

看誰肚量大 紙盒容量與紙板裁剪方法的研究

初小組數學科第三名

台北縣新莊市頭前國民小學

作 者：劉雅喬、曾柏翔

指導教師：張秀嫚、黃偉珉

一、研究動機

弟弟在家裡「做實驗」，他拿出一大盒方糖，說是老師規定的作業，媽媽只好讓他去「玩」。一轉眼，方糖散落滿桌，媽媽見了差點暈倒，因為紙盒已分屍了。看到媽媽生氣的樣子，弟弟也哭了，爸爸好言安慰他又請我們幫忙收拾。這時，當老師的小阿姨來了，她是有名的「金頭腦」，我們都知道：救星來了！

小阿姨拿來美勞常用的厚紙板，教我們動手做盒子，她教我們先將四個角落各剪去一個小正方形，摺起來就成一個紙盒了。「咦？怎麼姊姊的盒子看起來比我大？」我們把方糖裝進去，我的盒子確實裝的比較少，到底怎麼剪，才能摺出一個裝最多方糖的紙盒？我的心中充滿疑惑，就向小阿姨請教，她看我們都有興趣，非常高興，決定利用假期指導我們深入探討，我也邀了幾個同學一起做這個有趣的數學實驗。

二、研究目的

- (一)探討正方形的厚紙板，將四個角落各剪下一個小正方形，這個小正方形的邊長要多大，可使摺成的盒子裝最多的小積木？
- (二)探討正方形厚紙板，四個角落各剪下一個小正方形，要使摺成的盒子裝的小積木最多，這個小正方形的邊長與原正方形邊長的關係如何？
- (三)探討長方形厚紙板（長寬不等長），四個角落各剪去一個小正方形，要使摺成的盒子裝最多，這個小正方形的邊長要多大？
- (四)探討一般的長方形（長寬不等長），四個角落各剪去一個小正方形，要使摺成的盒子裝的小積木最多，這個小正方形的邊長與長方形長寬的關係如何？
- (五)探討一般長方形厚紙板四個角落各剪去一個小正方形，要使摺成的盒子裝得多，這個小正方形的邊長的估算方法。

三、研究設備與器材

- (一)厚紙板(粘貼方格紙)
- (二)小積木(邊長1公分的正方體)
- (三)計算機
- (四)剪刀
- (五)色筆

四、研究問題與方法

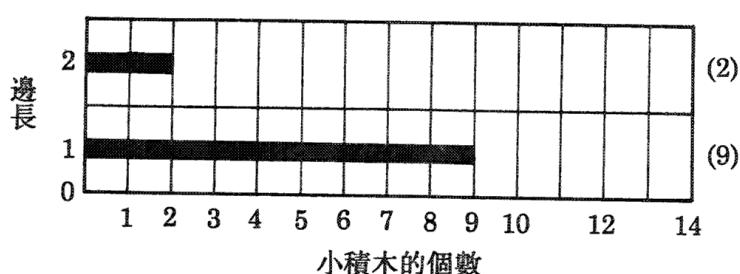
問題(一)正方形的厚紙板，將四個角落各剪下一個小正方形，這個小正方形的邊長要多大，可使摺成的盒子裝最多的小積木？

方法(一)準備十張方格紙邊長分別為5cm、7cm、9cm、10cm、13cm、15cm、17cm、20cm、24cm、25cm，再將四個角落各剪下一個小正方形，這個小正方形的邊長分別為1cm、2cm、3cm、4cm……10cm、11cm、12cm再摺成盒子，裝入小積木，算一算各裝多少個？

(二)將所得的結果製成統計圖表。

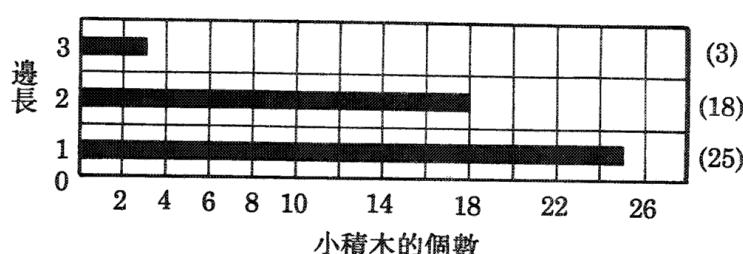
過程(一)邊長5公分的方格紙。

1.小正方形的邊長與小積木個數統計圖



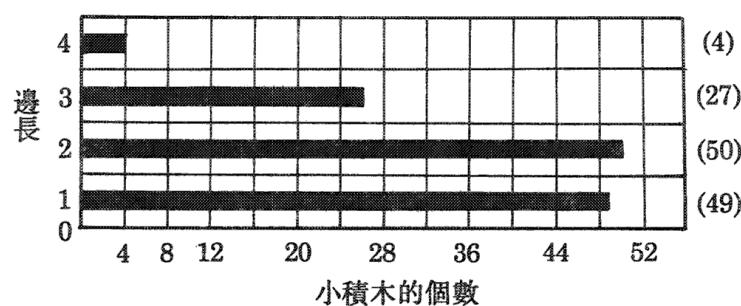
(二)邊長7公分的方格紙。

1.小正方形的邊長與小積木個數統計圖



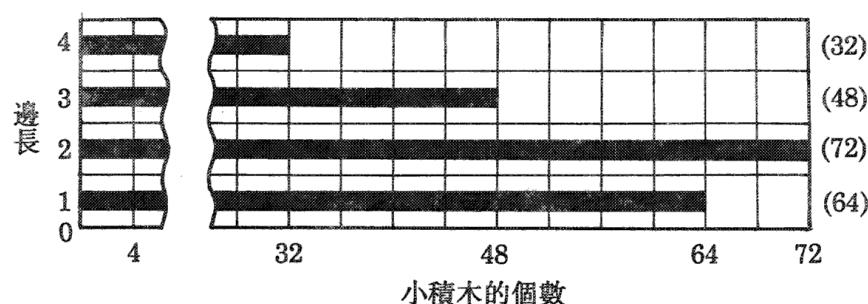
(三)邊長9公分的方格紙。

1.小正方形的邊長與小積木個數統計圖



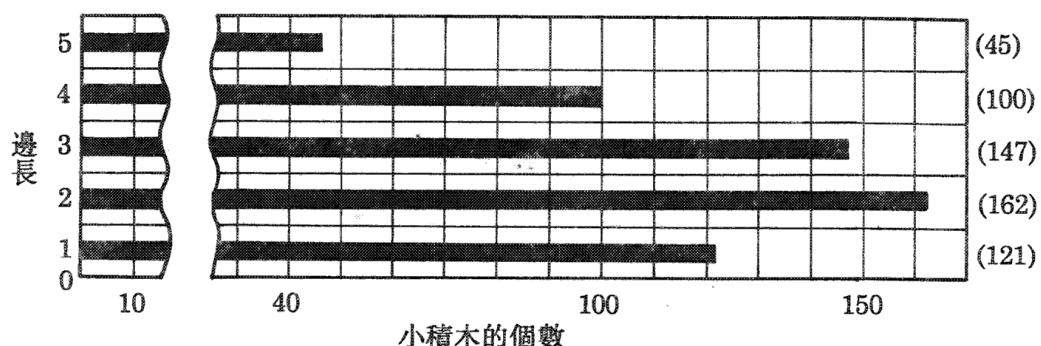
(四)邊長10公分的方格紙。

1.小正方形的邊長與小積木個數統計圖



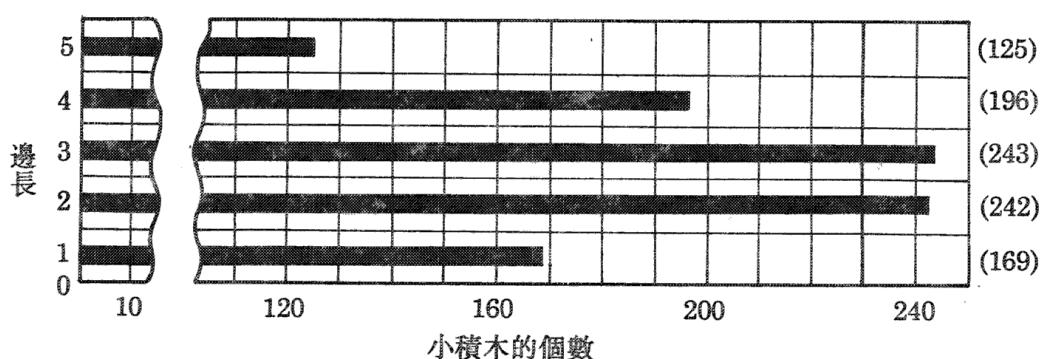
(五)邊長13公分的方格紙。

1.小正方形的邊長與小積木個數統計圖



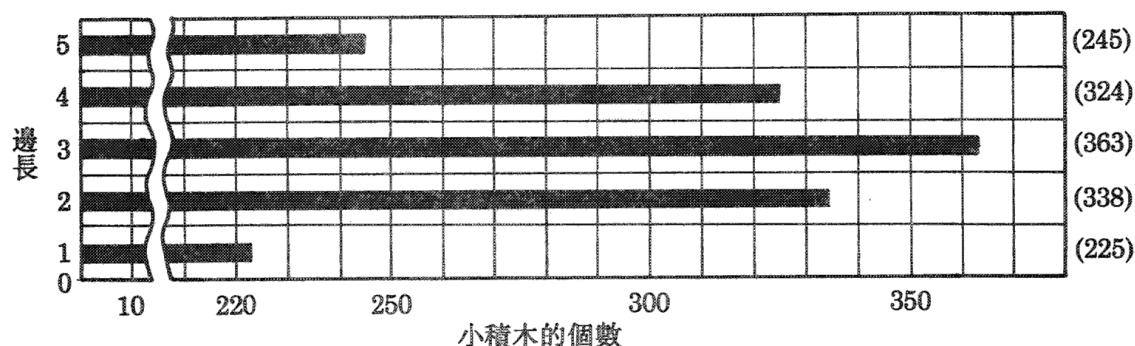
(六)邊長15公分的方格紙。

1.小正方形的邊長與小積木個數統計圖



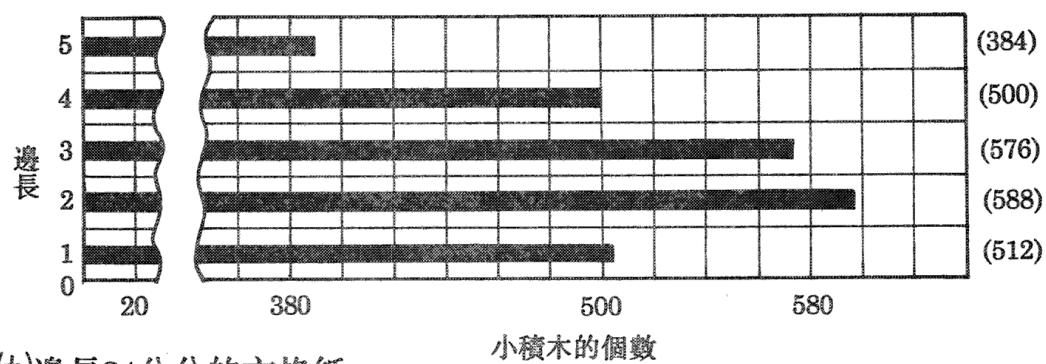
(七)邊長17公分的方格紙。

1.小正方形的邊長與小積木個數統計圖



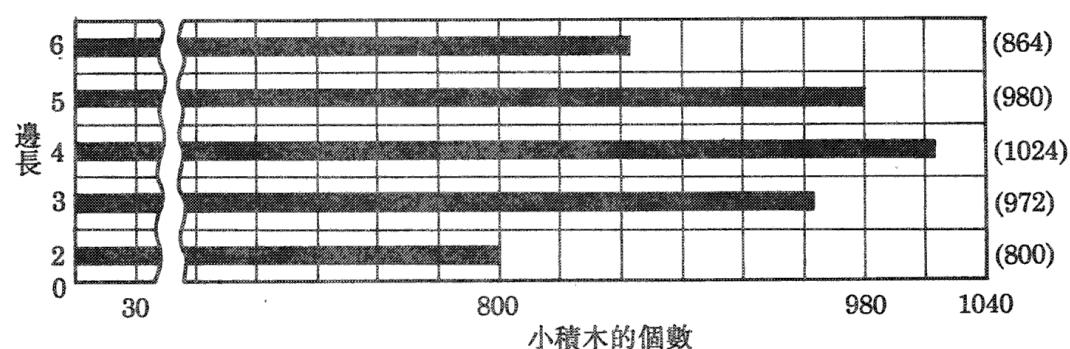
(八)邊長20公分的方格紙。

1.小正方形的邊長與小積木個數統計圖



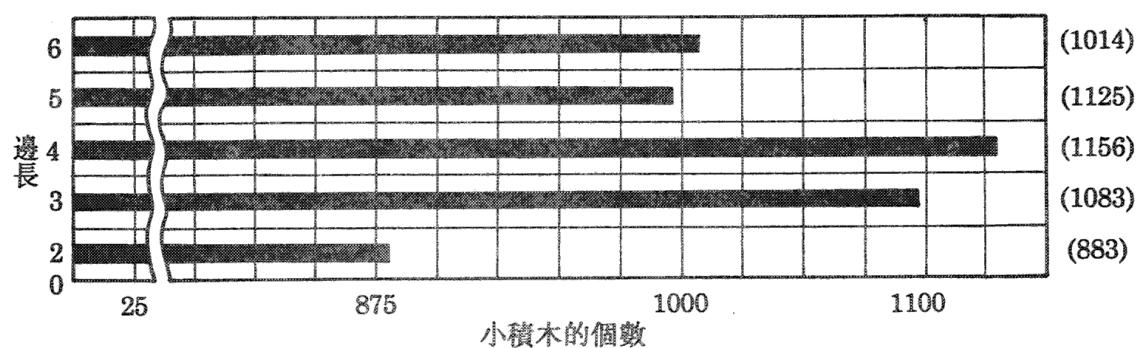
(九)邊長24公分的方格紙。

1.小正方形的邊長與小積木個數統計圖



(十)邊長25公分的方格紙。

1.小正方形的邊長與小積木個數統計圖



問題(二)正方形厚紙板，四個角落各剪下一個小正方形，要使摺成的盒子裝的小積木最多，這個小正方形的邊長與原正方形邊長的關係如何？

方法(一)歸納問題(一)之統計表，列出每個正方形的邊長與摺成可裝最多積木的盒子，剪下之小正方形邊長的關係。

(二)判讀統計表及長條圖中數據變化情形。

結果(一)歸納分析問題(一)10個統計表，列出摺出最多積木之盒子的狀況如下：

正方形厚紙板邊長	5cm	7cm	9cm	10cm	13cm	15cm	17cm	20cm	24cm	25cm
所剪小正方形邊長	1cm	1cm	2cm	2cm	2cm	3cm	3cm	3cm	4cm	4cm

(二)正方形厚紙板，四個角落所剪下之小正方形的邊長不可大於或等於紙板邊長的一半。

(三)要摺成可裝最多積木的盒子所剪下之小正方形邊長都接近紙板邊長的六分之一。

問題(三)長方形厚紙板(長寬不等長)四個角落各剪下一個小正方形，要使摺成的盒子裝的積木最多，這個小正方形的邊長要多大？

方法(一)準備10張長方形紙分別為(7×10)、(10×20)、(12×15)、(13×18)、(15×17)、(16×18)、(19×20)、(20×36)、(24×35)、(25×30)公分四個角落各剪下一個小正方形，這個小正方形的邊長分別為1公分，2公分，3公分，……7公分再摺成盒子，裝小積木，算一算各裝多少個？

(二)將所得的結果製成統計圖表。

結果：這10張長方形紙的長寬與摺成可裝最多積木的盒子時，所剪下之小正方形邊長列表如下：

長方形 長 寬	7×10	10×20	12×15	13×18	15×17	16×18	19×20	20×36	24×35	25×30
小方形 邊 長	1	2	2	2,3	3	3	3	4	5	5

問題(四)-1

長方形厚紙板(長寬不等長)，四個角落各剪去一個小正方形，要使摺成的盒子裝的小積木最多，這個小正方形的邊長與長方形長寬的關係如何？

方法(一)綜合歸納問題三之統計表，列出每個長方形短邊的長與摺成可裝最多積木的盒子所剪去之小正方形邊長的對應關係。

(二)對照問題二研究結果所列每個正方形的邊長與摺成可裝最多積木的盒子所剪下之小正方形邊長的對應關係。

(三)判讀統計表及長條圖中數據與變化的情形。

結果(一)歸納分析問題三之10個統計表，並列出摺成裝最多積木之盒子時的狀況如下：

正方形厚紙板邊長	7cm	10cm	12cm	13cm	15cm	16cm	19cm	20cm	24cm	25cm
所剪小正方形邊長	1cm	2cm	2cm	2×3	3cm	3cm	3cm	4cm	5cm	5cm

(二)對照問題二研究結果所列每個正方形的邊長與摺成可裝最多積木的盒子所剪下之小正方形邊長的對應關係，兩者不完全吻合。

(三)(13×18)的長方形，剪下邊長2cm或3cm的小正方形，都可裝最多的積木。

(四)長方形與以其短邊做邊長的正方形，要摺成裝最多積木的盒子，所剪的小正方形不盡相同，推翻了我們的假設。

(五)要摺成可裝最多積木的盒子所剪下之小正方形邊長都在短邊長的四分之一。

問題四—2

除了(13×18)的長方形，剪下邊長2cm或3cm的小正方形，都可裝最多的積木以外，其他的長方形是否也會有這種情形？為什麼？

動機：由於(13×18)的長方形，剪下邊長2cm或3cm的小正方形，都可裝最多的積木，我們大膽假設：其他的長方形應該也有這種情形，倘若假設成立，我們也想研究為什麼會有這種情形。

方法(一)依照問題四—1的研究結果1，我們固定長方形的短邊，改變長邊的長度，試著尋找剪下2種邊長的小正方形，都可裝最多的情形。

過程(一)：將找到的長方形與剪下的2種小正方形邊長列表如下：

長方形長寬	7×14	8×10	12×22	15×60	16×38	20×58	24×82	25×60
小方形邊長	1, 2	1, 2	2, 3	3, 4	3, 4	4, 5	5, 6	5, 6

(二)短邊長10cm的長方形，我們試到長邊100cm，還是只有一種，那就是：剪下邊長2cm摺成的紙盒，所裝的積木個數最多。

(三)(19×23)應剪3cm，(19×24)應剪4cm，摺成的紙盒，所裝的積木個數最多。

發現(一)剪下的“小正方形邊長”÷長方形短邊邊長並不是都小於四分之一。七分之二，十五分之四，都大於四分之一。

推理(一)『為什麼會有這種同一長方形，四個角剪下的小正方形邊長大小不同，

卻同樣裝最多積木的情形？』我們經過討論後推想：若計算紙盒真正的「最大容積」（可用小數）；而不是「裝小積木的個數」，那麼所剪“小正方形邊長”應該在那二者之間。

結果：我們請教小阿姨和指導老師，看他們經過一番「微積分」複雜無比的計算，我們佩服萬分之後，老師告訴我們，我們的推理是正確的，不過我們並不滿足，好想學「微積分」……小阿姨鼓勵我們：數學的世界，奧妙又有趣，只要我們努力，一定有學會「微積分」的一天。

五、結果和討論

- (一)長寬不等長的長方形，要摺成可裝最多積木的盒子，四個角落所剪下之小正方形的邊長，大於或等於「以短邊為邊長之正方形」所剪小正方形的邊長。
- (二)短邊13cm的長方形，長邊18cm時，剪下邊長2cm、3cm的小正方形，都可裝最多的積木，以摺成的紙盒看來：較大的底面積乘以較小的高；和較小的底面積乘以較大的高，可能會有相等的結果。
- (三)想裝最多的積木，所剪的「小正方形邊長」與「長方形的長寬」的關係到底怎樣？我們百思不解，請教指導老師，他們都表示：這用「微積分」的極值原理，就能明確了解並印證我們研究的結果。希望我們早日學會「微積分」，能自己用它解決更多的難題。
- (四)老師用微積分算出紙盒容積的極大值，告訴我們：我們的實驗精神不錯，問題(四)-2的結果，經過一番我們看不懂的計算後，老師說：那些剪下二種正方形都可裝最多積木的原因是：「極大值」就在二個小正方形邊長之間。
- (五)歸納我們試驗的結果，長方形的四角裁去四個小正方形摺成紙盒，要使所裝小積木個數最多，「小正方形邊長」不大於「長方形短邊」的四分之一；但(7×14)剪的2cm和(15×62)剪的4cm例外。這是因為我們限於積木邊長1cm是整數；老師算出的「極大值」也不大於「長方形短邊」的四分之一。

六、結論

- (一)要使摺成的盒子可裝小積木個數最多，「正方形厚紙板邊長」與「剪去小正方形的邊長」表列如下：

正方形厚紙板邊長	5cm	7cm	9cm	10cm	13cm	15cm	17cm	20cm	24cm	25cm
所剪小正方形邊長	1cm	1cm	2cm	2cm	2cm	3cm	3cm	3cm	4cm	4cm

表 —

(二)正方形的厚紙板將四個角落各剪下一個小正方形，想要使摺成的盒子裝最多的小積木，「小正方形邊長」都接近「大正方形邊長」的六分之一。

(三)要使摺成裝最多積木的紙盒，將「長方形短邊長」與「小正方形邊長」表列如下：

正方形厚紙板邊長	7cm	8cm	10cm	12cm	15cm	16cm	19cm	20cm	24cm	25cm
所剪小正方形邊長	1×2	1×2	2cm	2×3	3×4	3×4	3×4	4×5	5×6	5×6

表二

(四)對照表一與表二，我們才知道：要使摺成的盒子裝的小積木最多，「正方形厚紙板邊長」和「長方形短邊長」對於「剪去的小正方形邊長」是有差異的。

(五)長方形的厚紙板，四個角落各剪去一個小正方形，要使摺成的盒子裝的積木最多，「小正方形邊長」約為「長方形短邊長」的四分之一。

(六)觀察表二「長方形短邊長」÷「小正方形邊長」(較大值)的商約等於4(小數部份5以下捨去，超過5進入)。

(七)一般長方形厚紙板，四個角落各剪去一個小正方形，要使摺成的盒子裝的積木最多，可將「長方形短邊長」÷4(小數第一位5以下捨去，超過5進入)，就是應剪「小正方形邊長」的概數。

七、參考文獻

(一)國立編譯館(民83)，國民小學數學課本第十冊，p.104。

(二)周筱亭、陳春杏、莊仁宗(民78)，動動腦想一想第三輯，p.83~84。

(三)實驗的原始資料。

評語

本作品討論同大小的長方形紙板，如何在四角各減去一正方形，做出之無蓋長方體之容量最大。雖這是一數學上已知的問題，利用微積分的工具可輕易解出。但小學生在邊長須為整數的限制下，統計出各種可能的情況，歸納出最佳解。此為小學生可負擔的問題，由此研究過程中，注意到邊長若允許不用為整數時，可能會有更好的解，為其將來進一步學習高深的數學埋下良好動機。