乾坤大挪移

國中組數學科第一名

基隆市立中正國民中學　　作　　者：莊頷嘉、劉家驊、賴詩茹、高逸明
指導教師：林耀南、林正平

一、研究動機

在一次數學課中，老師講解了幾種相似形的畫法，選擇了不同位置的O點（光源點），會有不同的畫法，引發了我們想去探討的興趣，我們想知道，除了課本上提到的幾種單一光源點的作圖方法外是否還有其他的作法？我們於是著手研究。

二、研究目的

PART1：多光源點單一射向

(一)以三角形三個頂點爲光源點，順時鐘或逆時鐘往三邊的延長線上，各取一定比例長的點所連成的三角形是不是會和原三角形相似？如果不會，那要進一步再怎樣才會相似？

(二)向內欲作出縮小的相似三角形是否可用同樣的方法？

(三)作出的相似三角形與原三角形，在延長（或縮短）倍數、邊長比、面積比之間存在何種規律？

(四)欲作出心理想要的相似三角形，能否依所給的數值畫出？

(五)如果都可以，那方向的偏角的選擇是否會影響到作法？

PART2：單一光源點多射向

(一)在三角形內任取一點（光源點），順時鐘或逆時鐘方向往三邊1/n等分的點的連線上，各取一定比例長的點所連成的三角形是否會和原三角形相似？如果不會，那要進一步再怎樣才會相似？

(二)向內欲作出縮小的相似三角形是否可用同樣的方法？

(三)作出的相似三角形與原三角形，在1/n等分、延長（或縮短）倍數、邊長比、面積比之間存在何種規律？

(四)欲作出心裡想要的相似三角形，能否依所給的數值畫出？

(五)如果都可以，那光源點的選擇位置是否會受影響？

PART3：推廣

㈠任意多邊形是否都可依同方法作出其相似形？

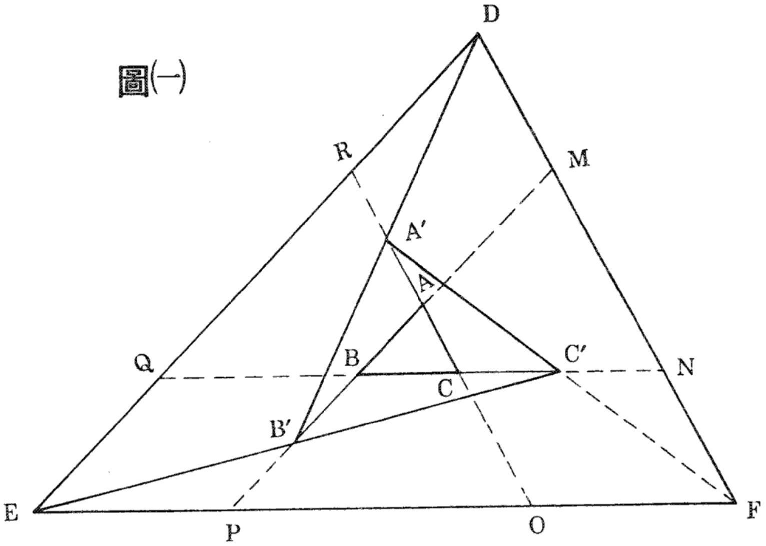
三、研究過程

㈠PART1：多光源點單一射向作圖方式

例如：（圖一）

⑴在△ABC中，以同方向延長$\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$至B′、A′、C′三點，使$\overline{AA'}=\overline{AC}$、$\overline{CC'}=\overline{BC}$、$\overline{BB'}=\overline{AB}$，連$\overline{A'B'}$、$\overline{B'C'}$、$\overline{A'C'}$。

圖㈠



⑵在△A′B′C′中，再分別以反方向延伸$\overline{A'B'}$、$\overline{B'C'}$、$\overline{C'A'}$一倍至D、E、F三點，連$\overline{DE}$、$\overline{EF}$、$\overline{DF}$，則△DEF即爲所求。

延長圖一中的各線段後，我們可以發現：

$\overline{MA}=2\overline{AB}=\overline{BP}$，$\overline{NC}=2\overline{BC}=\overline{BQ}$，$\overline{RA}=2\overline{AC}=\overline{CO}$。

$\overline{DM}:\overline{DF}=\overline{NF}:\overline{DF}=\overline{DR}:\overline{DE}=\overline{EQ}:\overline{DE}=\overline{EP}:\overline{EF}=\overline{OF}:\overline{EF}=2:7$

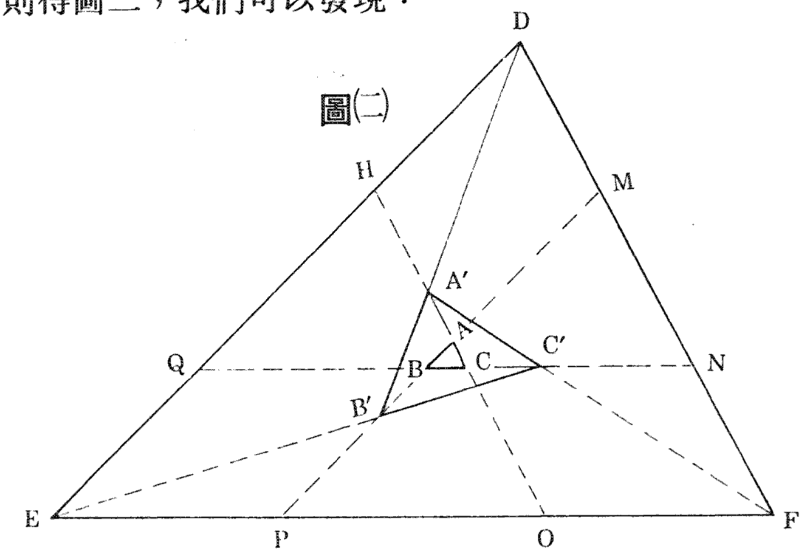
$\overline{DM}:\overline{MN}:\overline{NF}=\overline{FO}:\overline{OP}:\overline{PE}=\overline{EQ}:\overline{QR}:\overline{RD}=2:3:2$

同樣的作圖方式但各延長兩倍則得圖二，我們可以發現：

表一

n	k	3k+1
1	2	7
2	6	19
3	12	37
4	20	61
5	30	91

圖㈡



$\overline{MA}=6\overline{AB}=\overline{BP}$，…

$\overline{DM}:\overline{DF}=\cdots=6:19$

$\overline{DM}:\overline{MN}:\overline{NF}=\cdots=6:7:6$

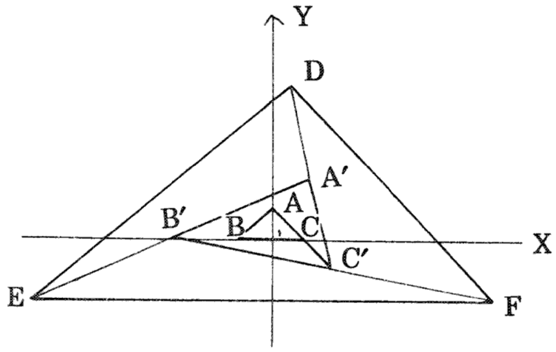
假設延長的倍數爲n，被截的線段中，較短邊爲K（如$\overline{DM}$），而全邊長爲3K＋1（如$\overline{DF}$），我們可作成表一，並歸納得$K=n^2+n$。也就是較短邊：全邊長的比值恆爲$3n^2+3n+1$

並且猜測可能△DEF相似△ABC

性質一

如圖一的操作方式得到的△DEF必與△ABC相似，且各對應邊必互相平行。

已知：任意△ABC延長其邊長n倍，使$\overline{AA'}=n\overline{AB}$，$\overline{BB'}=n\overline{BC}$，$\overline{CC'}=n\overline{AC}$，$\overline{EB'}=n\overline{A'B'}$，$\overline{DA'}=n\overline{B'C'}$，$\overline{FC'}=n\overline{B'C'}$。



求證：(1)△ABC～△DEF

(2)$\overline{BC}//\overline{EF}$，$\overline{AB}//\overline{DE}$，$\overline{AC}//\overline{DF}$。

證明：爲了方便求證，我們把△ABC的$\overline{BC}$邊放在坐標圖的X軸上，而頂點A則放在Y軸上，也就是說設A(o，a)、B(－b，o)，C(c，o)。

(1)在△A′B′C′中，因爲$\overline{AA'}=n\overline{AB}$，$\overline{BB'}=n\overline{BC}$，$\overline{CC'}=n\overline{AC}$。所以A′、B′、C′三點的坐標分別爲A′(nb，na＋a)，B′(－nb－nc－b，o)，c′(nc＋c，－na)。同理亦可求出D、E、F三點的坐標分別爲：

$D(n^2b-n^2c+nb-nc，2n^2a+2na+a)$、$E(-2n^2b-2nb-n^2c-b，-n^2a-na)$、$F(2n^2c+n^2b+nb+2nc+c，-n^2a-na)$。所以$\overline{DF}/\overline{AC}=$

$$\sqrt{(2n^2c+n^2b+nb+2nc+c-n^2b+n^2c-nb+nc)^2+(2n^2a+2na+a+n^2a+na)^2/(a^2+c^2)}$$

$$=\sqrt{(a^2+c^2)(3n^2+3n+1)^2/(a^2+c^2)}$$

$=3n^2+3n+1$　同理可證：$\overline{DE}/\overline{AB}=\overline{EF}/\overline{BC}=3n^2+3n+1$

故△ABC～△DEF

(2)由A(o，a)，C(c，o)得$\overleftrightarrow{AC}$的方程式爲$cy+ax-ac=0$，同理可求出$\overleftrightarrow{DF}$的方程式爲$cy+ax-n^2ab-n^2ac-nab-nac-ac=0$

因爲X的係數比等於Y的係數比不等於常數項比，所以$\overline{AC}//\overline{DF}$。同理可證：$\overline{BC}//\overline{EF}$，$\overline{AB}//\overline{DE}$。

現在我們可以去證明（表一）中的短邊K與全邊長3k＋1的關係。

性質二：如圖三

已知：$\triangle DEF \sim \triangle ABC$，且$\overline{AC} // \overline{DF}$，$\overline{BC} // \overline{EF}$，$\overline{AB} // \overline{DE}$，$K=n^2+n$，$\overline{A'A}=n\overline{AC}$，$\overline{B'B}=n\overline{AB}$，$\overline{C'C}=n\overline{BC}$，$\overline{DA'}=\overline{A'B'}$，$\overline{EB'}=n\overline{B'C'}$，$\overline{FC'}=n\overline{A'C'}$。

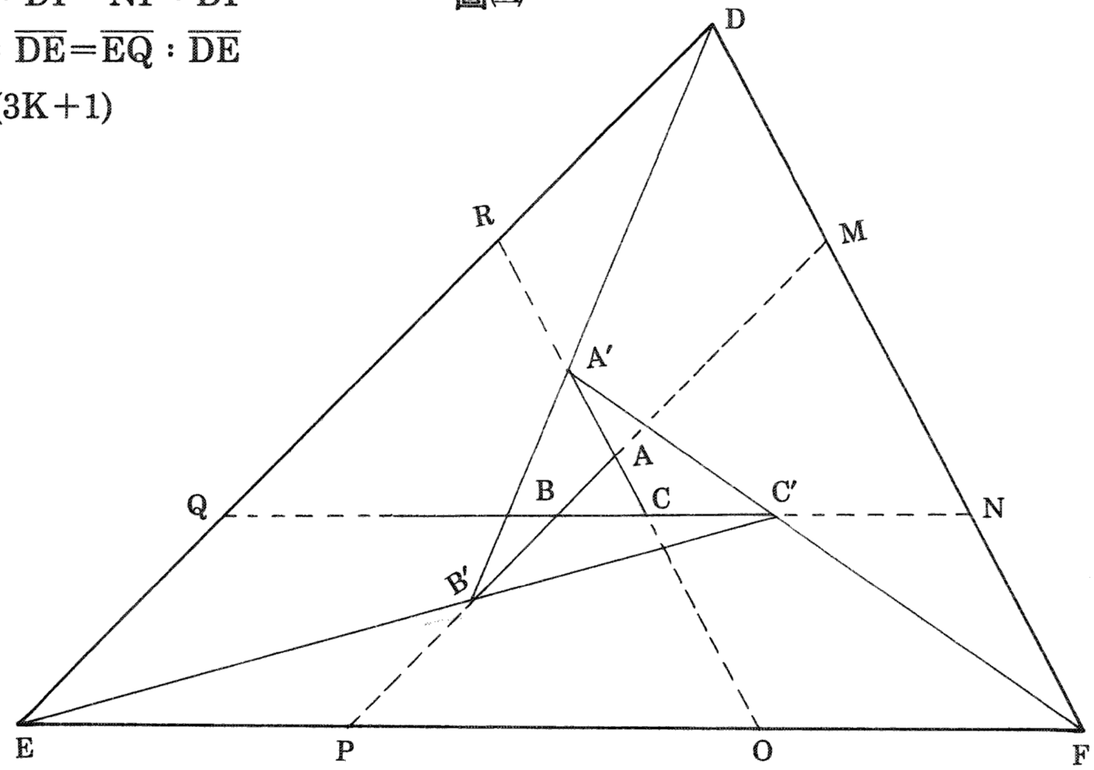
求證：$\overline{EB}:\overline{EF}=\overline{OF}:\overline{EF}$

$=\overline{DM}:\overline{DF}=\overline{NF}:\overline{DF}$

$=\overline{DR}:\overline{DE}=\overline{EQ}:\overline{DE}$

$=K:(3K+1)$

圖㈢



證明：⑴在$\triangle BC'B'$和$\triangle PEB'$中

$\because \overline{EF} // \overline{BC}$，$\therefore \angle B'EP=$

$\angle BC'B'$，又$\angle EB'P=\angle BB'C'$

$\therefore \triangle BC'B' \sim \triangle PEB'$

$\therefore \overline{BB'}:\overline{B'P}=\overline{B'C'}:\overline{B'E}=$

$\overline{BC'}:\overline{PE}=1:n$

$\therefore \overline{PE}=n\overline{BC'}$，又$\overline{BC'}=$

$(n+1)\overline{BC}$，故$\overline{PE}=(n^2+n)\overline{BC}$－①

⑵在$\triangle A'CC'$和$\triangle A'DF$中

$\because \overline{BC} // \overline{EF}$，$\therefore \triangle A'CC' \sim \triangle A'DF$，$\overline{CC'}:\overline{OF}=\overline{A'C'}:\overline{A'F}=1:n$

又$\overline{CC'}=(n+1)\overline{BC}$，$\therefore \overline{OF}=(n^2+n)\overline{BC}$－②

⑶在$\triangle ABC$和$\triangle APO$中，$\because \overline{BC} // \overline{EF}$，$\therefore \triangle ABC \sim \triangle APO$，$\overline{BB'}:\overline{B'P}=$

$1:n$，又$\overline{BB'}=n\overline{AB}$，$\therefore\overline{BP'}=n^2\overline{AB}$，$\overline{BP}=(n^2+n)\overline{AB}$，$\overline{AP}=(n^2+n+1)\overline{AB}$故$\overline{AB}:\overline{AP}=1:(n^2+n+1)=\overline{BC}:\overline{PO}$，$\therefore\overline{PO}=(n^2+n+1)\overline{BC}$ —③

(4)由①，②，③及$K=n^2+n$　知$\overline{PE}:\overline{EF}=\overline{PE}:(\overline{PE}+\overline{PO}+\overline{OF})=[(n^2+n)\overline{BC}]:[3(n^2+n)+1]\overline{BC}=(n^2+n):[3(n^2+n)+1]=K:(3K+1)$

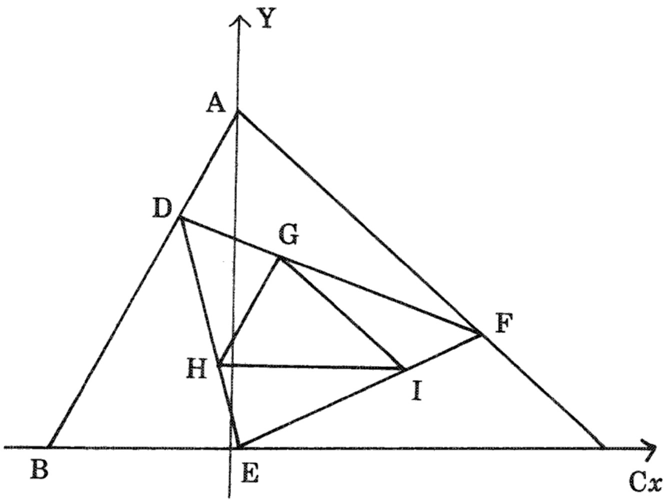
(5)同理可證$\overline{OF}:\overline{EF}=\overline{DM}:\overline{DF}=\overline{NF}:\overline{OF}=\overline{DR}:\overline{DE}=\overline{EQ}:\overline{DE}=K:(3K+1)$

由以上證明得知△ABC和△DEF的邊長比爲$1:[3(n^2+n)+1]$，也就是$1:(3k+1)$

∴面積比爲$1:[3(n^2+n)+1]^2$，所以若我們想作出$\triangle DEF=61^2$。△ABC時，我們可令$3K+1=61$，$3(n^2+n)+1=61$，$n^2+n=20$，$n=4$或-5（不合），而得知只要把△ABC先延長四倍作出△A′B′C′，再以反方向延長△A′B′C′的邊長四倍，則所得到的△DEF即爲所要的三角形。

既然可以做出放大的相似△，那要如何做出向內縮小的呢？我們可以先在三邊上各n等分，再各取第一個等分點，連接這三點，再以同樣的方法反方向進一步取三點並連接成最後的△，則此△與原△相似。

性質三：（如右圖）



已知：在任意△ABC的三邊上取D、E、F三點使$\overline{BE}=1/n\overline{BC}$，$\overline{DA}=1/n\overline{AB}$，$\overline{CF}=1/n\overline{AC}$，再取G、H、I三點，使$\overline{HE}=1/n\overline{DE}$，$\overline{IF}=1/n\overline{EF}$，$\overline{DG}=1/n\overline{DF}$。

求證：(1)$\overline{AB}//\overline{GH}$，$\overline{BC}//\overline{HI}$，$\overline{AC}//\overline{GI}$。

(2)$\triangle ABC\sim\triangle GHI$

證明：爲方便起見，我們把$\overline{BC}$放在X軸上，頂點A則挪至Y軸。

(1)設$A(o，a)$，$B(-b，o)$，$C(c，o)$

$\therefore E((b+c)/n-C，O)$

$D(-b/n，a-a/n)$，$F(c-c/n，a/n)$

同理：$H(2bn+cn-bn^2-2b-c/n^2，(an-a)/n^2)$，

$G(bn-cn+c-b)/n^2，(an^2-2an+2a)/n^2)$，

$I(n^2c-2cn+b+2c-bn)/n^2，(an-a)/n^2)$。

(2)$\because (an-a)/n^2=(an-a)/n^2$，$\therefore \overline{HI}//\overline{BC}$，同理$\overline{AB}//\overline{GH}$，$\overline{AC}//\overline{GI}$。

(3)在$\triangle ABC$與$\triangle GHI$中，$\because \overline{AB}//\overline{GH}$，$\overline{BC}//\overline{HI}$，$\overline{AC}//\overline{GI}$，$\therefore \triangle ABC\sim\triangle GHI$。

在這證明過程中，我們可以求出邊長比爲：

$\overline{HI}/\overline{BC}=[(2bn+cn-bn^2-2b-c)/n^2-(n^2c-2cn+b+2c-bn)/n^2]/(b+c)$
$=(n^2-3n+3)/n^2$。所以我們可任意做出我們想要的縮小△。

(二)PART2：單一光源點，多方向射向作圖方式（如圖四）

(1)在$\triangle ABC$中任取一點O。

(2)在三邊上取$\overline{AG}=1/n\overline{AB}$
$\overline{BH}=1/n\overline{BC}$，$\overline{CI}=1/n\overline{AC}$。

(3)連$\overline{OH}$、$\overline{OI}$、$\overline{OG}$並延長使$\overline{GD}=K\overline{OG}$，$\overline{EH}=K\overline{OH}$，$\overline{FI}=K\overline{OI}$

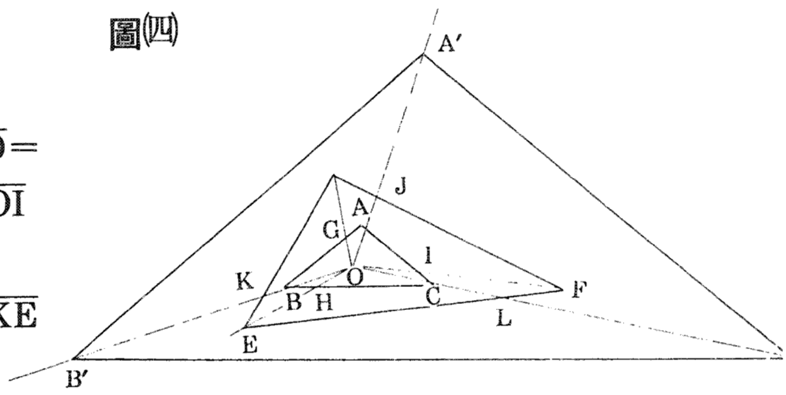
(4)連$\overline{DE}$，$\overline{EF}$，$\overline{DF}$。

(5)在$\triangle DEF$三邊上，反方向取$\overline{KE}=1/n\overline{DE}$，
$\overline{LF}=1/n\overline{EF}$，$\overline{DJ}=1/n\overline{DF}$。

(6)連$\overline{OK}$，$\overline{OL}$，$\overline{OJ}$並延長，使$\overline{KB'}=k\overline{OK}$，$\overline{LC'}=k\overline{OL}$，$\overline{JA'}=k\overline{OJ}$。

(7)連$\overline{A'B'}$，$\overline{B'C'}$，$\overline{A'C'}$，則$\triangle A'B'C'$即爲所求，也就是說$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$

圖(四)



性質四：放大的相似△

已知：任意$\triangle ABC$，及$\triangle ABC$中一點O，使$\overline{BH}=1/n\overline{BC}$，$\overline{CI}=1/n\overline{AC}$，$\overline{AG}=1/n\overline{AB}$，$\overline{FL}=1/n\overline{EF}$，$\overline{DJ}=1/n\overline{DF}$，$\overline{EK}=1/n\overline{DE}$，$\overline{GD}=k\overline{OG}$，$\overline{EH}=k\overline{OH}$，$\overline{FI}=k\overline{OI}$，$\overline{JA'}=k\overline{OJ}$
$\overline{KB'}=k\overline{OK}$，$\overline{LC'}=k\overline{OL}$（見圖四）

求證：(1)$\overline{A'B'}//\overline{AB}$，$\overline{B'C'}//\overline{BC}$，$\overline{A'C'}//\overline{AC}$
(2)$\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$。

證明：（略）

在上述的證明過程中，我們可求出它們的邊長比爲$\overline{B'C'}/\overline{BC}=(n^2-3n+3)(k+1)^2/n^2$，利用這個邊長比值的關係，我們可以隨意的作出我們想要的放大的相似△。更進一步的發現，無論O點選在邊上、頂點、內部、外部均不影響其結果。

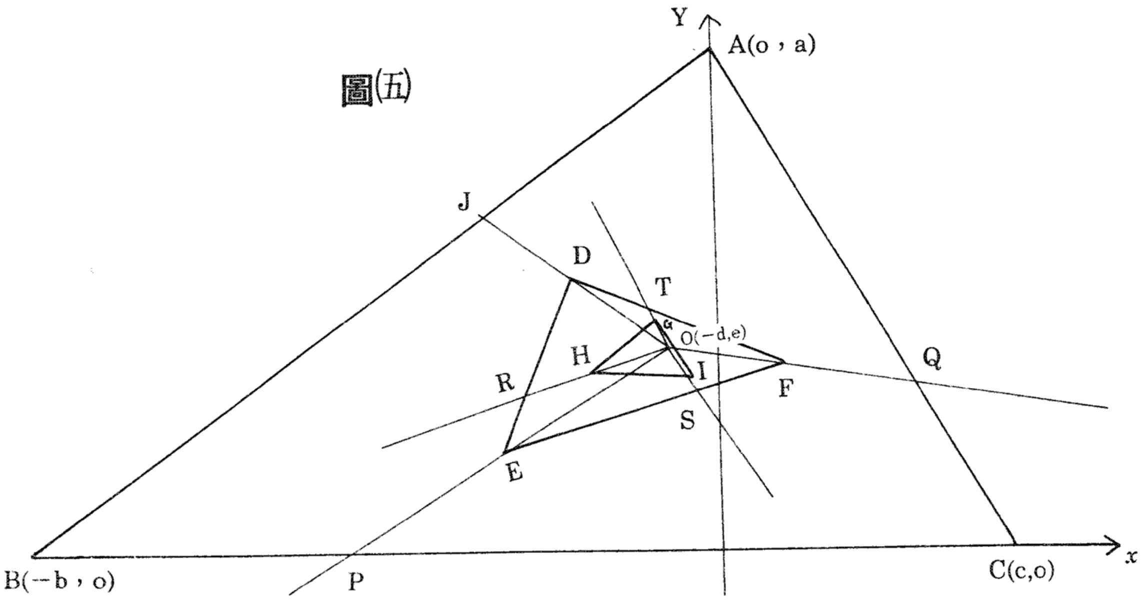
性質五：縮小的相似△（圖五）

已知：任意△ABC及其中一點O，使$\overline{AJ}=1/n\overline{AB}$，
$\overline{BP}=1/n\overline{BC}$，$\overline{CQ}=1/n\overline{AC}$，$\overline{OD}=1/k\overline{OJ}$，
$\overline{OE}=1/k\overline{OP}$，$\overline{OF}=1/k\overline{OQ}$，$\overline{RE}=1/n\overline{DE}$，
$\overline{DJ}=1/n\overline{DF}$，$\overline{FS}=1/n\overline{EF}$，$\overline{OG}=1/k\overline{OT}$，
$\overline{OH}=1/k\overline{OR}$，$\overline{OI}=1/k\overline{OS}$。

求證：(1)$\overline{AB}//\overline{GH}$，$\overline{BC}//\overline{HI}$，$\overline{AC}//\overline{GI}$。
(2)△ABC～△GHI

證明：（略）

圖(五)



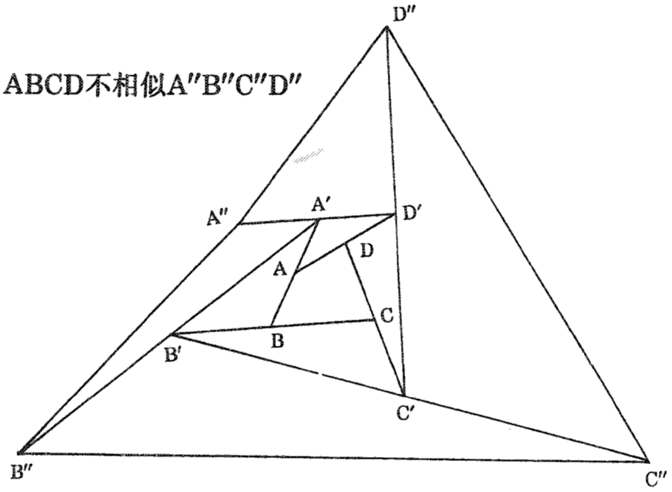
在上述的證明過程中，我們可求出它們的邊長比爲$\overline{HI}/\overline{BC}=(n^2-3n+3)/n^2k^2$，利用這個邊長比值的關係，我們可以隨意的作出我們想要的縮小的相似△。

(三)PART3：推廣

對於任意多邊形，我們是否也可以利用相同的作圖方式作出相似的多邊形呢？答案是不能直接做出，但只要將此多邊形分割成幾個三角形後，再經平移合併成的多邊形必與原多邊形相似。現在我們以四邊形爲例，由圖(六)、(七)、(八)、(九)可以看出。

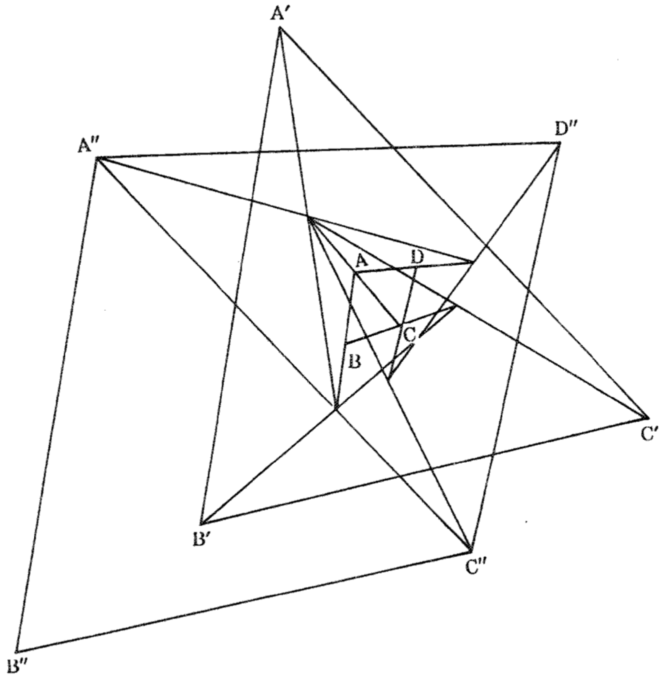
圖(六)

ABCD不相似A″B″C″D″



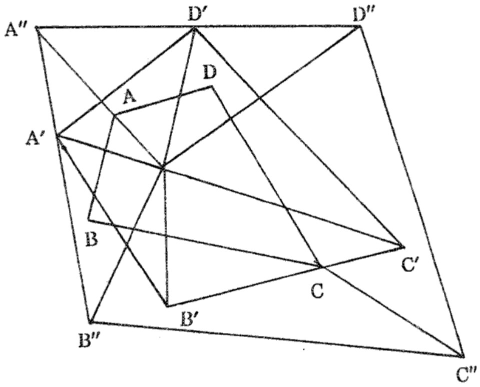
多光源點單一射向直接作圖。

圖(七)



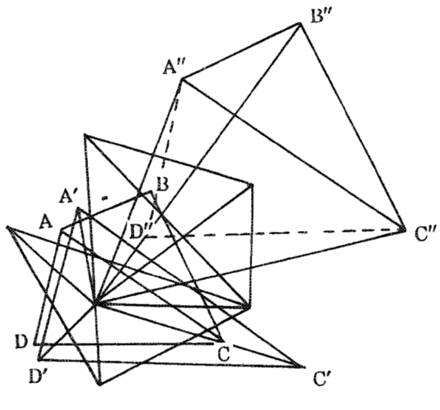
ABCD～A″B″C″D″
先將四邊形ABCD分割成△ABC和△ACD分別作圖後再經平移合併成四邊形A″B″C″D″

圖(八)



ABCD不相似A″B″C″D″
單一光源點多方向射向直接作圖

圖(九)



先將四邊形ABCD分割成△ADC和△ABC分別作圖後，再經平移合併成四邊形A″B″C″D″

四、結 論

㈠依據多光源點單一射向作圖方式，可畫出放大的相似△。其邊長比值爲$3n^2+3n+1$。

㈡依據多光源點單一射向作圖方式，可畫出縮小的相似△。其邊長比值爲$(n^2-3n+3)/n^2$。

㈢在多光源點單一射向作圖中，先順時鐘延長再逆時鐘延長或先逆時鐘延長再順時鐘延長皆可得相似的△，且若連續的操作，則所畫出的第二、四、六、八…等偶數次的△均和原△相似。

㈣依據單一光源點多方向射向作圖方式，可畫出放大的相似△。其邊長比值爲$(n^2-3n+3)(k+1)^2/n^2$。

㈤依據單一光源點多方向射向作圖方式，可畫出縮小的相似△。其邊長比值爲$(n^2-3n+3)/n^2k^2$。

㈥任意多邊形皆可用同樣的方法先將分割後的△畫出相似圖形，再經平移合併成相似的多邊形。

五、參考資料

㈠國民中學選修科目數學下册（國立編譯館主編）。

評 語

本作品描寫三角形經多光源點單一射向、單一光源點多射向，所連續投射成的三角形變化的情形，經由適當簡淺直觀研究，得出在適當的規定下，第二次的三角形與原三角形相似，且推廣到一般多邊形亦可同法作者其相似形，具創造性與應用價值，顯示該作品作者的幾何能力頗佳。