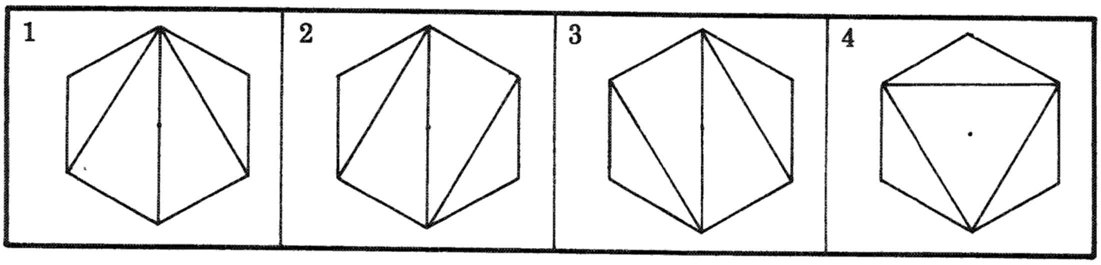
步驟5：

將(1)式、(2)式及重複使用(3)式分別計算各個含外接圓圓心三角形的分割類型，加以合併後，即可找出正N邊形的全部分割類型。

㈢實例一：正六邊形的分割類型

正六邊形的分割類型共有四型，即T(6)＝4，如圖三所示。

其中第一、二、三型均含有正六邊形外接圓的直徑，此一直徑將正六邊形分割成兩個等大的四邊形，第四型是正六邊形內有一個含正六邊形外接圓圓心的正三角形。

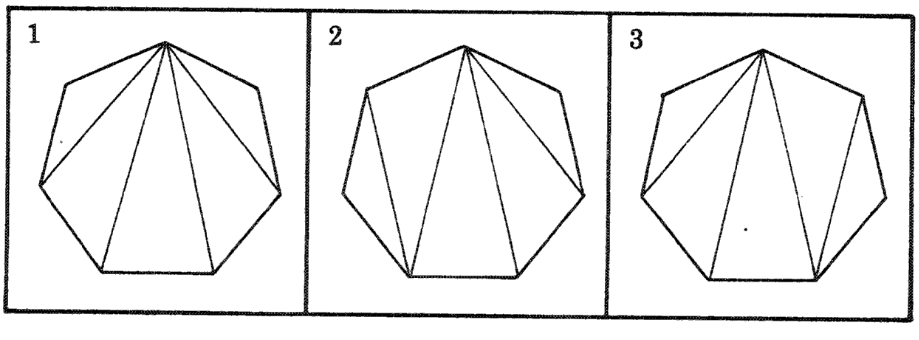


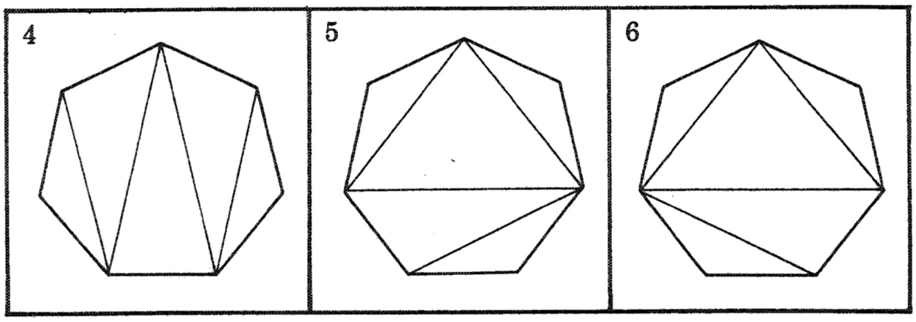
圖三　正六邊形分割類型共有四型

㈣實例二：正七邊形的分割類型

正七邊形的分割類型共有六型，即T(7)＝6，如圖四所示。

每一型均包含一個內含正七邊形外接圓圓心的等腰三角形。其中第一、二、三、四型，含圓心的等腰三角形將正七邊形以外的部分，分割成爲兩個四邊形，第五、六型在含圓心的等腰三角形以外的部分，還有兩個三角形和一個四邊形。

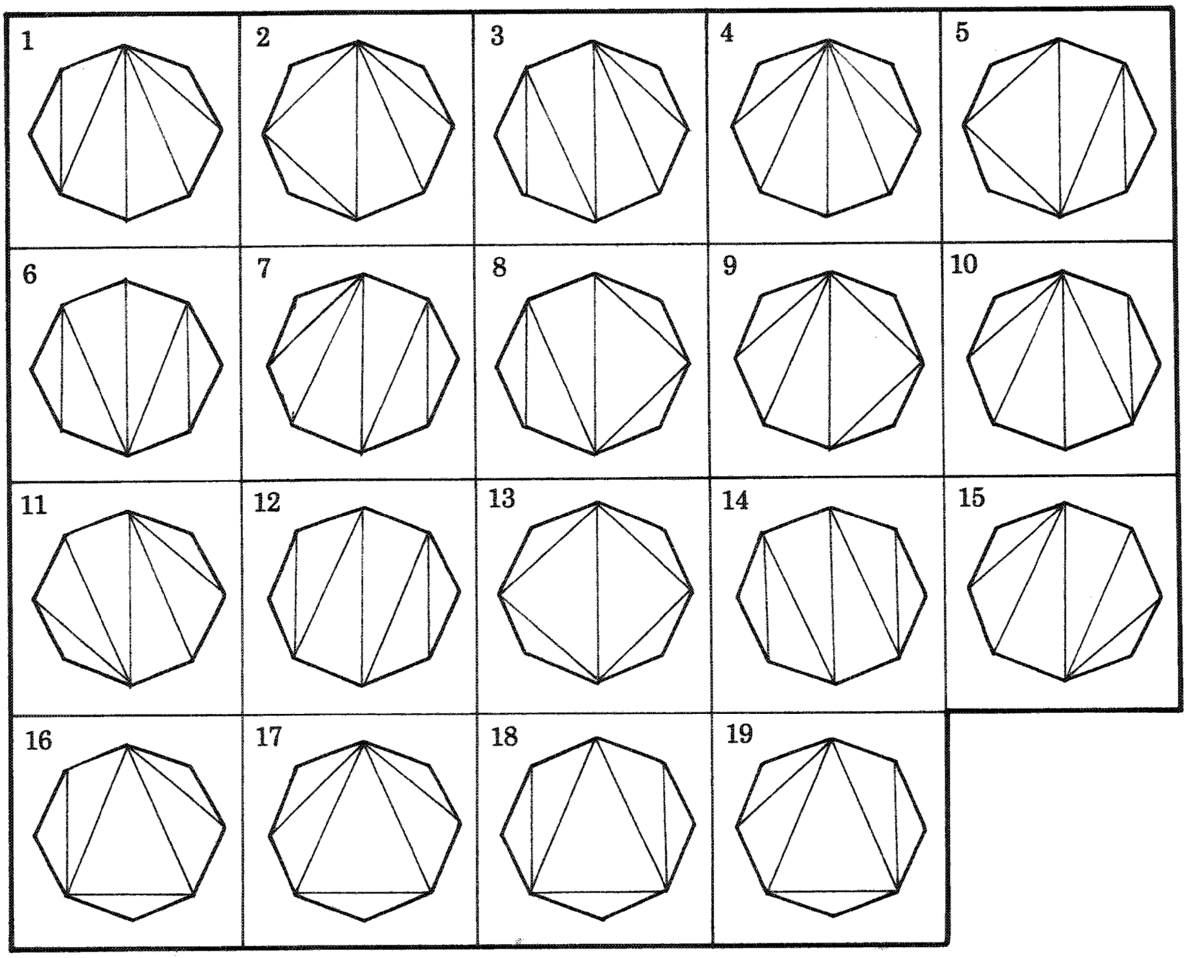




圖四　正七邊形分割類型共有六型

㈤實例三：正八邊形的分割類型

正八邊形的分割類型共有十九型，即T(8)＝19，如圖五所示。



圖五　正八邊形分割類型共有十九型

五、正多邊形分割類型的旋轉

㈠正六邊形

如圖三，正六邊形分割類型共有四型：

1.第一型每次旋轉六十度，均產生新圖形，計有六種圖形。

2.第二、三型旋轉六十度，可產生新圖形，但旋轉至一百八十度時，與原圖形相同，故各有三種圖形。

3.第四型旋轉六十度，可產生新圖形，但旋轉至一百二十度時，與原圖形相同，故合計有二種圖形。

㈡正七邊形

如圖四，正七邊形分割類型共有六型，每一型每次旋轉七分之一周角，均可產生新圖形，故每一型均有七種圖形。

㈢正八邊形

如圖五，正八邊形分割類型共有十九型。

1.第一型至第十型每次旋轉四十五度，均可產生新圖形，即各有八種圖形。

2.第十一型至第十五型旋轉四十五度，均可產生新圖形，但旋轉至一百八十度時，與原圖形相同，即各有四種圖形。

3.第十六型至第十九型每次旋轉四十五度，均可產生新圖形，即各有八種圖形。

㈣我們的發現

經由正六邊形至正九邊形分割三角形之研究，我們發現正N邊形的分割類型，有可能旋轉出N種、二分之一N種或三分之一N種不同的圖形。

1.轉出N／2種圖形的情況分析：

當N＝偶數時，其類型共有S（N÷2＋1）型。

2.轉出N／3種圖形的情況分析：

當N＝3的倍數時，其類型共有S（N÷3＋1）型。

3.轉出N種圖形的情況分析：除了前述兩種情形外，均屬這一類。

六、計算正多邊形分割總數

㈠解法分析

想要計算正多邊形的分割總數有兩種方法，第一種方法是我們自行發展出來的：先求出分割類型，再將各類型旋轉產生的不重複圖形相加。

第二種方法是引用林福來教授翻譯的「組合理論」（正中書局出版）第173至174頁：「將凸（N＋2）多邊形分成三角形，使這些三角形的邊在此多邊形的內部不相交的分法共有多少」？經我們計算後，我們所發展出來的分割類型搜尋方式，正可以在第二種方法中獲得支持。因爲多邊形的分割總數與

正多邊形的分割總數相同，而我們用第一種方法所計算出來的分割總數也和第二種方法計算出來的多邊形分割總數相同。

㈡實例～正六邊形

1.方法一：

將四型旋轉產生的不重複圖形相加，$6+3\times2+2=14$。

可知正六邊形的分割總數爲14種，即$S(6)=14$。

2.方法二：

$$\phi(4)=\phi(0)\phi(3)+\phi(1)\phi(2)+\phi(2)\phi(1)+\phi(3)\phi(0)$$
$$=1\times5+1\times2+2\times1+5\times1=14$$

七、結　論

㈠關於分割總數本研究發展出一種方法，即先找出正多邊形的分割類型，再將各分割類型旋轉產生的不重複圖形相加，即可找到多邊形分割成三角形總數的方法。另外，我們在文獻中也找到一種計算多邊形分割總數的方法。以上兩者相互驗證均符合。

㈡由六、計算正多邊形分割總數，方法二可在未知分割類型的情況下，計算分割總數。由五、正多邊形分割類型的旋轉，在討論中所提到的分割類型的旋轉所建立的關係，我們可以由正N邊形分割總數逆推正N邊形的分割類型，方法如下：

令$N=n+2$，$T(N)=a+b+c$，其中

a爲可旋轉出N種不同圖形的類型數，

b爲可旋轉出二分之一N種不同圖形的類型數，若N爲偶數，

則　$b=S(N\div2+1)=\phi(N\div2-1)$

若N爲奇數，則$b=0$。

c爲可旋轉出三分之一N種不同圖形的類型數，若N爲三的倍數，則$c=S(N\div3+1)=\phi(N\div3-1)$

若N不是三的倍數，則$c=0$。

$S(N)=\phi(n)=N\bullet a+N\div2\bullet b+N\div3\bullet c$

在上式中除了a以外，$S(N)$、N、b、c均爲已知，因此

$a=[\phi(n)-N\div2\times b-N\div3\times c]\div N$

實例～由正十邊形的分割總數逆推分割類型

已知正十邊形的分割總數$S(10)=\phi(8)=1430$，

十爲偶數，$b=S(6)=\phi(4)=14$。

十不是三的倍數，c＝0。

a＝〔1430－10÷2×14〕÷10＝136，

分割類型T(10)＝a＋b＝136＋14＝150。

㈢關於正多邊形分割類型的計算方法，雖然我們找不到相關的文獻，但是我們發展出由分割總數逆推正N邊形分割類型的公式，這也是本研究最大的貢獻。

八、參考資料

㈠國民小學數學課本第九册。

㈡什麼是對稱　漢聲精選叢書第34輯。

㈢奇妙的三角形　漢聲精選叢書第15輯。

㈣組合理論（第173頁～第174頁）N. Ya. Vilenkin著　林福來譯　國立編譯主編　正中書局印行。

評　語

多邊形的相異三角形分割總數是一個很有意義的圖形論問題。學生從正多邊形出發，因對稱關係而衍出另一種類型問題。學生從五、六、七、八邊形出發，有效地給出正N邊形的總數的遞迴公式。學生研究的投入，與創造的發揮都超過普通的水準。另外，展出的呈現與版面設計也很好。