錐體的堆積與切割

國中組數學科第三名

台南市南寧國民中學

作　　者：林鼎傑、黃俊銘、葉秀娟、林櫶婷

指導教師：林炎銘

一、研究動機

第一冊習作介紹了$N^2=1+2+3+4\cdots+N+(N-1)+\cdots+3+2+1$，老師藉由圖形面積法，幫助我們更了解其原由，引發我們繼續研究的興趣

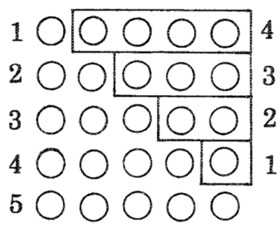
二、研究目的

深入探討這些堆垛情形，以滿足我們的好奇心　更希望數學是生動有趣的！

三、研究過程

老師的方法是藉由右圖之排列得到：

$1+2+3+4+5+4+3+2+1=5^2$　⇒

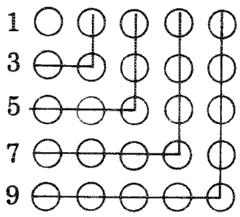


N^2它還有另一種表示法如下：

$1+3+5+\cdots+(2N-1)=N^2$

其也有面積圖示法排列如下：

取$N=5$

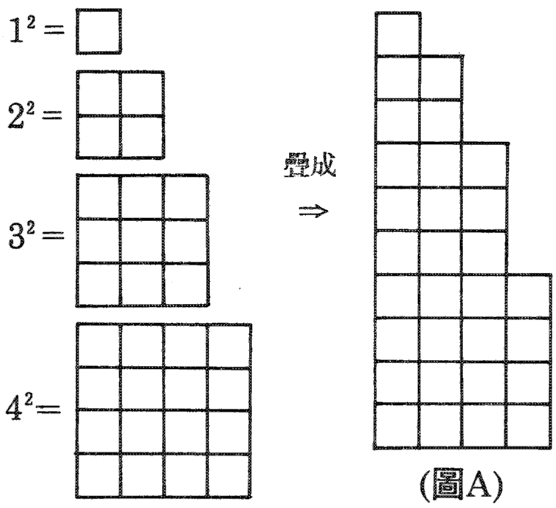


⇒　$1+3+5+7+9=5^2$

由上圖示法加深了我們的印象，引起我們好奇心，再找老師介紹，同學們互相研究，搜集了幾個例子

1.把平方數加起來：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=Sn$

取$n=4$，來討論一下，即$1^2+2^2+3^2+4^2$如何簡略有系統的求和？我們把它分



(圖A)

成如上右之圖：

另一種堆法：

$1^2=1$

$2^2=1+3$

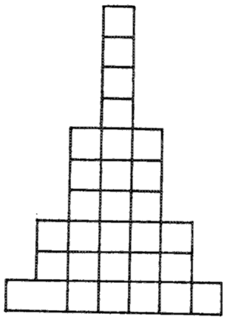
$3^2=1+3+5$

$4^2=1+3+5+7$

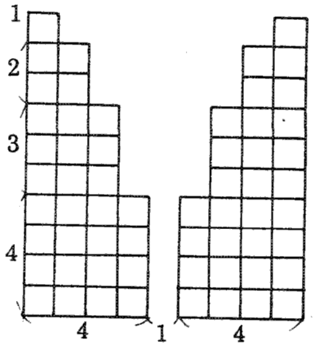
排成4個1，3個3，2個5，1個7，

如圖B⇒將2個圖A與一個圖B合併

成如下的矩形：



(圖B)



長 $=1+2+3+4$

寬 $=4+1+4$

面積 $=(1+2+3+4)\times(4+1+4)$

$\quad=3$個$(1^2+2^2+3^2+4^2)$

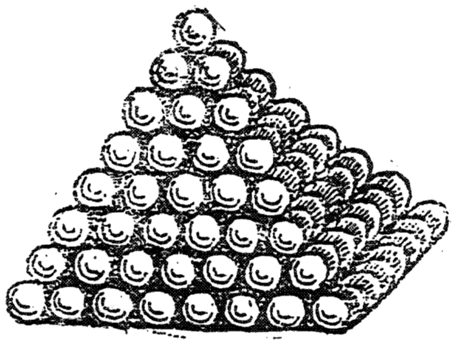
$$\therefore 1^2+2^2+3^2+4^2=\frac{(1+2+3+4)\times(4+1+4)}{3}$$

可將它推廣到一般情況，即：

$$3\times(1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2)=(1+2+3\cdots n)\times(n+1+n)$$

$$\Rightarrow 3\times Sn=\frac{n(n+1)\times(2n+1)}{2}$$

$$\therefore Sn=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2\times 3}$$



(圖C)

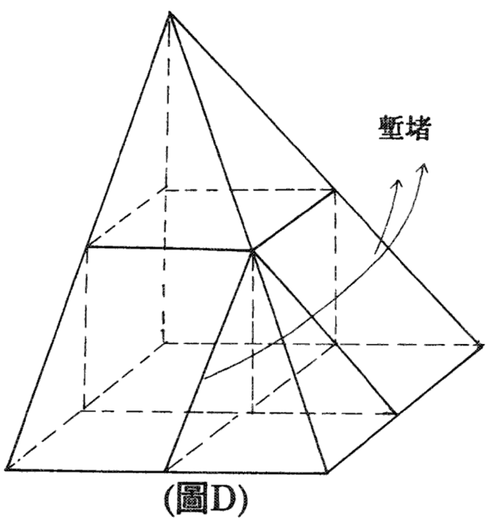
這些平方數用成球堆積成如圖C之四角錐形，老師告訴我們，它的體積形狀如圖D，古書稱爲「陽馬」型，如果它的長、寬、高皆爲n，則其體積(Vn)可分爲：一個邊長爲$(\frac{1}{2}n)$的立方體及2個塹堵型（剛好合成一立方體），與兩個小陽馬，體積訂爲V1（Vi：爲一直分割出來的小陽馬到最後爲O）

$$\therefore 陽馬體積(V)=2(\frac{1}{2}n)^3+2V_1$$

$$=\frac{1}{4}n^3+2\,[\,2(\frac{1}{4}n)^3+2V_2\,]$$

$$=\frac{1}{4}n^3+\frac{1}{16}n^3+4V_2$$

$$=\frac{1}{4}n^3+(\frac{1}{4})^2\cdot n^3+(\frac{1}{4})^3n^3+\cdots$$



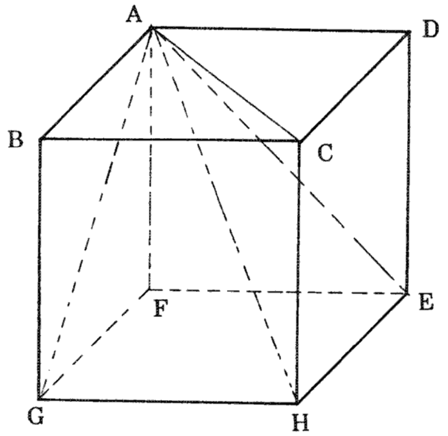
(圖D)

$$=n^3\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\cdots\left(\frac{1}{4}\right)^\infty\right]$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}n^3=\frac{1}{3}n^3$$

這個結果不就是告訴我們一個陽馬之體積，等於一個正立方體的$\frac{1}{3}$嗎！也就是說一個正立方體可以切割成三個陽馬，我們嚐試分割如下：

三個陽馬（ABGHC，AFGHE，ADEHC）
合成一正立方體
ABCDEFGH



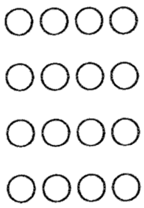
大家想到，堆垜球型跟陽馬型，雖同是四角錐型，但其最後公式卻不相同。我們取n＝4時

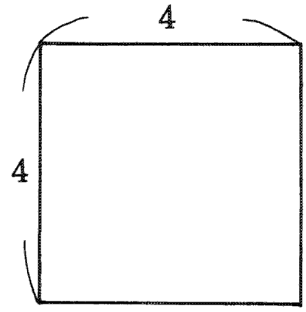
$$堆垜球數(S_4)=\frac{4(4+1)(2\times4+1)}{2\times3}=30$$

$$陽馬體積(V_4)=\frac{1}{3}\times4^3=21\frac{1}{3}\quad\Rightarrow\quad Sn>Vn$$

但是想到平面系列：

正方形：S＝V

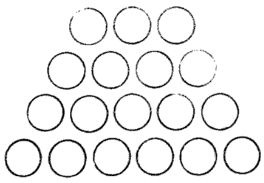




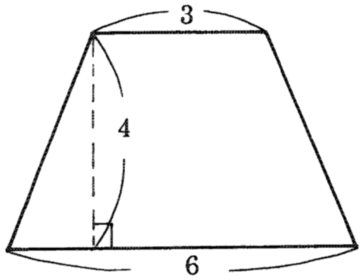
其S＝4×4＝16　　　　其V＝4×4＝16

短形的就不用畫了，其S＝V，而梯形呢？三角形呢？

梯形：S＝V

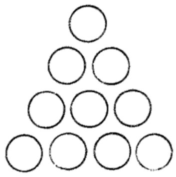


S＝3+4+5+6＝18

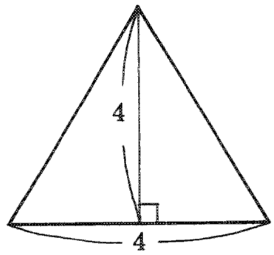


$$V=\frac{(3+6)\times4}{2}=18$$

三角形：S>V



$S=1+2+3+4=10$



$$V=\frac{4\times 4}{2}=8$$

由以上這些例子得知，是不是尖型的，立體尖型的S值大於其體積(V)值呢？

∴我們再研究下面二個例子看看：

2.三角錐型：

其堆垛球數如圖E

它的總數訂爲S′n

$$S'n=1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots+(1+2+3+\cdots+n)$$

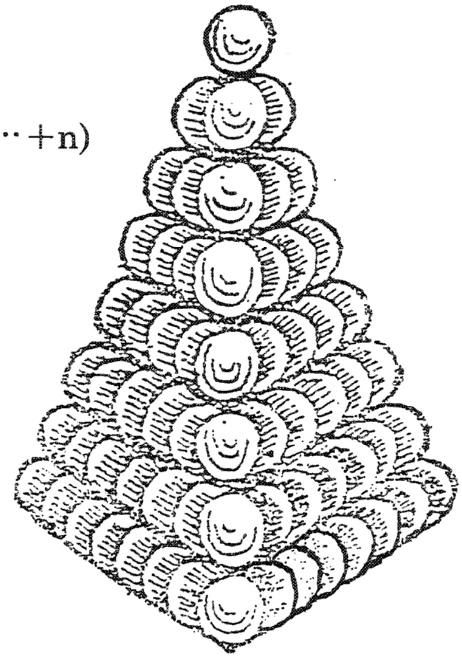
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{2\times 3}+\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)(2n+4)}{12}$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$



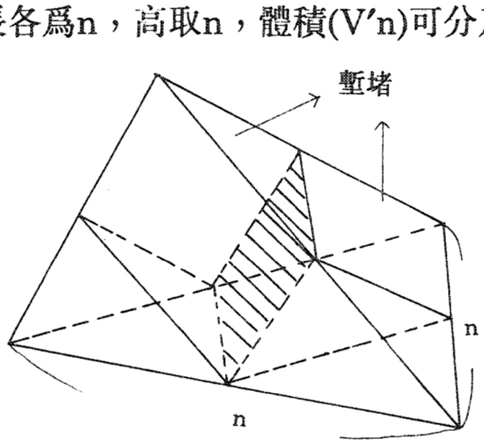
(圖E)

其體積型如圖F，古書稱爲鱉腝，底邊長各爲n，高取n，體積(V′n)可分爲二個塹堵（合成一立方體）

此兩少鱉腝。

$$\therefore Vn'=\left(\frac{1}{2}n\right)^3+2V'_1$$

$$=\frac{1}{8}n^3+2\left[\left(\frac{1}{4}n\right)^3+2V'_2\right]$$



(圖F)

$$=\frac{1}{8}n^3+\frac{1}{32}n^3+4V'_2$$

$$=\frac{1}{8}n^3\left[1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{8}n^3\right)=\frac{1}{6}n^3$$

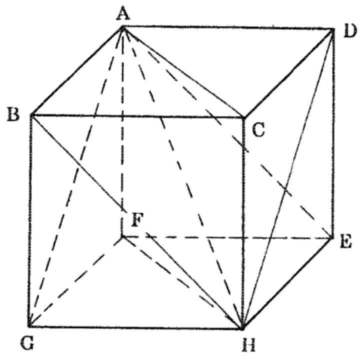
（$V'j$：分出來之小鱉臑

$V'\infty \to O$）

這結果不就是告訴我們，一正立方體

可分成6個鱉臑嗎！我們試著來分割看看：如右圖六個鱉臑（ABGH，ABCH，AFGH，AFEH，ADCH，ADEH）合成一立方體ABCDEFGH。

當我們n取4時堆垛球數三角錐系列



的$S'_4=\frac{4(4+1)(4+2)}{6}=4\times5=20$

而$V'_4=\frac{1}{6}\times4^3=\frac{1}{6}\times64=\frac{32}{3}$

還是$S'_4>V'_4$

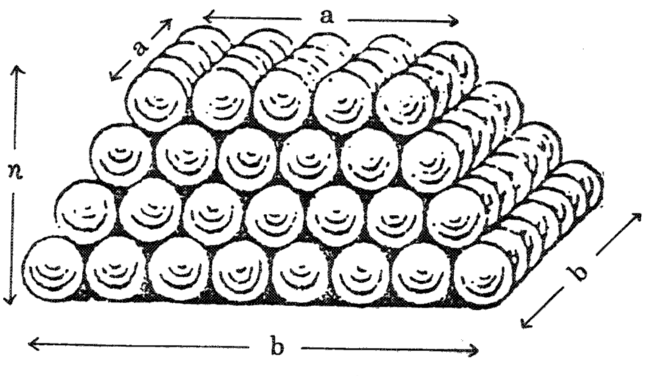
3.最後來看一個平錐台型的例子：把陽馬型的上部拿掉，就成爲一個平錐台型的，它就不尖了！那它的堆垛球數（如圖G）與其體積值（如圖H：稱爲方亭）比起來如何呢？

圖G之球數和訂爲$S''n$

上底各邊爲a

下底各邊爲b

高：n層



(圖G)

則$S''=\sum_{k=1}^{n}[a+(k-1)][a+(k-1)]$

$$=\sum_{k=1}^{n}[a^2+2a(k-1)+(k-1)^2]$$

$$=na^2+2a[1+2+\cdots+(n-1)]+[1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2]$$

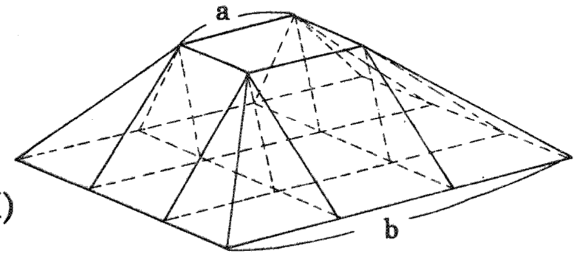
$$=na^2+\frac{2a(n-1)n}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{2\times3}$$

圖H“方亭”之體積訂爲V''。各方條件跟S''系的一樣

而方亭體積如何求得呢？我們也試著分割

而求出其值$V''=\frac{1}{3}(ab+a^2+b^2)n$

它是由圖H看出可切割成中央一立方體，4個塹堵，4個陽馬其值中

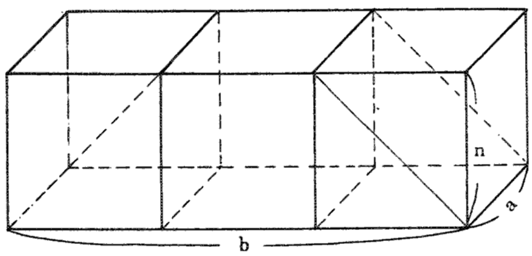


(圖H)

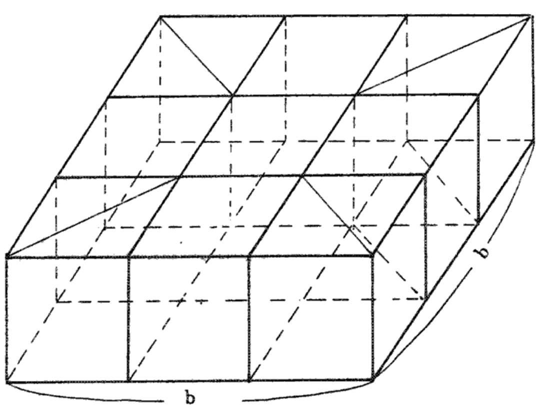
	中央立方	塹堵	陽馬
abn（如圖Ⅰ）相當於用	1	4	0
b^2n（如圖Ⅱ）相當於用	1	8	12
a^2n（如圖Ⅲ）相當於用	1	0	0
共：	3	12	12

剛好湊成3個方亭（∵1方亭是1中央立方，4塹堵，4陽馬）

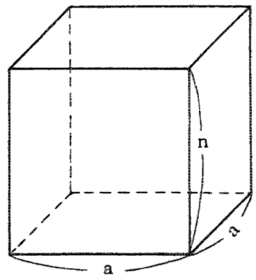
$\therefore V''=\frac{(ab+a^2+b^2)n}{3}$



(圖Ⅰ)



(圖Ⅱ)



(圖Ⅲ)

取a＝4，n＝5，b＝8，代入上二個公式，得

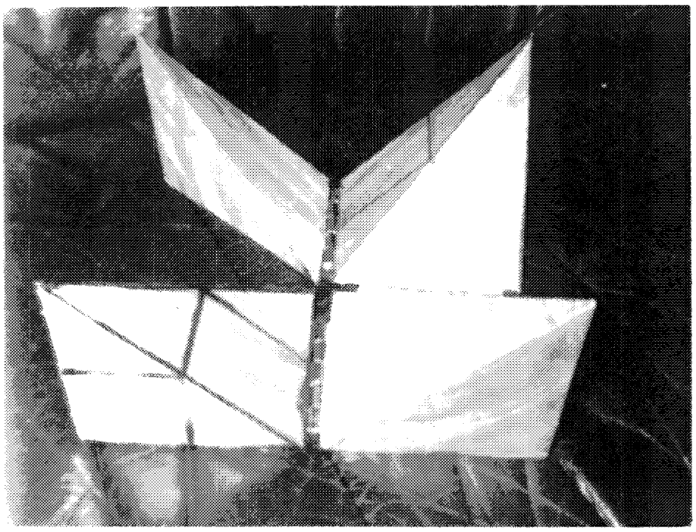
$$S''=5\times4^2+4(5-1)\times5+\frac{5\times4\times9}{6}$$
$$=80+80+30$$
$$=190$$

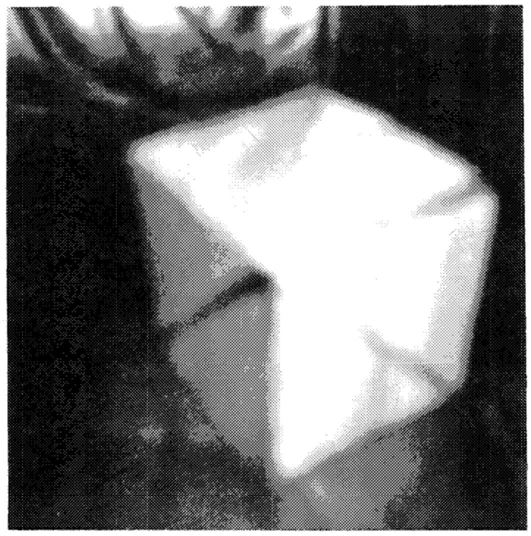
$$\text{而}V''=\frac{1}{3}(4\times8+42+82)\times5=\frac{560}{3}$$

還是S″系之數＞V″系列之值

四、研究結果

由老師的介紹，習作題目之簡易圖示而求其和，引發我們看到各類型之堆垛球數與其體積值之不同而讓我們更進一步去切割各錐形而簡易的求出級數公式及其體積公式，覺得數學還蠻好玩的，所以我們嘗試把一個正立方體分割成三個陽馬或六個鱉臑。再從附件模型（如照片）清楚的看出錐體的切割情形。





五、參考資料

九章算術　郭書春匯校　遼寧教育出版社出版
數學趣味　台灣開明書店著作出版

評　語

本作品透過數學習作題簡易圖示求法，引發探究有關類型垛球數與其體積值之關係，進而探索切割錐形而簡易求出級數公式及其體積公式引發數學研究興趣，作者立體切割直觀觀念清楚熟練，若能進一步提昇原創性則作品品質將能提高。