

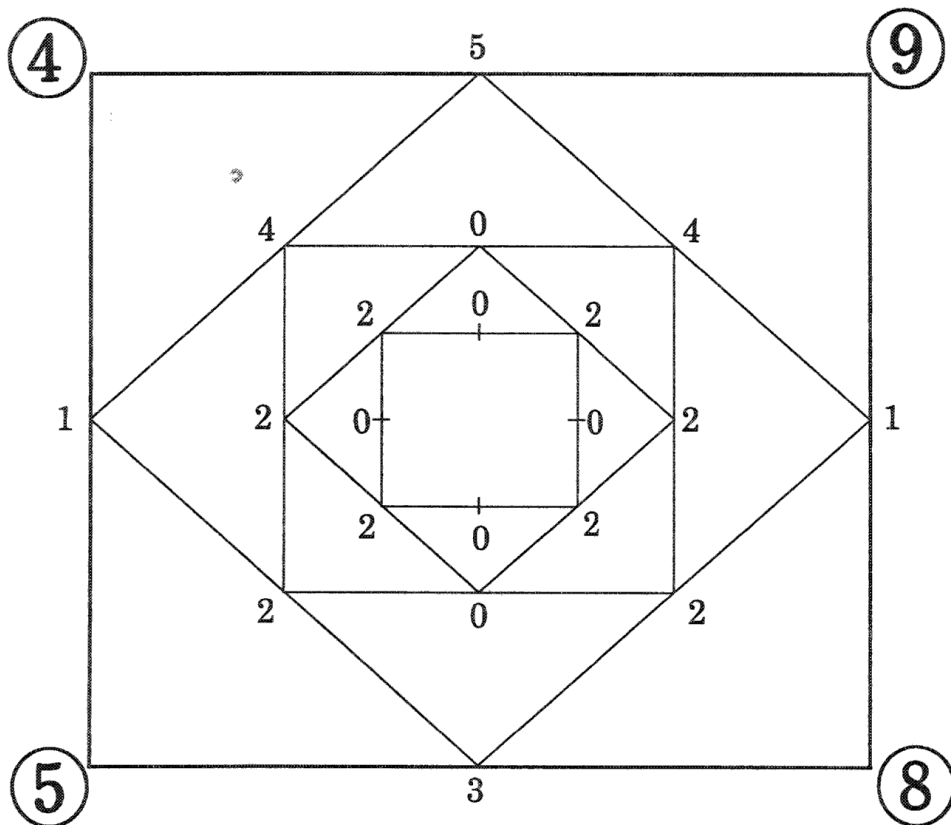
從數字方塊到數字八卦

初小組數學科第二名

台北市立師範學院附設實驗國民小學 作者：賴緯綸、林昀緯、陳昱臻、方柏翔
指導教師：蔡淑英、吳慎芬

一、研究動機

去年我們研究了「數字方塊」，數字方塊的運算規則是這樣的：「首先在一個方塊的四角各寫一個數，此數可以是零或自然數，將相鄰兩角數字的差（以大數減小數），寫在四邊的中點，然後以四個中點作為新的方塊，繼續重覆上述程序，直到最後會有一個方塊的四個中點都是零為止」。（如圖一）

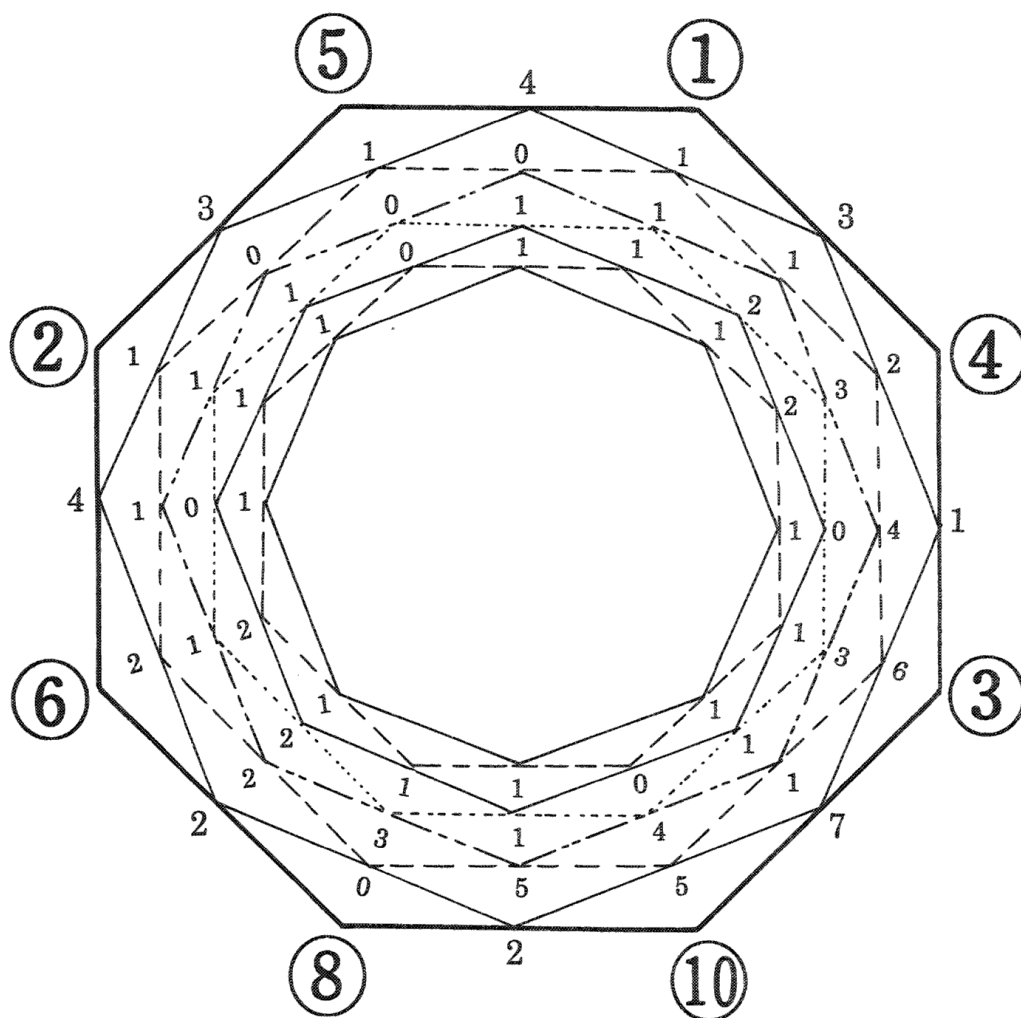


圖一 數字方塊

我們從一千多個數字方塊的運算過程中，發現了數字方塊可依奇數與偶數的分布情形區分為六個類型，而且在運算的過程中，類型與類型之間總是遵循著一定的規律在變化著。

同時，我們也發現數字方塊的遊戲規則除了適合正方形外，也適合於正八邊

形、正十六邊形、正三十二邊形等。若這個遊戲規則被運用在正八邊形上，會出現什麼有趣的數學規則呢？我們實在很好奇！我們把這樣的問題叫做「數字八卦」（如圖二）。在老師的鼓勵下，我們緊接著數字方塊的研究，向數字八卦挑戰。



圖二 數字八卦

二、研究目的

依據奇數和偶數在正八邊形頂點的分布情形，將數字八卦加以分類，若經旋轉會相同的，我們將它歸併成同一類型。

本研究我們想要探討下列事項：

(一)找出數字八卦的類型。

(二)研究數字八卦在運算過程中，類型與類型間的變化規律，即建立類型運算

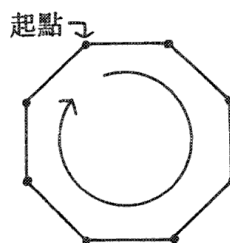
關係圖。

(三)觀察類型運算關係圖所隱藏的數學奧秘。

三、數字八卦的類型

(一)分析

- 1.為研究數字八卦的奇偶變化，我們經多次試算，結果發現可以只用1代表奇數，只用0代表偶數，來簡化問題。
- 2.首先研究八個頂點做直線排列時的奇偶分布情形：在數字八卦中任選一個頂點做為起點，然後用順時針方向依序將其他各頂點排在直線上，形成一條具有八個頂點的直線。在直線上每一個頂點可以是1（奇數），也可以是0（偶數）。把1和0擺在直線上八個頂點上的方法，共有256（二的八次方）種情形。



- 3.若將0與1在八個頂點直線排列情形視為二進數，則它們相當於十進數中的0至255。
- 4.將十進數由0至255所對應的256種排列情形依序全部都列出來，再將它們依順時針方向接起來，得到256個數字八卦，再將旋轉以後會相同的歸併為一類，即可得到數字八卦的類型。

(二)研究結果

- 1.依前述分析共找到了下列36種類型。

類型1	類型2	類型3	類型4	類型5	類型6
零奇八偶	一奇七偶	二奇六偶~1	二奇六偶~2	三奇五偶~1	二奇六偶~3
類型7	類型8	類型9	類型10	類型11	類型12
三奇五偶~2	三奇五偶~3	四奇四偶~1	二奇六偶~4	三奇五偶~4	三奇五偶~5

類型13	類型14	類型15	類型16	類型17	類型18
四奇四偶~2	三奇五偶~6	四奇四偶~3	四奇四偶~4	五奇三偶~1	三奇五偶~7
類型19	類型20	類型21	類型22	類型23	類型24
四奇四偶~5	四奇四偶~6	四奇四偶~7	五奇三偶~2	四奇四偶~8	四奇四偶~9
類型25	類型26	類型27	類型28	類型29	類型30
五奇三偶~3	五奇三偶~4	五奇三偶~5	六奇二偶~1	四奇四偶~10	五奇三偶~6
類型31	類型32	類型33	類型34	類型35	類型36
五奇三偶~7	六奇二偶~2	六奇二偶~3	六奇二偶~4	七奇一偶	八奇零偶

2.在數字八卦的36類型中，含有8種直線排列者，計30類型；一奇七偶、三奇五偶、五奇三偶、七奇一偶、所有奇數個奇數的數字八卦的各類型，都各含有8種直線排列。含有4種直線排列者，計3類型；含有2種直線排列者，計1類型；含有1種直線排列者，計2類型。

3.各類型所包含之十進數，存在著特殊的關係。即二倍或二倍減255。

4.我們發現直線排列小於8的數字八卦只有六個類型，即類型1、10

23、29、33、36等六類型。它具有下列三點特性。

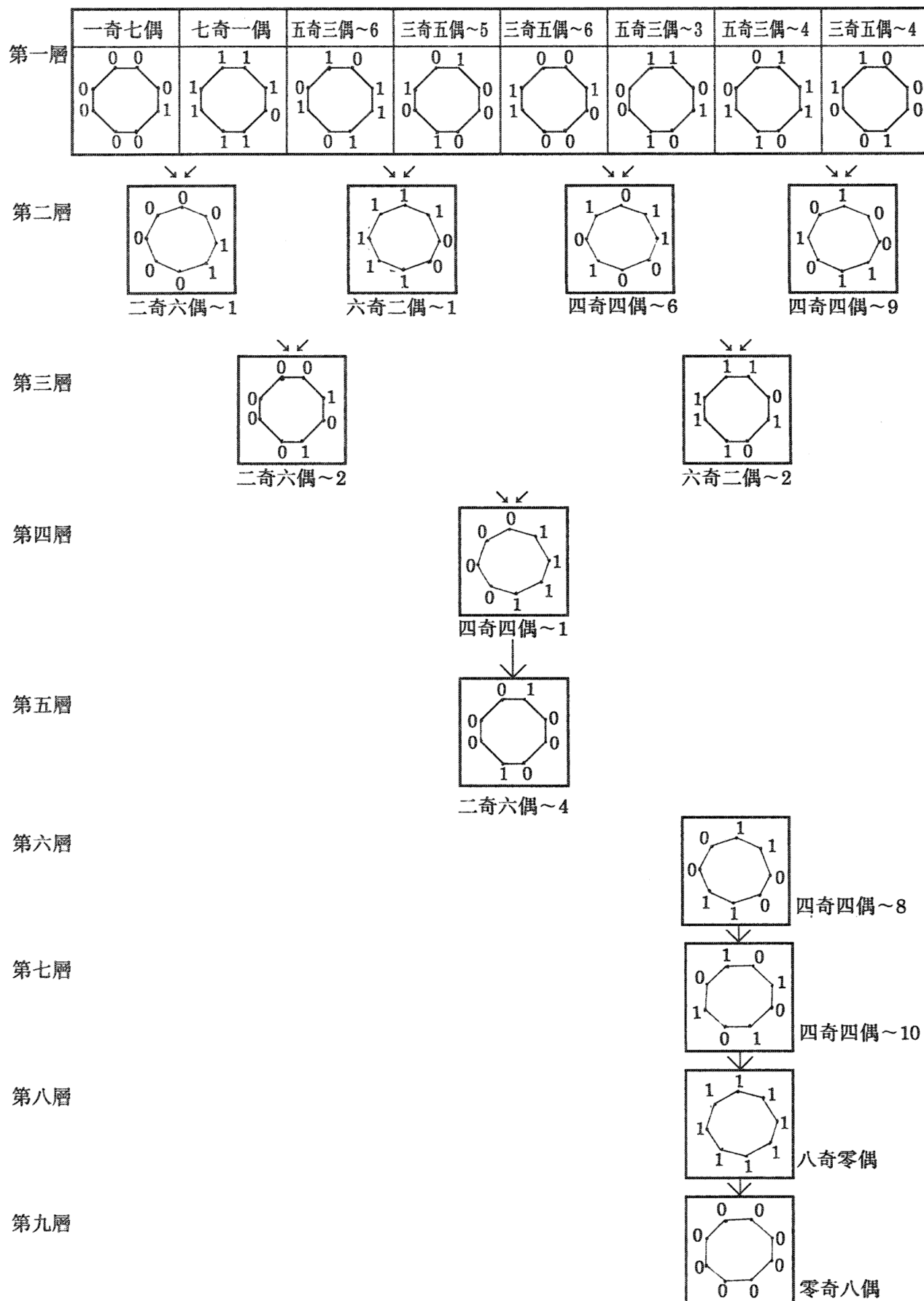
(1)前四個頂點與後四個頂點之0、1排列完全相同。

(2)只看前面四個頂點，則此六類型與數字方塊的六類型相當。

(3)此六類型所對應之的十進數均為17的倍數。

5.數字八卦的36類型中，八偶，計1類型；一奇七偶，計1類型；二奇六偶，計4類型；三奇五偶，計7類型；四奇四偶，計10類型；五奇三偶，計7類型；六奇二偶，計4類型；七奇一偶，計1類型；八奇，計1類型。

四、各類型的數字八卦運算關係圖



我們建立數字八卦在運算過程中類型與類型間的關係，將它畫成類型運算關係圖，如圖三。限於篇幅，第一層至第五層各只呈現全部類型的一半。即第一層應有16個類型，在關係圖上只畫了8個類型。

五、數字八卦各類型運算關係圖所隱藏的數學奧祕

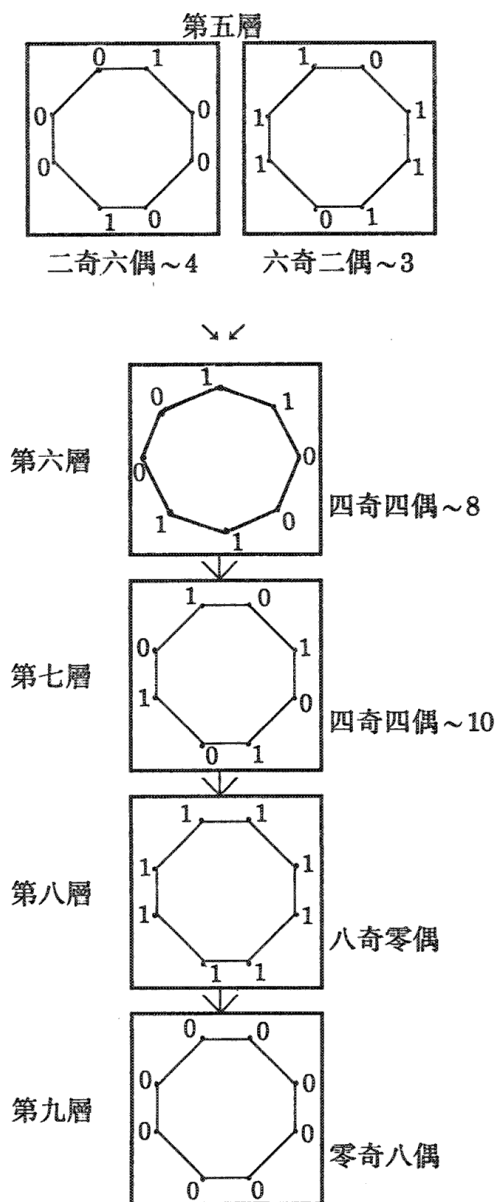
- (一)在類型運算關係圖的最上層有16類型，包括一奇七偶1型、三奇五偶7型、五奇三偶7型、七奇一偶1型，每一類型均含8種直線排列變化，合計128種，奇數個奇數的類型只出現在最上層，永遠不可能出現在經過運算以後的各層裡。128種奇數個奇數的直線排列變化，恰好是所有的256種變化的一半。
- (二)在類型運算關係圖的第一至第九層共有36類型，各層的類型個數、各類型的直線排列變化數、直線排列變化總數如下：

第n層	類型個數	各類型的直線排列變化數	直線排列變化總數
第一層	16型	8種	128種
第二層	8型	8種	64種
第三層	4型	8種	32種
第四層	2型	8種	16種
第五層	2型	4種	8種
第六層	1型	4種	4種
第七層	1型	2種	2種
第八層	1型	1種	1種
第九層	1型	1種	1種
合計：36型；直線排列變化總數256種			

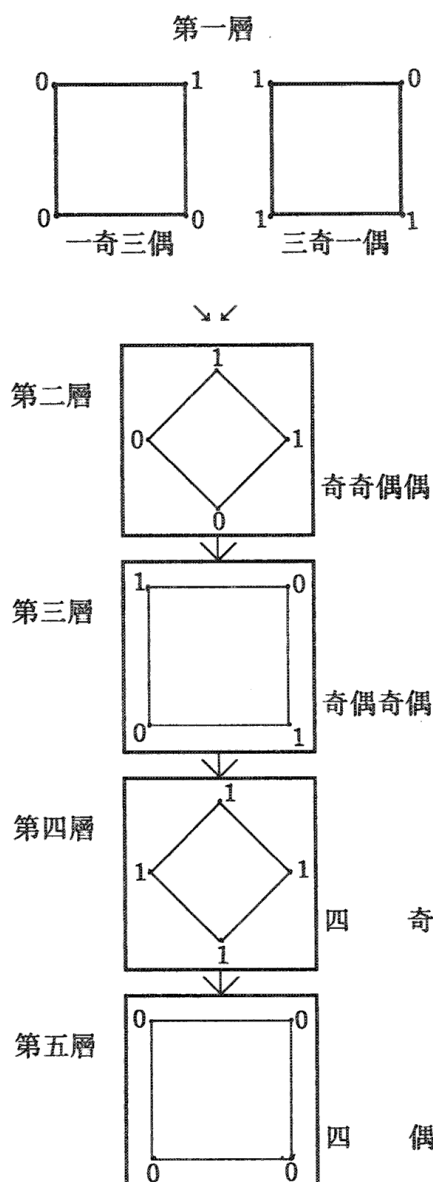
$\div 2$
 $\div 2$
 $\div 2$
 $\div 2$
 $\div 2$
 $\div 2$
 $\div 2$

- (三)在類型運算關係圖的第五至第九層共有六類型，它們是直線排列小於8種的六類型，它的特徵是前四個頂點與後四個頂點之奇偶排列方式完全相同。只看前面四個頂點，則此六類型的運算關係與數字方塊六類型運算關係相當。

數字八卦第五至第九層類型運算關係圖



數字方塊六類型運算關係圖



圖四 數字八卦第五~九層與數字方塊各類型運算關係之比較

六、推 廣

經由本研究我們找到了數字八卦所有的類型，並了解它們之間的關係，同時也發現數字八卦與數字方塊之間的關係很密切：

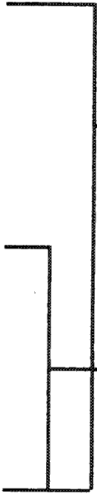
- (一)數字八卦直線排列小於8的六類型，合計共16種變化。它們的特徵為前四個頂點與後四個頂點之奇偶排列完全相同。若只看前面四個頂點，則此六類型16種變化與數字方塊的六類型16種變化相當。

(二)數字八卦中的這六類型位於類型運算關係圖的最下幾層，彼此間的關係也與數字方塊六類型運算關係相當。

(三)類型運算關係圖的層數，數字方塊有5層（ $4+1=5$ ）；數字八卦有9層（ $8+1=9$ ）。

由以上的研究，我們推論數字方塊的遊戲規則運用於正十六邊形，數字八卦的經驗將非常有用。

例如：推算正十六邊形類型運算關係圖之大致輪廓。

第 n 層	類型	各類型直線 排列變化數	變化總數		
第一層	2048類型	16種	32768種		合計4080類型 每類型直線排列有16 種變化 共有65280種變化
第二層	1024類型	16種	16384種		
第三層	512類型	16種	8192種		
第四層	256類型	16種	4096種		
第五層	128類型	16種	2048種		
第六層	64類型	16種	1024種		
第七層	32類型	16種	512種		
第八層	16類型	16種	256種		
第九層	16類型	8種	128種		合計36類型 每類型直線排列變化 同數字八卦 共有256種變化 合計6類型 每類型直線排列變化 同數字方塊 共有16種變化
第十層	8類型	8種	64種		
第十一層	4類型	8種	32種		
第十二層	2類型	8種	16種		
第十三層	2類型	4種	8種		
第十四層	1類型	4種	4種		
第十五層	1類型	2種	2種		
第十六層	1類型	1種	1種		
第十七層	1類型	1種	1種		

評 語

本作品研究正八、十六、三十二邊形各角數字相減之變化情形。此作品推廣去年所作四邊形的問題，將各種可能的情況均做完整的討論，學生能從研究過程中，學會分類、歸納法，並因而了解數字的特性。