盤根錯結(Ⅱ)

高中組數學科第二名

省立板橋高級中學

作　　者：譚國強、徐嘉慧

指導教師：楊朗生

一、研究動機

在第三十三屆科展中，巧遇結的問題。於是便在第三十四屆科展〝盤根錯結〞中展開研究，於全國科展中由朱建正教授的指引，使我們對結的領域認識更深，並強調了結的分類仍是個未解的謎。而在上屆科展亦有接解類似分類的工作，故本作品延續上屆作品來展開研究。

二、研究目的

利用簡單的拓撲概念及高中知識來完成分類的工作。

三、研究設備或器材

繩結

四、研究過程或方法

(一)預備知識

1.利用定理或其他

(1)Jonse polynomail

(2)Abel group

(3)Jordan定理

2.基本知識

(1)直線係一點集圖形

(2)結是二維的（在$\mathbb{R}^2$中）

(3)存在$\mathbb{R}^3$中的結同胚於圓周

(4)存在$\mathbb{R}^2$中的結爲一點線圖，並有一基本不變量

$$V-E+F=2 \quad (V：點數，E：稜數，F：面數)$$

(5)結的分類是拓撲中的同痕問題

3.名詞解釋

(1)$\mathbb{R}^n$：在n維中

(2)$\mathbb{R}^n_T$：結T在n維中

(3)x(λ)子結：x(λ)子結表╳(╳)兩部份

(4)h：同胚映射（homeomorphic mapping）

(5)p:投影（project）

(6)同痕：A與B同痕是指在包含A與B的圖形或空間中且AB同胚若A與B可經合理的形變後AB可互變稱之。

(7)Jonse polynomail（琼斯多項式）：利用二個公設將結化成多項式的形式。

(二)研究過程

在研究展開之前，我們尋找了許多的參考資料，發現均把分類的工作化做代數的形式來做，但卻無法把分類做出一完美的結果，也就是不構成充分必要條件。所以我們先從几何部份着手，並找尋同痕的充要條件，進而分類。以下就是我們的推導（對結來說）：

1.有一集合S：$\{P_T, P_{T1}, P_{T2} \cdots\cdots\}$

P_{Tn}為結的映射集合

2.設有二集合$P_T, P_{T'}$其中

P_T：$\{\mathbb{R}^3_{Tn}\ n \in R \mid P：\mathbb{R}^3_{Tn} \to \mathbb{R}^2_T\}$　(P^{-1}不存在)

$P_{T'}$：$\{\mathbb{R}^3_{T'n}\ n \in R \mid P：\mathbb{R}^3_{T'n} \to \mathbb{R}^2_T\}$

3.若$h：\mathbb{R}^2_T \to \mathbb{R}^2_{T'}$　則　$f：P_T \to P_{T'}$　（f^{-1}存在）

4.$h：\mathbb{R}^2_T \to \mathbb{R}^2_{T'} \rightleftharpoons h：V_n \to V_{n'}$　（$V_n \in \mathbb{R}^2_T$　$V'_n \in \mathbb{R}^2_{T'}$）

5.$P^{-1}：\mathbb{R}^2_T \to P_T$　($P^{-1}：\mathbb{R}^2_{T'} \to P_{T'}$)

$P^{-1}：\mathbb{R}^2_T \to \{x, \lambda\}$

6.若$P^{-1}：\mathbb{R}^2_x \to \{x, \lambda\}$為一對一

（$P^{-1}：\mathbb{R}^2_x \to x$或$P^{-1}：\mathbb{R}^2_x \to \lambda$）

由4可整理為

(i)$P^{-1}：\mathbb{R}^2_x \to x$　($P^{-1}:\mathbb{R}^2_x \to \lambda$)

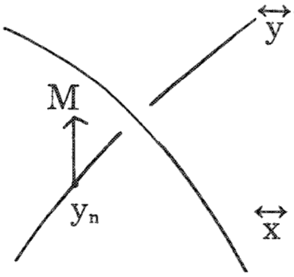
(ii)$h：V_n \to V'_n$　（在P_T與$P_{T'}$中）

可得　a.子結的標示法

b.同痕的充要條件

下面我們就介紹子結的標示法：

下圖，有一子結$\mathbb{R}^3_x$，其中$\mathbb{R}^3_x$：$\{\overleftrightarrow{x}, \overleftrightarrow{y}\}$則$\mathbb{R}^3_r$可表為

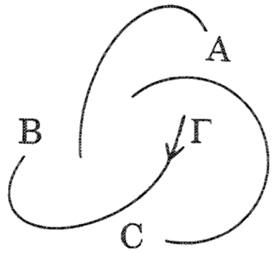


$M:y_n\to x$　(M不可逆)

其中

$\overleftrightarrow{y}$：$\{y_n|n\in R\}$

接下來我們要證明充要條件：k：$\mathbb{R}^3_T\to\mathbb{R}^3_{T'}\Leftrightarrow$ h：$\mathbb{R}^2_T\to\mathbb{R}^2_{T'}\Lambda P^{-1}$存在（略）上面的討論是較爲理論的，現在我們就可以利用一數學的架構來標示結（矩陣標示法）：以Trefoil爲例



$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & -1 & D\\ D & 1 & -1\\ -1 & D & 1\end{bmatrix}_T$$

在上圖中我們給Trefoil一個方向Γ，使其爲一有向結。我們視Trefoil爲一集合T，T：$\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}\}$且彼此的關係爲

m：$A\to\overrightarrow{BC}$　m：$B\to\overrightarrow{CA}$　m：$C\to\overrightarrow{AB}$

在矩陣Γ中：$\overrightarrow{AB}$爲第一列，$\overrightarrow{BC}$爲第二列，$\overrightarrow{CA}$爲第三列（列代表向量）點ABC爲第一二三行（行代表點）

符號〝1〞：向量的始點

〝－1〞：向量的終點

〝D〞在此處的點（行）與向量（列）有M的存在

〝O〞其餘的元

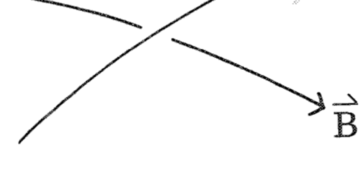
在這裡要補充的是D的兩手性與次序性：

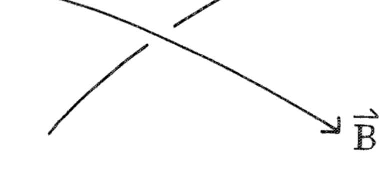
(a)兩手性：爲使矩陣滿充標示結的目標而成

符號：D_2,D_R

定義：外積的方式：

(outer product)⇒（在上方的向量）×（在下方的向量）



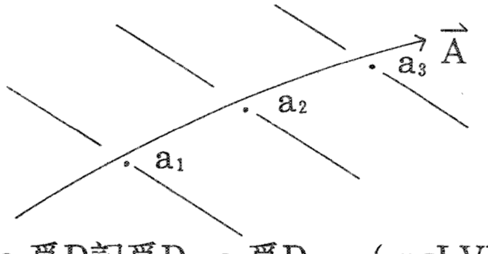


$\vec{A}\times\vec{B}$爲⊗⇒D_L　　　　$\vec{B}\times\vec{A}$爲⊙⇒D_R

(b)次序性

符號：1,2,3……

定義：映射m為多對一時



同時存在

$m{:}a_1 \to \vec{A}$

$m{:}a_1 \to \vec{A}$

$m{:}a_1 \to \vec{A}$

在a_1為D記為D_{n1},a_2為D_{n2}…（$n \in LVR$）

現在我們把矩陣的基本性質寫出

1.一個述敘結的矩陣必為$n \times n$階，n為子結數目

2.一個n階方陣其元表只有$1, -1, 0, D$四種

3.在每行（列）中$1, -1$只可出現一次，而在每行中$1, -1, D$只可出現一次

4.結的運算（關於矩陣）只有行（列）運算，加法，乘法，及無結子結

以上，我們就把矩陣的介紹敘述完畢。同時在對應時也構成充要條件。但是會由於某些因素使矩陣有許多形式，但這些形式會構成一個集合，且這個集合中的元素都代表同一個結，在元素彼此間會互相有種關係，並構成一運算體系（但沒有群Group），我們只是把動作轉換成數學模式而已，以下就是運算的介紹：

A. 行（例）運算：

符　　號：無

代表意義：有二結$\mathbb{R}^3_A$，$\mathbb{R}^3_B$。由於定義點的位置時使用的符號不同，而為使對應成立，故必將點移動，運算由此產生。

舉　　例：略

B. 加法：

符　　號：〝＋〞

運算方式：$1+0=1$

$D_n+0=D_n$

$1+(-1)=0$

$0+0=0$

$(-1)+0=-1$　（交換律存在）

舉　　例：略

代表意義：因為有無結子結的產生，才會有加法，而加法的操作定義不過只是一拉（抽）繩子的動作而已。

C. 乘法：

符　　號：〝×〞

運算方式：$(-1)\times M(\mathbb{R}^3_k)=M(\mathbb{R}^3_k)\times(-1)$　$M(\mathbb{R}^3_k)$表一矩陣

$(-1)\times 1=-1$

$(-1)\times(-1)=1$

$(-1)\times D_n=D_n$

$(-1)\times 0=0$　（交換律存在）

舉　　例：略

代表意義：1.方向定義相反

2.形變後方向被改變

D. 無結子結：

符　　號：無

運算方式：加法

無結子結有三個，以下以N_1,N_2,N_3代之）

(a)N_1型

$$M(N_1)=\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc} \cdots 1 & \overset{\to 複元}{\boxed{-1,D_n}} & \cdots \end{array}\right]_{k\times k} & \to 第n列 \\ \quad\quad\quad\quad\uparrow & \\ \quad\quad\quad\quad 第k行 & \end{array}$$

在第Nnk元中出現了$-1,D_n$的符號，我們叫他爲複元。複元一出現，必爲N_1子結。

運算規則：第N列與第$(N+1)$列相加，使距陣爲$(k-1)\times k$階，可在第m行中發現只有D_n,0兩元，此行略去不寫，則矩陣爲$(k-1)\times(k-1)$階

(b)N_2型

$$m(N_2)=\begin{array}{cccccc} \left[\begin{array}{ccccc} \cdots\cdots 1 \quad -1 & \cdots D_{nx} & D_{ny}\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & 1 & -1\cdots\cdots \\ & \vdots & \vdots \end{array}\right]_{S\times S} & \begin{array}{l}\to 第n列 \\ \to 第k行\end{array} \\ \quad\quad\quad\uparrow\quad\uparrow & \\ \quad\quad 第m行\quad 第m+1行 & \end{array}$$

運算規則：第k列＋第$(k+1)$列＋第$(k-1)$列，使矩陣成爲$(S-2)\times S$階。同時可發現在m及$(m+1)$行中只有D_n與0，此兩行略去，故矩陣爲$(S-2)\times(S-2)$階。

(c)N_3型

$$m(N_3)=\left[\begin{array}{ccccccc} \cdots 1 & -1 & \cdots & D_{nx} & \cdots & D_{ny} & \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ & & & 1 & -1\ \cdots & & D_n \\ & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & & 1 & -1 \end{array}\right]\begin{array}{l}\rightarrow 第n列 \\ \\ \rightarrow 第S列 \\ \\ \rightarrow 第W列\end{array}$$

$\uparrow$ 第1行　$\uparrow$ 第D行　$\uparrow$ 第D+1行

運算規則：將第n列的D_{ny}元移至第S－1列中的第D行再把第S列的D_{nx}元移至第n列中的第(D＋1)行中的位置。

（＊：上述的部份僅是盤根錯結Ⅱ中較重要的部份，在文字部分較爲簡略，如果有興趣的讀者有意，可向作者索取取完整的說明書）。

五、研究發展

在研究過程中，我們用矩陣（matrix）來做爲記錄結的骨架。實際上不妥。而今後的目標是能自成一數學架構（如Jonse polynomail），進而完成分類的工作。

由於我們是利用佈局的方式來做，所以在運算的部份並沒有證明唯一，因爲我們純粹只對圖形間的變動利用符號表示和代數運算無關。

六、結　論

1.利用Jonse polynomail了解x與λ子結的重要。

2.將x與λ投影至平面上，並推演至$\mathbb{R}^3$結上，發現了結的映射集合。

3.若$\mathbb{R}^3_k$與$\mathbb{R}^3_{k'}$同胚則P_k與$P_k{}'$中的元素會一一對應。

4.將$\mathbb{R}^3_k$與$\mathbb{R}^3_{k'}$投影至球面上得

$$h:\mathbb{R}^2_k \rightarrow \mathbb{R}^2_{k'} \Leftrightarrow h:v \rightarrow V'$$

5.在合理的形變下

a.VEF的數目不變

b.子結的形態不變

6.由4.5.我們找出同痕的充要條件

兩結同痕 $\Leftrightarrow$ 其$\mathbb{R}^2$結同胚且子結對應相同。

7.由6我們利用一個矩陣來記錄結

8.找出矩陣（關於結）的運算

9.利用D的兩手性及矩陣中的位置，做爲結的不變量，因此不變量可以運算。

七、參考資料

數學傳播季刊第十七卷第四期－中研院

拓撲學奇趣－亞東

數學是什麼－徐氏

理科數學下－國立編繹館

Knots and Links－Dr. Rofson

數學大辭典－幼獅

第三十四屆科學展覽說明書〝盤根錯結〞

評　語

本作品實係譚國強一人之第二年的研究。第一年的作品並未數學化，但第二年有顯着的品質上的躍遷，結論（Rnot　theory）本來就是很困難的高等數學特論，作者給出同痕的定義並發展出一套代數的表現方式表現同痕的結。從打結，紀錄結的圖示，到代數表現，作者經歷了從現象到數學化的艱苦歷程。作者的專注值得讚賞。本作品的方向很有發展性，值得進一步給予支持。