方塊數論

高中組數學科第三名

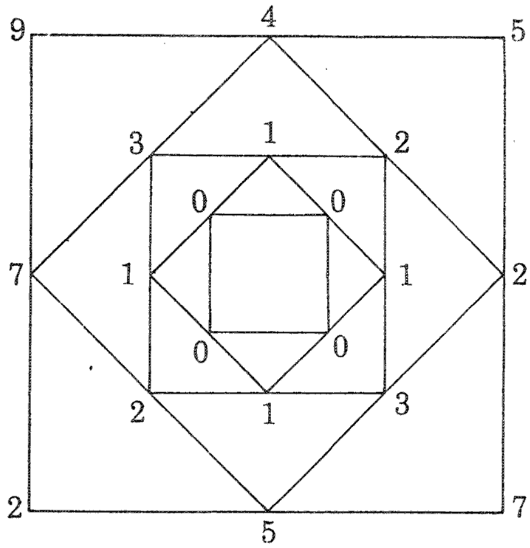
省立彰化高級中學

作　　者：張建祥、王重凱

指導教師：林漢良、王玲玉

一、前　言

偶然在中國時報的科學專欄中，看到一個有趣的數學問題，名爲「數學方塊」，題目是：在一個正方形的四角寫上任意四個正整數，鄰角數值差的絕對值寫在共同邊上的中點，將此四邊中點連接再畫一個正方形，重複這個程序，最後有一個方塊的四個中點數都爲零，如圖(一)，爲了方便，我們將上述計算程序稱爲〝運算〞。



圖一　任意四個整數爲9，5，7，2

二、研究動機與目的

這個〝運算〞規則簡單，只要懂算術的學齡兒童都會，但其中蘊含的一些觀念和定理卻很奧妙，值得深入推敲，今我們想要探討下列幾個目的：

(一)設計四個整數（正、負皆可）能重覆〝運算〞之電腦繪圖程式，操作實驗，驗證最後一個方塊的中點數是否都爲零。

(二)證明四個整數經〝運算〞後必得四個整數皆爲零。

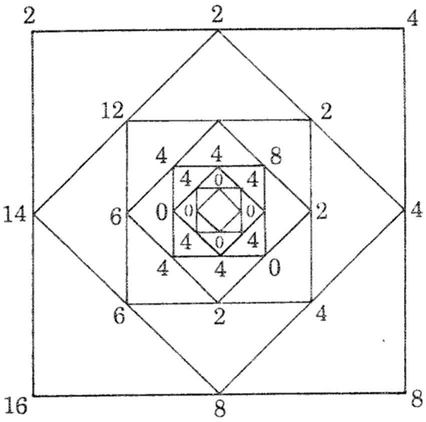
(三)設計2^3、2^4、2^5個整數能重複〝運算〞之電腦列表程式，操作實驗，驗證最後一列的所有整數是否都會是零？

(四)用數學理論證明2^n個整數經此〝運算〞，最後亦可得全是零。

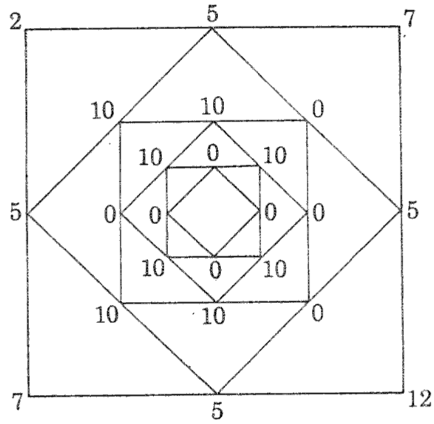
三、實驗過程與理論證明

(一)正方形四角寫上任意四個正整數之運算情形：

(1)一般性列子：以下二個列子〝運算〞之結果，皆可得方塊數皆爲〝0〞。

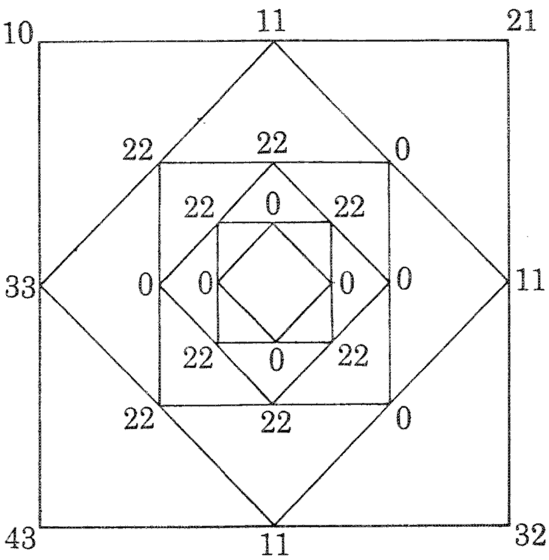


1圖二：四個整數爲2,4,8,16

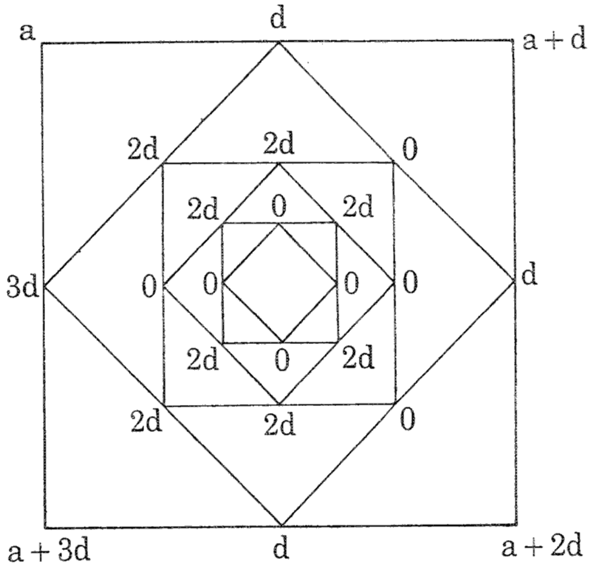


圖三：四個整數爲2,7,12,17

(2)若四個正整數呈等差數列，經過5個步驟亦可得到全數皆爲〝0〞，且前一四方數皆爲2d。



圖四：四個整數爲10,21,32,43



圖五：四個整數爲a,a＋d,a＋2d,a＋3d

(3)若四數成等比數列（當$a>0,r\geqslant 1$）

a	ar	ar^2	ar^3
$a(r-1)$	$ar(r-1)$	$ar^2(r-1)$	$a(r^3-1)$
$a(r-1)^2$	$a(r-1)^2$	$a(r^2-1)$	$a(r^2-1)$
$a(r-1)^3$	$a(r-1)(r^2-2r-1)$	$a(r-1)(r^2-1)$	$a(r-1)(r^2+1)$
$2a(r-1)$	$2ar(r-1)$	$2a(r-1)$	$2ar(r-1)$
$2a(r-1)^2$	$2a(r-1)^2$	$2a(r-1)^2$	$2a(r-1)^2$
0	0	0	0

(4)今編寫電腦程式，設計此方塊數論正方形的繪圖及〝運算〞，如圖六。經過一連串的測試最後正方形的四個頂點都是〝零〞。增強我們欲證明此性質成一數學定理的信心。

(二)證明四個整數經〝運算〞後必可得四個整數皆爲〝0〞，過程如下：

(1)兩個偶數或兩個奇數其值差必爲偶數，而一個偶數和一個奇數其值差必爲奇數，此爲奇偶性質。今若以1爲偶數，-1爲奇數，而〝兩個奇數或兩個偶數差必爲偶數〞，可以用〝$1\times1=(-1)\times(-1)=1$〞來看待，同理〝一個偶數和一個奇數的差必爲奇數〞亦可用〝$1\times(-1)=(-1)\times1=-1$〞來看待。

(2)今證任意四個正整數至多經4次〝運算〞後，必可得四個數全爲偶數。設任意四個整數爲X_1,X_2,X_3,X_4，此四個正整數不是奇數就是偶數，而1表偶數，-1表奇數。

令$X_i\in\{1,-1\}\ i=1,2,3,4\quad\therefore X_i^2=1$

前三次〝運算〞如下：

	X_1	X_2	X_3	X_4
第一次運算	X_1X_2	X_2X_3	X_3X_4	X_4X_1
第二次運算	$X_1X_2^2X_3$	$X_2X_3^2X_4$	$X_3X_4^2X_1$	$X_4X_1^2X_2$
第三次運算	$X_1X_2^3X_3^3X_4$	$X_2X_3^3X_4^3X_1$	$X_3X_4^3X_1^3X_2$	$X_4X_1^3X_2^3X_3$
	$=X_1X_2X_3X_4$	$X_2X_3X_4X_1$	$X_3X_4X_1X_2$	$X_4X_1X_2X_3$

此四個數不是1就是-1，也就是經三次〝運算〞後，四數必同爲偶數或同爲奇數，故第四次〝運算〞後，四數必同爲偶數。

(3)接着我們看$\{9,11,7,6\}$與$\{18,22,14,12\}$〝運算〞之間有何關係：

9	11	7	6	×2＝	18	22	14	12
2	4	1	3	×2＝	4	8	2	6
2	3	2	1	×2＝	4	6	4	2
1	1	1	1	×2＝	2	2	2	2
0	0	0	0	×2＝	0	0	0	0

可見任意四個整數若有共同的因數，可同除之，其〝運算〞結果不變。

(4)由(2)知，任意四個整數最多經四次〝運算〞後必可得四個數皆爲偶數，再將2除去，如此重覆下去，可知此四數呈〝嚴格遞減〝減至最後必皆成最小偶數〝0〞由(1)(2)(3)(4)得知：任意四個正整數經有限次〝運算〞後可得四數皆爲〝0〞，得證。#

(三)方塊數推廣至2^n時之實驗情形，今設電腦程式列表式的〝運算〞，任取$8=2^3$，$16=2^4$，$32=2^5$個整數〝運算〞測試結果亦可得全數皆爲〝0〞。

(四)「$n\in N$，2^n個整數經有限次〝運算〞亦皆可得全爲〝0〞」之推論證明：

(1)預備定理

楊暉三角形中，我們發現$(X+Y)^3$、$(X+Y)^7$其各項係數爲奇數，而

$(X+Y)^3=(X+Y)^{2^2-1}$　$(X+Y)^7=(X+Y)^{2^3-1}$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \rightarrow (X+Y)^3\text{之係數} & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \rightarrow (X+Y)^7\text{之係數}
\end{array}
$$

首先我們證明：$(X+Y)^{2^n-1}$其各項係數爲奇數，因其各項係數爲$C_r^{2^n-1}$對每一整數r，$0\leqslant r\leqslant 2^n-1$

$$而\quad C_r^{2^n-1}=\frac{(2^n-1)!}{(2^n-1-r)!r!}=\frac{(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)\cdots\cdots(2^n-r)}{1\times 2\times 3\times\cdots\cdots\times r}$$

分子$(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)\cdots\cdots(2^n-r)$與分母$r!$，2的因數個數相同，其個數$=[r/2]+[r/4]+\cdots+[r/2^n-1]$所以，約分後$C_r^{2^n-1}$必爲正奇數。

(2)設任意2^n個正整數，X_i，$i\in N$，$1\leqslant i\leqslant 2^n$，1表偶數，$-1$表奇數・$X_i\in\{-1,1\}$

	X_1	X_2	$X_3\cdots\cdots\cdots\cdots X_{2^n}$	
$(a+b)^1$之係數	X_1X_2	X_2X_3	$X_3X_4\cdots\cdots\cdots X_{2^n}X_1$	其指數均爲(1,1)
$(a+b)^2$之係數	$X_1X_2^2X_3$	$X_2X_3^2X_4$	$X_3X_4^2X_5\cdots\cdots X_{2^n}X_1^2X_2$	其指數爲(1,2,1)
$(a+b)^3$之係數	$X_1X_2^3X_3^3X_4$	$X_2X_3^3X_4^3X_5$	$X_3X_4^3X_5^3X_6\cdots X_{2^n}X_1^3X_2^3X_3$	其指數均爲(1,3,3,1)

………………………………………………………………………………

$(a+b)^{2^n-1}$之係數$X_1^{C_0^{2^n-1}}X_2^{C_1^{2^n-1}}\cdots X_{2^n}^{C_{2^n-1}^{2^n-1}},\cdots,X_{2^n}^{C_0^{2^n-1}}X_1^{C_1^{2^n-1}}\cdots X_{2^n-1}^{C_{2^n-1}^{2^n-1}}$

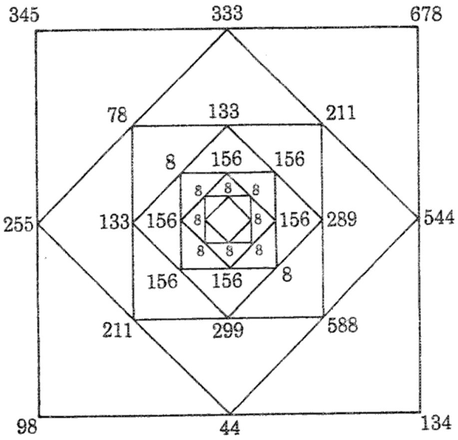
經過2^n-1次〝運算〞後，每一項指數均爲（$X+Y$）$^{2^n-1}$展開之係數，由(四)之(1)知：（$X+Y$）$^{2^n-1}$其各項係數皆爲奇數

∴2^n個數最多經2^n-1次〝運算〞可得2^n個奇偶性質相同的正整數，再〝運算〞一次必可得全爲偶數再提出〝2〞的因子，再重覆〝運算〞因爲一直提出2的因子，所以此2^n個數〝嚴格遞減〞故最後必可得最小偶數，所以2^n個數全爲0。

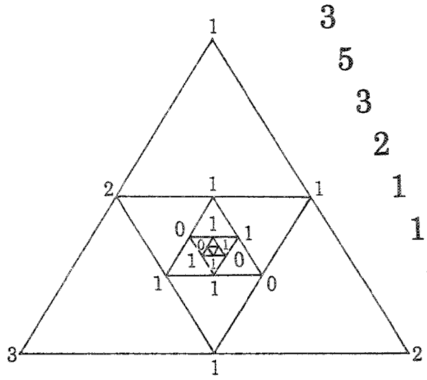
四、討　論

任意n個正整數經過〝運算〞都可得全爲〝0〞嗎？還是一定要2^n個才成立呢？

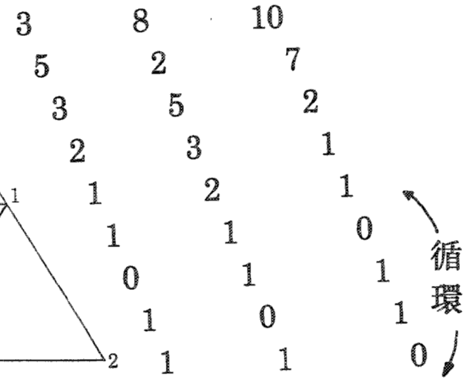
(一)$n=3$時，我們先用1,2,3代入得下圖七，再用3,8,10代入，如圖八



圖六：輸入345,678,134,90
電腦測試之情形



圖七　三角形；三個整數爲
1，2，3之運算情形

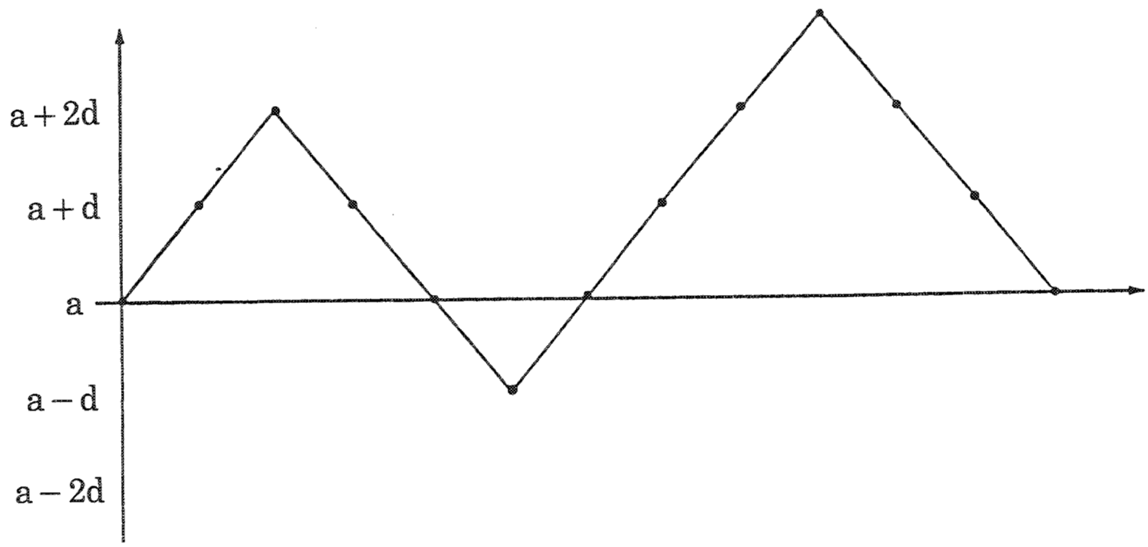


圖八　三整數爲
3，8，10

故我們得知：此〝運算〞不成立

㈡我們任意試了n＝5,7,9等奇數個皆成循環性，爲什麼呢？且看下面證明：

我們知道若有t個整數時，再經二次〝運算〞即可得全爲〝0〞之充要條件爲此t個數任意相鄰兩數之差相等。今假設有t個數其任意相鄰兩數之差均相等，但不爲0，其中至少有兩個數不相等，設其中一數爲a且二相鄰之差爲d，今將此t個數畫在一條平面折線上，如圖（九）



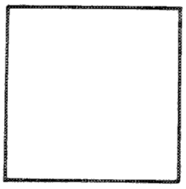
圖九　折線圖

此七個點分布在a,a＋d,a－d,a＋2d…上，所以a是始點而a亦是終點，a加了

d必定要再減d，才能回到原點a，a加了n個d，必定再減n個d才能回到原點a

例：n＝4　a＝2　d＝2

a＝2　　0

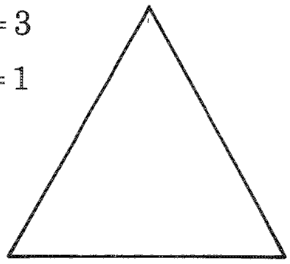


0　　2

設a在左上角$2\xrightarrow{-d}0\xrightarrow{+d}2\xrightarrow{-d}0\xrightarrow{+d}2$

例：n＝3

a＝1



1　　0

a＝1　　d＝1

a在上頂點　$1\xrightarrow{-d}0\xrightarrow{+d}1\xrightarrow{\text{Or}\ {+d \atop -d}}$

都無法回到原點1

∴方塊邊數n是偶數是此〝運算〞成立之必要條件

㈢當n是偶數時，此〝運算〞必定成立嗎？且看下面兩個例子

例1.　3　7　8　6　9　4

4　1　2　3　5　1

3　1　1　2　4　3

2　0　1　2　1　0

2　1　1　1　1　1

1　0　0　0　1　0

1　0　0　1　1　1

1　0　1　0　0　0

循　1　1　1　0　0　1

環　0　0　1　0　1　0

0　1　1　1　1　0

1　0　0　0　1　0

此例會循環不成立

例2.　9　7　9　11　13　11

2　2　2　2　2　2　此例成立

0　0　0　0　0　0

說明：當n＝6時，設$X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6\in\{1,-1\}$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
	X_1X_2	X_2X_3	X_3X_4	X_4X_5	X_5X_6	X_6X_1
①	X_1X_3	X_2X_4	X_3X_5	X_4X_6	X_5X_1	X_6X_2
	$X_1X_2X_3X_4$	$X_2X_3X_4X_5$	$X_3X_4X_5X_6$	$X_4X_5X_6X_1$	$X_5X_6X_1X_2$	$X_6X_1X_2X_3$
②	X_1X_5	X_2X_6	X_1X_3	X_2X_4	X_3X_5	X_6X_4
	$X_5X_6X_1X_2$	$X_6X_1X_2X_3$	$X_1X_2X_3X_4$	$X_2X_3X_4X_5$	$X_3X_4X_5X_6$	$X_4X_5X_6X_1$
③	X_3X_5	X_4X_6	X_5X_1	X_6X_2	X_1X_3	X_2X_4
	$X_2X_3X_4X_5$	$X_3X_4X_5X_6$	$X_4X_5X_6X_1$	$X_5X_6X_1X_2$	$X_6X_1X_2X_3$	$X_1X_2X_3X_4$
④	X_1X_3	X_2X_4	X_3X_5	X_4X_6	X_5X_1	X_6X_2

由上可知：

1.每經2次〝運算〞之後所得之新數，其奇偶性質的排列與舊數相等。

2.欲得到最後六個數皆爲0，則此X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6必定同爲奇數或同爲偶數或是奇偶相間才可能成立。

3.但是，六個數同奇，同偶或奇偶相間，不見得成立，若要成立必在①步驟就成立，否則就會循環。

五、結　語

(一)綜合上述討論知：2^n個數之〝運算〞必成立，奇數個必不成立，偶數個不一定成立。

(二)在Ingeunity in Mathematics中Dr. Ross Honsberger利用窮舉法只證明此方塊數論$n=4$之情形，而我們利用整數的奇偶性質加以擴充，推廣至2^n邊形。

(三)這篇科展是我們偶然在時報科學專欄看到的一則數學問題，首先我們以實驗的方式去驗證此〝運算〞是否成立，發覺怎麼試都成立，於是找老師商量如何來探討。並請任電腦課的老師找來二位高一的學弟設計電腦程式來嘗試此〝運算〞是否成立。亦請數學老師列出有關書籍供我們參考斷斷續續摸索了近半年才完成此作品，絕無抄襲！

六、展　望

(一)1.若2^n爲正有理數，則經此〝運算〞都可得到方塊數都爲〝0〞，因爲由有理數的定義，我們可得到2^n個分數，而我們將其通分，然後將其分母視而不見，則出現2^n個正整數，這個規則也就成立了。

2.因爲此〝運算〞是指鄰角數值差的絕對值，可見所有的正負有理數此〝運算〞皆會成立。

3.我們想由有理數推廣至無理數，但電腦設計無法測試而擱置。

(二)此〝運算〞要達到皆爲〝0〞最多到底要〝運算〞幾次，我們猜想該有規則性，仍有待探討。

(三)充分條件之證明較嚴密必要條件的證明還有待闡釋，也因爲工程太大只好先割捨。不周全之處就留待學弟人們繼續努力吧！

七、文獻及參考資料

(一)時報科學專欄、摘錄自芝加哥大學數學教授沙利所收集的趣味數學，張茂伯