

# 泡膜角度和經濟網路

## 初小組數學科第三名

台北縣興南國民小學

作 者：姜建安、呂彥君、葉忠錡、鄭俊逸

指導教師：林天國、陳永福

### 一、研究動機

在自然課「氣泡與氣球」單元的實驗進行過程中，可以吹出很多五彩繽紛的美麗彩球。我就被彩球與泡膜的多采變化吸引住，於是我和同學利用課餘時間以不同的方式玩泡泡，發現泡泡與泡泡間可以形成很多泡膜、而在泡膜的結構中，居然有角度和網路的形成，引起了我很大的樂趣。因此藉這次數學組科展研究的好機會，幫我解開「泡泡之謎」。

### 二、研究問題

- (一) 泡膜是如何形成的？有什麼特別的地方呢？
- (二) 泡泡間有何互動關係？與網路及角度的形成有關嗎？
- (三) 「平面泡膜」與「立體泡膜」對網路有何影響？
- (四) 網路必須在立體模型中成形嗎？
- (五) 網路與角度有關嗎？
- (六) 泡泡間的角度受形狀的影響嗎？
- (七) 角度的變化會影響網路嗎？
- (八) 泡膜是以最經濟的架構形成嗎？

### 三、研究器材和設備

肥皂、塑膠板、量角器、直尺、紙、鐵絲、保麗龍球、牙籤、筆、壓克力板、銅釘、橡皮擦、透明片、手電筒、投影箱。

### 四、研究過程

- (一) 泡膜是如何形成的？有什麼特別的地方？

研究一：

- 方法：1.用各種質料及大小粗細不同的工具吹泡泡。
- 2.用相同材質但形狀不同的各式管吹泡泡。

- 結果：1.我們搜集了五種工具：紙捲，塑膠吸管，金屬筆管，玻璃管、橡皮管。
- 2.同質料大小粗細不同的工具吹泡泡，都可吹出美麗的泡泡。只是泡泡有大小的差異而已。
- 3.形狀不同的各式管吹泡泡並無多大差異。

研究二：

- 方法：1.用吸管組合成各類造型吹看看。
- 2.用鐵絲製作三、四、五、六、八角錐及角柱等立體模型，放進肥皂水中拿起觀察泡膜的成形。
- 結果：1.都呈現密密麻麻的蜂巢式泡泡。
- 2.角錐及角柱的各型體中都有泡膜產生，而在泡膜之間也穿梭著很多線條。這些線條彼此間像蜘蛛網狀般的連接著，規則而美麗。

(二)泡膜間有何互動關係：？與網路及角度的形成有關嗎？

研究三：

- 方法：1.用5公分鐵絲折成三角柱，四角柱二模型。
- 2.將三角柱、四角柱沿著柱體表面沾肥皂水進行觀察。
- 3.將整個三角柱、四角柱體浸入肥皂水中。
- 結果：1.泡膜沿表面鐵絲成型，我們歸類為「平面泡膜」。
- 2.將整個柱體全部浸入肥泉水後拿起，發現泡膜在柱體中間產生，此類泡膜我們歸類成「立體泡膜」。

研究四：

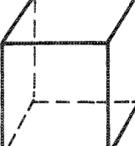
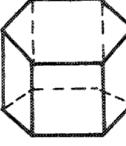
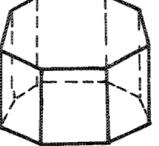
- 方法：1.準備手電筒、投影箱、模型、肥皂水。
- 2.在暗房中以手電筒照射模型，再用投影箱對準物像焦距。此時模型與泡膜就投影在投影箱的毛玻璃上。
- 3.用筆在毛玻璃上描繪泡膜網路，並用量角器量出角度。

結果：連續實測都發現Y型網路的夾角都是120度。

研究五：

- 方法：以邊長3公分、5公分、10公分鐵絲折成三角柱、四角柱、五角柱、六角柱、八角柱等立體模型，放進肥皂水中拿起觀察泡膜面數、網路及交點數。
- 結果：1.用不同大小的模型形成的泡膜形狀都一樣，只是大小不同而已。
- 2.形狀不同的模型，形成的泡膜都不一樣。
- 3.各種模型形成的泡膜面數、網路及交點數，如下表：

表6：各柱體的泡膜面數、網路及交點數

柱體形狀	三角柱	四角柱	五角柱	六角柱	八角柱
					
泡膜面數	6	9	11	13	17
網路(條)	15	24	30	36	48
交點數	8	12	15	18	24

(三)網路必須在立體模型中成形嗎？

研究六：

方法：用鐵絲折成平面型、弧度型、水波型、圖案型等各種單面模型放入肥皂水。

結果：單面模型無論何種型體都可形成泡膜，但是無法形成網路。

單面模型	泡膜	網路	說明
平面型	○	×	模型什麼形狀，泡膜就成什麼形狀。
弧度型	○	×	泡膜隨著弧度成型。
水波型	○	×	泡膜隨波浪多少和大小成形，中間成一平滑的面。
圖案型	○	×	泡膜隨圖案的造形不同而成形。

“○”會產生泡膜 “×”不會產生泡膜

“○”會產生網路 “×”不會產生網路

研究七：

方法：用鐵絲以圓形、三角形、正方形、五邊形、六邊形為基本型折成L型、T型、E型、H型等兩面或多面模型放入肥皂水中觀察。

結果：1.二面或多面模型體皆可形成泡膜與網路。

2.模型面數愈多泡膜面數愈多則網路愈多條，因此網路（條）與泡膜（面）間呈正相關。

(四)網路與角度的關係為何？

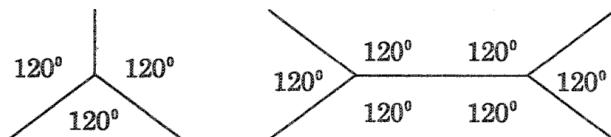
研究八：

方法：分別從前、後、上、下、左、右六個方向觀察泡膜角度與網路形成

- 結果：1.每一種模型柱體皆能形成泡膜。  
 2.愈多邊的邊型柱體形成的泡膜數量愈多也愈複雜。  
 3.泡膜間形成很多網路，每個網路的交點皆形成規則的角度。

#### 研究九：

- 方法：1.由研究八的各柱體網路線條，加以歸納分析如下：  
 2.根據網路呈Y字狀，我們以透明片製作三個夾角都為120度的Y字圖型。  
 3.將泡膜角度對準透明片的Y字圖型觀察對比。
- 結果：1.分類各柱體網路型態可區分為「基本型」與「變化型」二類。  
 2.泡膜「基本型」的夾角皆為120度。



3.泡膜「變化型」的夾角與該各邊形內角度數相同，而且相似。

#### (五) 泡泡間的角度受形狀的影響嗎？

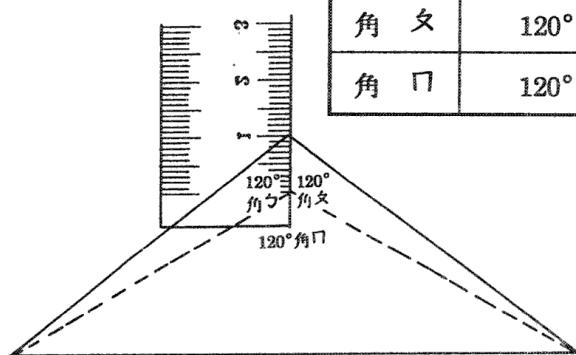
#### 研究十：

- 方法：1.製作底邊相等及雙邊逐漸加長各式等腰三角形模型五個，進行泡膜的角度及網路實測觀察。  
 2.用夾角120度Y型透明片與網路夾角做比對。

結果：雖然等腰三角形形狀逐漸改變，但是「網心」的三個圓周角仍然各保持120度，網路一直以「Y型網路」型態呈現。

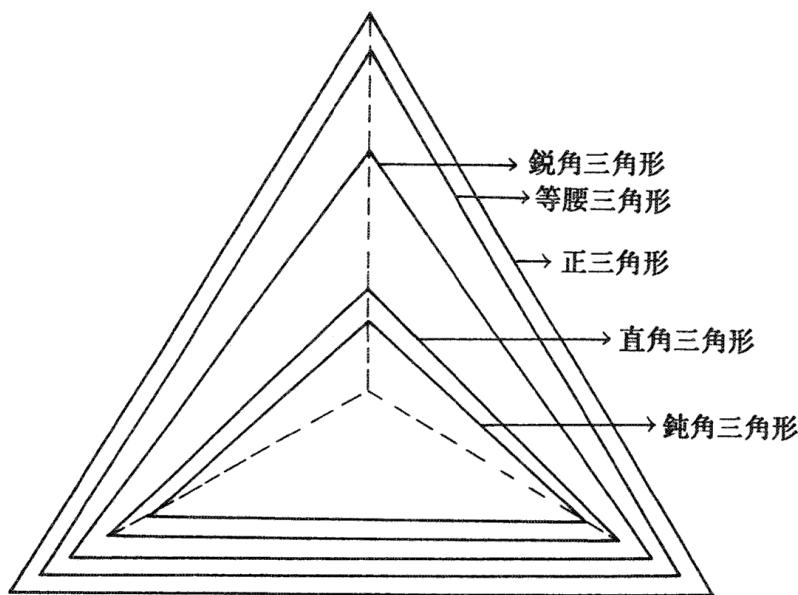
表8：三角形中泡泡的角度與形狀變化記錄表

三角形	圖一1公分	圖二2公分	圖三3公分	圖四4公分	圖五5公分
角 勾	120°	120°	120°	120°	120°
角 夷	120°	120°	120°	120°	120°
角 口	120°	120°	120°	120°	120°



### 研究十一：

方法：以「標準網路」為基礎任意連成各式三角形。



結果：發現以「標準網路」為基礎，可任意連成各式的三角形，仍保持120度的標準夾角。

### 研究十二：

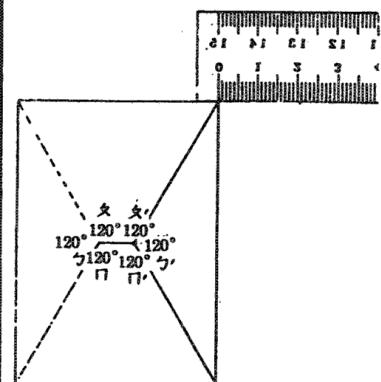
方法：1. 製作一邊固定及雙邊逐漸加長的各式四邊形、進行泡膜的角度及網路觀察。

2. 用兩張夾角120度Y型透明片與「Y-Y型網路」夾角做比對。

結果：雖然四邊形形狀逐漸改變，但是兩邊「網心」的三個圓周角仍然保持120度，網路也一直是「Y-Y型網路」。

表9：四邊形中泡泡的角度與形狀變化記錄表

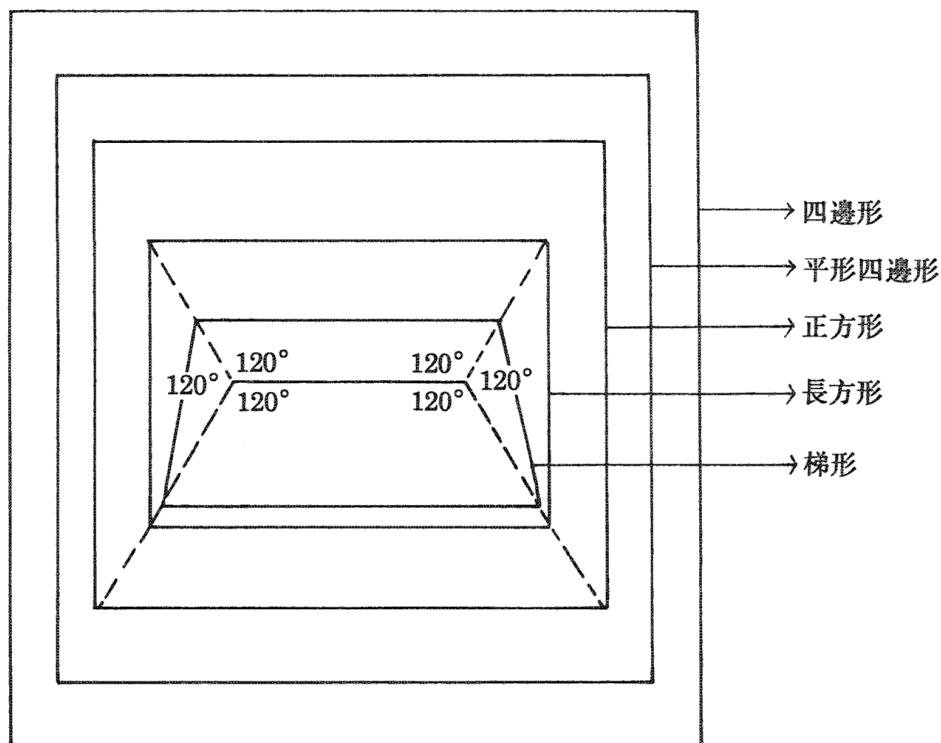
四邊形	圖一0公分	圖二1公分	圖三2公分	圖四3公分	圖五4公分
角 ㄭ	120°	120°	120°	120°	120°
角 ㄼ	120°	120°	120°	120°	120°
角 ㄇ	120°	120°	120°	120°	120°
角 ㄭ'	120°	120°	120°	120°	120°
角 ㄼ'	120°	120°	120°	120°	120°
角 ㄇ'	120°	120°	120°	120°	120°



### 研究十三：

方法：以「標準網路」為基礎任意連成各式四邊形。

結果：發現以「標準網路」為基礎，可任意連成各式四邊形，仍保持120度的標準夾角。



### (六)角度的變化會影響網路嗎？

#### 研究十四：

方法：1.以基本型「Y型網路」為基礎，製作各式三角形，並從中探討角度與網路間的變化。

2.測量「網心」形成的圓周角角ㄩ、角ㄦ、角ㄇ以及「網路」長度，並記錄於表中。

結果：在各三角形實測時，都發現在角ㄩ、角ㄦ、角ㄇ為120度時，「網路」長度最短。

等腰銳角三角形

角度與網路間的變化記錄表

ㄩ角度(度)	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	95	150	155
ㄦ角度(度)	90	95	100	105	110	115	120	125	130	135	140	95	150	155
ㄇ角度(度)	180	170	160	150	140	130	120	110	100	90	80	170	60	50
網路長度	39.3	38.4	37.7	37.4	36.9	36.8	36.4	37	36.6	38.9	38.1	38.7	41.5	44.9

※其他三角形記錄表（略）

## 研究十五：

方法：1.再以基本「Y」—「型網路」為基礎，探討在各式四邊形中角度與網路間的變化。

2.測量兩個「網心」形成的圓周角角 $\alpha$ 、角 $\beta$ 、角 $\gamma$ ，角 $\alpha'$ 、角 $\beta'$ 、角 $\gamma'$ 以及「網路」長度。

結果：在各類型四邊形中實測時「網路」長度，都是在角 $\alpha$ 、角 $\beta$ 、角 $\gamma$ ，角 $\alpha'$ 、角 $\beta'$ 、角 $\gamma'$ 為120度時，「網路」最短。

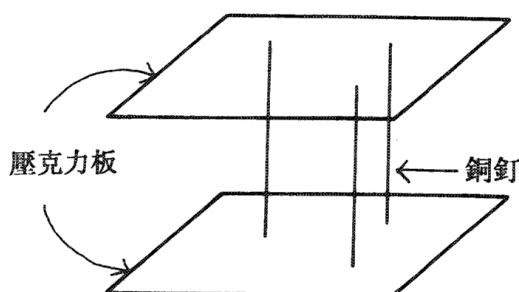
正方形 第一型 角度與網路間的變化記錄表

角 $\alpha$ 角度(度)	85	100	110	115	120	120	120	115	110
角 $\beta$ 角度(度)	110	110	110	115	117	120	125	130	140
角 $\gamma$ 角度(度)	165	150	140	130	123	120	115	115	110
角 $\alpha'$ 角度(度)	85	100	110	115	120	120	120	115	110
角 $\beta'$ 角度(度)	110	110	110	115	117	120	125	130	140
角 $\gamma'$ 角度(度)	165	150	140	130	123	120	115	115	110
網路長度	35.9	35	34.3	34	33.8	33.5	33.7	33.5	34.1

※其他四邊形記錄表(略)

(七)泡膜是以最經濟的架構形成嗎？

方法：1.用壓克力板分別以2點、3點……製作模型。



2.放入肥皂水中觀察網路成型的情況。

結果：不論是幾「點」的「壓克力板模型」，泡膜網路形成的型態，皆是基本型「Y型網路」與「Y—Y型網路」與「一型網路」，也是最短最經濟的路線。

## 五、討 論

我們國家在經濟上的發展非常的快速、每一項重要的工程都一個接一個的興

建中，如亞太營運中心、捷運、新市鎮、境外轉運站、甚至美、俄二國的太空站合作計畫。都需要最經濟（最短）的網路架構，應用到每一個城市之間的網路系統設計上。

## 六、結論

- (一) 在日常生活環境中，很多的生物體或大自然現象中，用心留意都可發覺值得效法的靈感。如蝙蝠使人類發明雷達、螃蟹大螯使人發明剪刀…等。而泡膜成型的網路，也是值得人們應用發展的啟示之一。
- (二) 每個三角形皆可找出一點「標準網心」
- (三) 「標準網心」的夾角120度不受形狀的改變而影響。
- (四) 各膜型的泡膜架構可分為「基本型」與「變化型」，觀察其細部並歸納都是以夾角120度「Y型網路」為主。
- (五) 泡泡有縮到最小的特性，任何泡膜網路其網路基本型態都以『立體泡膜』的「Y型網路」「>—<型網路」與『平面泡膜』的「一型網路」組成。不論何種型態皆是最短最經濟的網路架構。

## 七、參考資料

1. 國小自然課本4—7冊 國立編譯館
2. 國小數學課本6—7冊 國立編譯館
3. 簡明數學百科全書 九章出版社。

## 評語

本作品討論以鐵絲折成不同的角柱放進肥皂水中，泡膜間連線的形狀問題，經由實驗驗證出夾角角度為何。問題本身有趣，雖小學生無法理解其中之原理，也沒有將其中的數學部分呈現的較清楚，如何得到夾角為一固定的角也未說明，但整體而言，題材有趣，對使學生產生對數學的興趣有其貢獻。