三角形的內切橢圓有多少

高中組數學科第一名

新竹高級中學　　作　者：賴堯暉、陳世芳、曾楓憶
指導教師：何聖宗

一、研究動機

在“數學傳播”第18卷3期（55－65頁）『三角形的內切橢圓』一文中，我們探討了三角形的內切橢圓的一些有趣性質，也留下了一些當時未能解決的有趣問題，我們想嘗試找出那些問題的答案。

二、研究內容

在“數學傳播”18卷3期55－65頁『三角形的內切橢圓』一文中（以下我們簡稱之爲“傳播”），我們發現了

定理一：自橢圓外一點作兩切線與橢圓中心所成之兩三角形面積相等。

定理二：三角形內切橢圓在各邊之切點將三邊所分線段比值之乘積爲1。

一個很有趣的問題是：定理二之逆敘述是否成立？換言之，給三角形三邊上三個分點所分線段比值之乘積爲1，是否存在橢圓內切三角形於此三點？如果考慮中點，則確實可找到切三邊於中點的橢圓，而且有下述性質

定理五′：設f(x)表複係數三次多項式，且其三個零位在複數平面上不共線，則以其導函數$f'(x)$的二個零位爲焦點的橢圓中有一個恰爲以$f(x)=0$的三根爲頂點之三角形的內切橢圓，且切點均爲中點。

當三角形爲等腰時，我們在“傳播”中證明了以下兩個定理：

定理四：等腰$\triangle ABC$腰上任給二對稱點$P_1,P_2(\overline{AP_1}=\overline{AP_2})$，都可找到一個橢圓切兩腰於$P_1,P_2$，且切底邊$\overline{BC}$於其中點。

換言之，定理二之逆命題在此特殊情形是成立的。

定理六：設等腰三角形之頂點爲$\alpha, \pm\gamma i$，考慮多項式

$$f(x)=(x-\alpha)^m(x^2+\gamma^2)^n,(m,n\in N)$$

若$f'(x)=(x-\alpha)^{m-1}(x^2+\gamma^2)^{n-1}g(x)$，其中$g(x)$爲二次多項式，則$g(x)$的零位爲焦點的橢圓中有一個內切此三角形於底邊中點，同時在兩腰上之切點恰將兩腰長分別分成m：n及n：m。

我們自然也可以問：一般的三角形可不可以用類似的方法來找內切橢圓？在

“傳播”中我們看了以下例子：

例：考慮頂點爲$A(0,1)$, $B(-1,0)$, $C(2,0)$的三角形，考慮以$-1,2,i$爲零位的多項式

$$f(x)=(x+1)(x-2)^2(x-i)^3,$$

則 $$f'(x)=3(x-2)(x-i)^2g(x),$$

此處 $g(x)=2x^2-(1+i)x-2$的零位爲$\frac{1\pm\sqrt{\sqrt{65}+8}}{4}+\frac{1\pm\sqrt{\sqrt{65}-8}}{4}i$

；以此兩點爲焦點的一個橢圓Γ

$$(x-\frac{1}{4})^2+17(y-\frac{1}{4})^2-2(x-\frac{1}{4})(y-\frac{1}{4})=1，$$

與$\triangle ABC$之三邊相切於O,P,Q，且切點將三邊所分線段滿足$\overline{BO}:\overline{CO}=1:2$, $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$, $\overline{AQ}:\overline{CQ}=3:2$。

由以上例子，我們可以相信定理六能推廣到一般的三角形。換言之，給一個頂點爲$z_1,z_2,z_3(\in\mathbb{C})$的三角形，考慮多項式$f(t)=(t-z_1)^k(t-z_2)^m(t-z_3)^n$，取導式$f'(t)=(t-z_1)^{k-1}(t-z_2)^{m-1}(t-z_3)^{n-1}g(t)$，則二次式

$$g(t)=k(t-z_2)(t-z_3)+m(t-z_1)(t-z_3)+n(t-z_1)(t-z_2)$$

的零位可能是某一內切橢圓的焦點。如果考慮多項式$f(t)$，我們需設k,m,n爲正整數才有意義。但對多項式g而言，k,m,n可以是任何（正）實數。

在“傳播”第62頁定理六之前的討論中，如果我們不取多項式$f(x)=(x-\alpha)^m(x^2+\gamma^2)^n$與它的導式，而直接考慮二次多項式$g(x)=(m+2n)x^2-2\alpha nx+m\gamma^2$，（$m,n$是任意正實數，不必是正整數），顯然所有的討論仍然成立。g的零位恰爲內切$\triangle ABC$於P_1,P_2,O的橢圓之焦點，也就是說，定理六可推廣爲

<u>定理六'</u>：設等腰三角形之頂點爲$\lambda,\pm\mu i$，考慮二次多項式$g(t)=(\alpha+2\beta)t^2-2\lambda\beta t+\alpha\mu^2$，則以$g$的零位爲焦點的橢圓中有一個內切此三角形於底邊中點，同時在兩腰上的切點將兩腰分別分成$\alpha:\beta$及$\beta:\alpha$的線段。

由於這個性質，當討論一般的三角形時，我們也不必取多項式$f(t)=(t-z_1)^k(t-z_2)^m(t-z_3)^n$而直接考慮$g(t)=\alpha(t-z_2)(t-z_3)+\beta(t-z_1)(t-z_3)+\gamma(t-z_1)(t-z_2)$（此時$\alpha,\beta,\gamma$可爲任意正實數）。

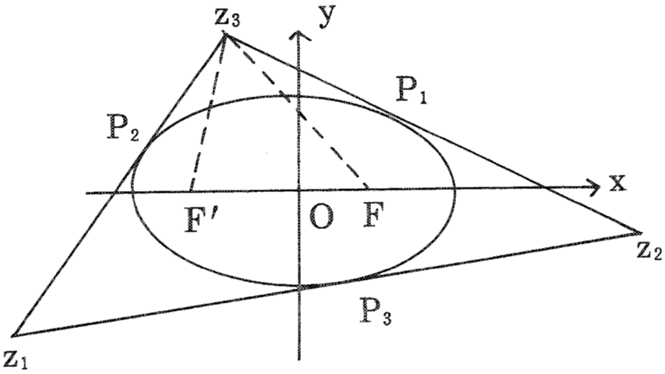
讓我們先看看橢圓$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的一個外切三角形，由“傳播”的計算，若

切點爲$P_1(a\cos\theta_1, b\sin\theta_1)$, $P_2(a\cos\theta_2, b\sin\theta_2)$, $P_3(a\cos\theta_3, b\sin\theta_3)$（可設$0\leqslant\theta_1<\theta_2<\theta_3<2\pi, 0<\theta_2-\theta_1, \theta_3-\theta_2<\pi<\theta_3-\theta_1<2\pi$），則頂點之複數坐標爲

$$z_1=\frac{1}{\sin(\theta_3-\theta_2)}(a(\sin\theta_3-\sin\theta_2)+ib(\cos\theta_2-\cos\theta_3))$$

$$z_2=\frac{1}{\sin(\theta_1-\theta_3)}(a(\sin\theta_1-\sin\theta_3)+ib(\cos\theta_3-\cos\theta_1))$$

$$z_3=\frac{1}{\sin(\theta_2-\theta_1)}(a(\sin\theta_2-\sin\theta_1)+ib(\cos\theta_1-\cos\theta_2))$$



圖一

而切點將三邊分成$\overline{z_1P_3}：\overline{P_3z_2}=\alpha：\beta$，$\overline{z_2P_1}：\overline{P_1z_3}=\beta：\gamma$，$\overline{z_3P_2}：\overline{P_2z_1}=\gamma：\alpha$，其中

$$\alpha=\frac{ab}{2}\frac{1-\cos(\theta_3-\theta_2)}{\sin(\theta_3-\theta_2)}，\beta=\frac{ab}{2}\frac{1-\cos(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_1-\theta_3)}，\gamma=\frac{ab}{2}\frac{1-\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$$

考慮二次多項式

$$\begin{aligned}g(t)&=\alpha(t-z_2)(t-z_3)+\beta(t-z_1)(t-z_3)+\gamma(t-z_1)(t-z_2)\\&=(\alpha+\beta+\gamma)t^2-[\alpha(z_2+z_3)+\beta(z_3+z_1)+\gamma(z_1+z_2)]t+(\alpha z_2z_3+\beta z_3z_1+\gamma z_1z_2)\end{aligned}$$

我們用根與係數的關係來探討g的零位。經過冗長的計算，我們得到

$$\alpha(z_2+z_3)+\beta(z_3+z_1)+\gamma(z_1+z_2)=0$$

$$\alpha z_2z_3+\beta z_3z_1+\gamma z_1z_2=-(\alpha+\beta+\gamma)(a^2-b^2)=-(\alpha+\beta+\gamma)c^2$$

因此　$g(t)=(\alpha+\beta+\gamma)(t^2-c^2)$

換言之，我們證得

<u>定理A</u>：設三角形頂點爲$z_1,z_2,z_3(\in\mathbb{C})$，某一內切橢圓$\Gamma$在三邊$\overline{z_1z_2},\overline{z_2z_3},\overline{z_3z_1}$之切點$P_3,P_1,P_2$分三邊成$\overline{z_1P_3}：\overline{P_3z_2}=\alpha：\beta$，$\overline{z_2P_1}：\overline{z_3P_1}=\beta：\gamma$，$\overline{z_3P_2}：\overline{P_2z_1}=\gamma：\alpha$則多項式$g(t)=\alpha(t-z_2)(t-z_3)+\beta(t-z_1)(t-z_3)+\gamma(t-z_1)(t-z_2)$之零位恰爲$\Gamma$的兩焦點。

我們更關心的問題是：這個定理的逆定理是否成立？以g的零位爲焦點的橢圓是否會有一個恰好內切$\triangle z_1z_2z_3$（且分三邊爲$\alpha:\beta,\beta:\gamma,\gamma:\alpha$）？

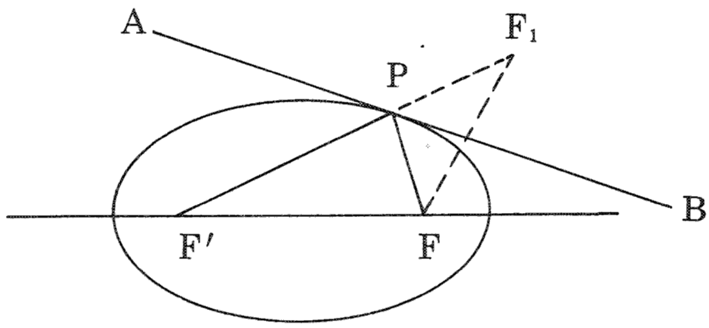
我們先來證明在“傳播”中曾經敘述但未證明的下述事實：

1. P爲橢圓外一點，自P作橢圓的二條切線切橢圓於A,B;F,F′爲橢圓之兩焦點，則$\angle APF'=\angle BPF$。

與前面的討論一樣，我們選取坐標使橢圓爲標準形，在圖一中，我們利用複數幾何來證明$\angle P_1z_3F=\angle P_2z_3F'$。我們沿用前面的符號，把點都用複數來表示（$F=c,\ F'=-c$）則$\angle P_1z_3F$就是複數$\dfrac{z_3-P_1}{z_3-F}$的輻角，而$\angle P_2z_3F'$爲複數$\dfrac{z_3-F'}{z_3-P_2}$的輻角，計算得知$(\dfrac{z_3-P_1}{z_3-F})/(\dfrac{z_3-F'}{z_3-P_2})=\dfrac{1-\cos(\theta_1-\theta_2)}{2}$，這是一個正實數，所以$\arg(\dfrac{z_3-P_1}{z_3-F})=\arg(\dfrac{z_3-F'}{z_3-P_2})$，亦即$\angle P_1z_3F=\angle P_2z_3F'$。

其次，正如我們在“傳播”中解釋的，橢圓的切線有以下兩個重要性質。

2. 橢圓之任意切線與過切點的兩焦半徑所夾銳角相等。此事實一般書上都有證明，我們可以這樣看：直線AB與橢圓的切點P是此直線上與焦點F,F′距離和爲最小的點，若以F_1表F對AB的對稱點，則由距離和爲最小的性質得知$F'PF_1$爲一直線，所以$\angle APF'=\angle F_1PB=\angle FPB$（因爲PB垂直平分$\overline{FF_1}$）。



圖二

反之，若已知AB與橢圓相切，而P爲直線AB上一點使得$\angle APF'=\angle FPB$，則P點就是切點（因爲P與F,F′距離之和最小，而切點也有同樣的性質），以下我們將利用此性質來找出已知與某一橢圓相切的直線的切點。

3. 給定兩相異點F,F′及一直線L，且線段$\overline{FF'}$與L不相交，則恰有一橢圓以F,F′爲焦點且與L相切。

（因爲橢圓完全由二焦點及其上一點來決定，令P點爲L上與F,F′距離之和爲最小的點（只要取F對L的對稱點F_1，連接$F'F_1$與L的交點即爲P)，則以F,F′爲焦點且過P之橢圓Γ即爲所求。由P點的選取知L只與Γ在P相交，故P爲切點。）

此外，由於過橢圓Γ外一點恰可作此橢圓的兩條切線，若F,F'為Γ的焦點，過A的一條直線切Γ於P，$\overleftrightarrow{AB}$ 為另一直線且$\angle PAF=\angle BAF'$，則$\overleftrightarrow{AB}$與Γ也相切，以下我們將利用此簡單性質來證明某一直線與橢圓相切。

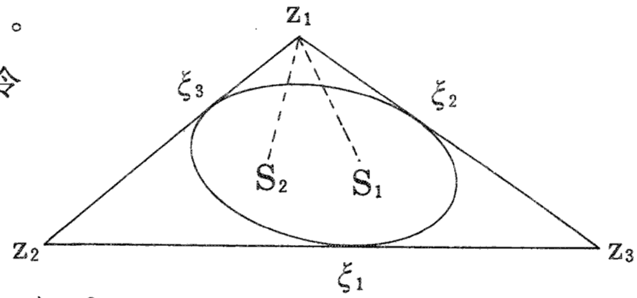
現在給定一平面上不共線的三點z_1,z_2,z_3，設多項式$g(t)=\alpha(t-z_2)(t-z_3)+\beta(t-z_1)(t-z_3)+\gamma(t-z_1)(t-z_2)$的零位為$\zeta_1,\zeta_2$，（我們設$\alpha,\beta,\gamma$為正）

因此$\alpha(t-z_2)(t-z_3)+\beta(t-z_1)(t-z_3)+\gamma(t-z_1)(t-z_2)=(\alpha+\beta+\gamma)(t-\zeta_1)(t-\zeta_2)$

在此式中令$t=z_1$，則得$\alpha(z_1-z_2)(z_1-z_3)=(\alpha+\beta+\gamma)(z_1-\zeta_1)(z_1-\zeta_2)$

因此$(\frac{z_1-z_2}{z_1-\zeta_1})/(\frac{z_1-\zeta_2}{z_1-z_3})=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha}\in\mathbb{R}$，$>0$，所以$\arg(\frac{z_1-z_2}{z_1-\zeta_1})=\arg(\frac{z_1-\zeta_2}{z_1-z_3})$

令Γ為以ζ_1,ζ_2為焦點而與直線$\overleftrightarrow{z_1z_2}$相切的橢圓，則$\angle z_2z_1\zeta_1=\angle z_3z_1\zeta_2$，因此根據前面的觀察，我們得知$\Gamma$也與$\overleftrightarrow{z_1z_3}$相切，同理可證$\Gamma$與$\overleftrightarrow{z_2z_3}$相切，換言之，我們得到了$\triangle z_1z_2z_3$的一個內切橢圓$\Gamma$。



圖三

現在讓我們來找出Γ在各邊的切點，令

$$\xi_3=\frac{\alpha z_2+\beta z_1}{\alpha+\beta}$$

我們將證明ξ_3就是$\overleftrightarrow{z_1z_2}$與$\Gamma$的切點。

由ξ_3的定義，我們得$\alpha(\xi_3-z_2)+\beta(\xi_3-z_1)=0$

因此 $\frac{\zeta_1-\xi_3}{z_1-\xi_3}\cdot\frac{\zeta_2-\xi_3}{z_2-\xi_3}$

$$=\frac{\alpha(\xi_3-z_2)(\xi_3-z_3)+\beta(\xi_3-z_1)(\xi_3-z_3)+\gamma(\xi_3-z_1)(\xi_3-z_2)}{(\alpha+\beta+\gamma)(z_1-\xi_3)(z_2-\xi_3)}$$

$$=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\ (\in\mathbb{R},\ >0)$$

所以 $\angle z_1\xi_3\zeta_1=\arg(\frac{\zeta_1-\xi_3}{z_1-\xi_3})=\arg(\frac{z_2-\xi_3}{\zeta_2-\xi_3})=\angle z_2\xi_3\zeta_2$

由於我們已經證明Γ與直線$\overleftrightarrow{z_1z_2}$相切，根據前述性質2的逆命題，$\xi_3$就是$\Gamma$與$\overleftrightarrow{z_1z_2}$的切點，同理可證$\Gamma$切$\overleftrightarrow{z_2z_3}$於$\xi_1=\frac{\beta z_2+\gamma z_3}{\beta+\gamma}$，切$\overleftrightarrow{z_1z_3}$於$\xi_2=\frac{\alpha z_1+\gamma z_3}{\alpha+\gamma}$，我們證明了下述定理：

<u>定理B</u>：設z_1,z_2,z_3為複數平面上不共線的三點，設多項式
$g(t)=\alpha(t-z_2)(t-z_3)+\beta(t-z_1)(t-z_3)+\gamma(t-z_1)(t-z_2)$之零位為$\zeta_1,\zeta_2$,($\alpha,\beta,\gamma>0$)，則以$\zeta_1,\zeta_2$為焦點的橢圓中有一個是$\triangle z_1z_2z_3$的內切橢圓，且此橢圓在三邊$\overline{z_1z_2},\overline{z_2z_3},\overline{z_3z_1}$的切點$\xi_3,\xi_1,\xi_2$將邊長分為$\overline{z_1\xi_3}:\overline{\xi_3z_2}=\alpha:\beta$

，$\overline{z_2\xi_1}:\overline{\xi_1 z_3}=\beta:\gamma$，$\overline{z_3\xi_2}:\overline{\xi_2 z_1}=\gamma:\alpha$。此定理加上西瓦定理以及"傳播"的定理二就得到

主要定理：存在一個橢圓Γ內切△ABC的三邊BC,AC,AB於點D,E,F的充分且必要條件是AD,BE,CF交於（三角形內）一點。

在定理B中，如果取$\alpha=k,\beta=m,\gamma=n$爲正整數，則多項式$f(t)=(t-z_1)^k(t-z_2)^m(t-z_3)^n$的導式爲$f'(t)=(t-z_1)^{k-1}(t-z_2)^{m-1}(t-z_3)^{n-1}g(t)$故得。

推論：設z_1,z_2,z_3爲不共線的三點，f,g如上，則以g的零位爲焦點的橢圓中有一個內切$\triangle z_1z_2z_3$，且切點將三邊分成k：m,m：n,n：k的線段。

三、討　論

在前面的討論中，我們設α,β,γ爲正。其實就多項式g(t)而言，我們不必做此假設，由於我們關心的是g的零位，可以設α,β,γ同號（此時可設均爲正）；或一個與另二個異號，例如α爲正，而β,γ均爲負，讓我們先設$\alpha+\beta>0,\alpha+\gamma>0$，且$\alpha+\beta+\gamma>0$，利用類似的討論（但需注意在兩複數$w_1,w_2$之乘積爲負實數時，$w_1$與$w_2$之輻角互補），我們會得到△ABC的一個傍切橢圓分別切z_1z_2及z_1z_3於延長線上一點ξ_3,ξ_2，而切z_2z_3於線段上一點ξ_1，此時分點的比值關係應該用向量來表示：

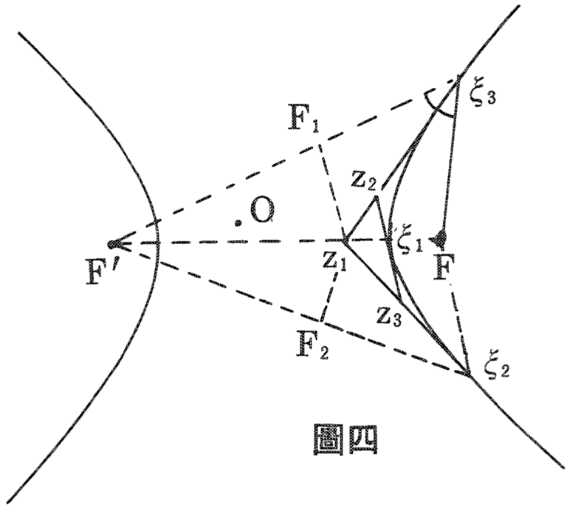
$$\overline{z_1\xi_3}:\overline{\xi_3 z_2}=\alpha:\beta，\overline{z_2\xi_1}:\overline{\xi_1 z_3}=\beta:\gamma，\overline{z_3\xi_2}:\overline{\xi_2 z_1}=\gamma:\alpha。$$

由於ξ_3,ξ_2分別是$\overline{z_1z_2},\overline{z_1z_3}$的外分點，因此我們需假設$\alpha+\beta>0,\gamma+\alpha>0$。

例：令$z_1=i,\ z_2=-1,\ z_3=1,\ \alpha=3,\ \beta=-2,\ \gamma=-2$；此時除了$\alpha+\beta+\gamma=-1$外，其他條件均滿足，而$g(t)=3(t-1)(t+1)-2(t-i)(t+1)-2(t-i)(t-1)$的零位爲$(2\pm\sqrt{7})i$；以此兩點爲焦點的橢圓不可能與$\triangle z_1z_2z_3$相切！但以$(2\pm\sqrt{7})i$爲焦點的雙曲線$\dfrac{(y-2)^2}{4}-\dfrac{x^2}{3}=1$傍切三角形，切點滿足前述類似性質。此現象在$\alpha>0$；$\beta,\gamma<0$；$\alpha+\beta,\alpha+\gamma>0$；$\alpha+\beta+\gamma<0$時均成立。讓我們先來看看前述的一些橢圓切線所具有的性質在雙曲線情形是否成立。

過雙曲線$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$上一點$(a\sec\theta, b\tan\theta)$）的切線方程爲$a\sin\theta\, y-bx+ab\cos\theta=0$。給三相異點$\xi_j=(a\sec\theta_j, b\tan\theta_j)(j=1,2,3)$，則過此三點的切線兩兩相交於

$$z_3=\left(\frac{a\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin\theta_2-\sin\theta_1},\frac{b(\cos\theta_1-\cos\theta_2)}{\sin\theta_2-\sin\theta_1}\right),$$



圖四

$$z_2=\left(\frac{a\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin\theta_1-\sin\theta_3},\frac{b(\cos\theta_3-\cos\theta_1)}{\sin\theta_1-\sin\theta_3}\right),$$

$$z_1=\left(\frac{a\sin(\theta_3-\theta_2)}{\sin\theta_3-\sin\theta_2},\frac{b(\cos\theta_2-\cos\theta_3)}{\sin\theta_3-\sin\theta_2}\right)。$$

計算得$\triangle Oz_1\xi_2$面積$=\dfrac{ab(1-\cos(\theta_3-\theta_2))}{2|\sin\theta_3-\sin\theta_2|}=\triangle Oz_1\xi_3$面積，

$\triangle Oz_1\xi_3$面積$=\dfrac{ab(1-\cos(\theta_1-\theta_3))}{2|\sin\theta_1-\sin\theta_3|}=\triangle Oz_2\xi_1$面積，

$\triangle Oz_3\xi_2$面積$=\dfrac{ab(1-\cos(\theta_2-\theta_1))}{2|\sin\theta_2-\sin\theta_1|}=\triangle Oz_2\xi_1$面積。

令 $\alpha=\dfrac{ab}{2}\dfrac{1-\cos(\theta_3-\theta_2)}{\sin\theta_3-\sin\theta_2}$，$\beta=\dfrac{ab}{2}\dfrac{1-\cos(\theta_1-\theta_3)}{\sin\theta_1-\sin\theta_3}$，$\gamma=\dfrac{ab}{2}\dfrac{1-\cos(\theta_2-\theta_1)}{\sin\theta_2-\sin\theta_1}$，則$\overline{z_1\xi_2}:\overline{\xi_2z_3}=|\alpha|:|\gamma|$，$\overline{z_3\xi_1}:\overline{\xi_1z_2}=|\gamma|:|\beta|$,$\overline{z_2\xi_3}:\overline{\xi_3z_1}=|\beta|:|\alpha|$。以$F_1,F_2$表$F$對$\overline{z_1\xi_3}:\overline{z_1\xi_2}$的對稱點，則$\angle z_2\xi_3F=\angle z_2\xi_3F'$,$\angle z_2\xi_1F=\angle z_2\xi_1F'$，又因$\overline{F'F_1}=\overline{F'\xi_3}-\overline{F\xi_3}=2a=\overline{F'\xi_2}-\overline{F\xi_2}=\overline{F'F_2}$,$\overline{F_1z_1}=\overline{Fz_1}=\overline{F_2z_1}$，故$\triangle F'F_1z_1\cong\triangle F'F_2z_1$，因此$\angle\xi_3F'z_1=\angle\xi_2F'z_1$，同理$\angle\xi_3Fz_1=\angle\xi_2Fz_1$，

因此 $\dfrac{(\xi_2-c)(\xi_3-c)}{(z_1-c)^2}\in\mathbb{R}$

同理 $\dfrac{(\xi_2+c)(\xi_3+c)}{(z_1+c)^2}$，$\dfrac{(z_1-\xi_2)^2}{(c-\xi_2)(-c-\xi_2)}$，$\dfrac{(z_1-\xi_3)^2}{(c-\xi_3)(-c-\xi_3)}\in\mathbb{R}$，

將此四實數相乘得 $\left(\dfrac{(z_1-\xi_2)(z_1-\xi_3)}{(z_1-c)(z_1+c)}\right)^2$

故 $\dfrac{(z_1-\xi_2)(z_1-\xi_3)}{(z_1-c)(z_1+c)}$ 爲實數（可能爲負）

，因此$\angle\xi_2z_1F$與$\angle\xi_3z_1F'$互補或相等（兩切點亦可分別在雙曲線的兩支上）。

因此前面討論的結果在雙曲線情形也成立，換言之，以$g(t)=\alpha(t-z_2)(t-z_3)+\beta(t-z_1)(t-z_3)+\gamma(t-z_1)(t-z_2)$的零位爲焦點的一雙曲線傍切三角形，且切點滿足前述比例關係。此現象在$\alpha>0$；$\beta,\gamma<0$；$\alpha+\beta<0$，或$\alpha+\gamma<0$時也成立，此時切點在雙曲線的兩支上。

反之，定理A在雙曲線情形也成立：用前述符號，考慮二次多項式

$$g(t)=\alpha(t-z_2)(t-z_3)+\beta(t-z_1)(t-z_3)+\gamma(t-z_1)(t-z_2)$$

計算可得

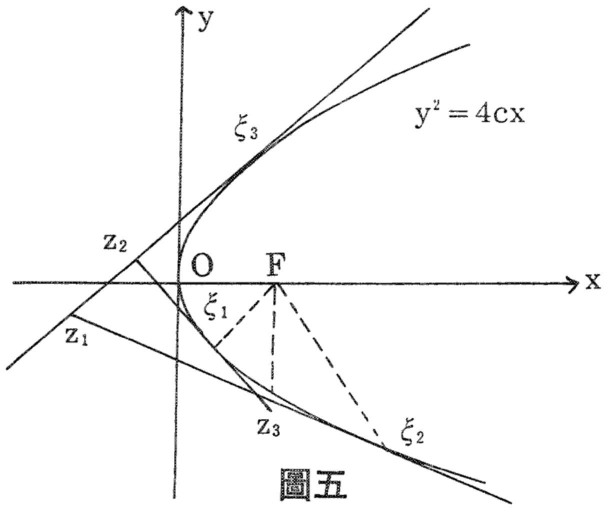
$$\alpha(z_2+z_3)+\beta(z_1+z_3)+\gamma(z_1+z_2)=0，\quad \alpha z_2z_3+\beta z_1z_3+\gamma z_1z_2$$

$$=-(\alpha+\beta+\gamma)(a^2+b^2)=-(\alpha+\beta+\gamma)c^2,$$

因此$g(t)=-(\alpha+\beta+\gamma)(t^2-c^2)$的零位爲雙曲線焦點。

至於$\alpha>0;\beta,\gamma<0;\alpha+\beta,\alpha+\gamma>0;\alpha+\beta+\gamma=0$時，$g(t)$爲一次多項式，以它的零位爲焦點之一拋物線傍切三角形，且切點滿足上述性質。與前面一樣，我們需先看橢圓切線所具有的一些性質在拋物線情形是否成立，過拋物線$y^2=4cx$上一點（$\frac{b^2}{4c},b$）的切線方程爲$2by=4cx+b^2$。過三相異點ξ_j（$\frac{b_j^2}{4c},bj)$（$j=1,2,3)$的切線兩兩相交於

$$z_1:(\frac{b_2b_3}{4c},\frac{b_2+b_3}{2}),\ z_2:(\frac{b_1b_3}{4c},\frac{b_1+b_3}{2}),\ z_3:(\frac{b_1b_2}{4c},\frac{b_1+b_2}{2}),$$



圖五

計算得 $\triangle Oz_1\xi_3$面積$=\frac{b_3^2}{16c}|b_2-b_3|$，

$\triangle Oz_1\xi_2$面積$=\frac{b_2^2}{16c}|b_2-b_3|$，

$\triangle Oz_3\xi_2$面積$=\frac{b_2^2}{16c}|b_1-b_2|$，

故 $\overline{z_1\xi_2}:\overline{\xi_2z_3}=|b_2-b_3|:|b_1-b_2|$，

$\overline{z_2\xi_1}:\overline{\xi_1z_3}=|b_3-b_1|:|b_2-b_1|$，

$\overline{z_1\xi_3}:\overline{\xi_3z_2}=|b_2-b_3|:|b_1-b_3|$，

令 $\alpha=b_3-b_2$，$\beta=b_1-b_3$，$\gamma=b_2-b_1$，則 $\alpha+\beta+\gamma=0$；

由於 $(\xi_1-c)(\xi_2-c)=(\frac{b_1^2}{4c}-c+b_1i)(\frac{b_2^2}{4c}-c+b_2i)=(z_3-c)^2$，

故 $\angle\ \xi_1Fz_3=\angle\ \xi_2Fz_3$，此性質在橢圓和雙曲線情形也成立。

若 $g(t)=\alpha(t-z_2)(t-z_3)+\beta(t-z_1)(t-z_3)+\gamma(t-z_1)(t-z_2)$

計算可得$-[\alpha(z_2+z_3)+\beta(z_1+z_3)+\gamma(z_1+z_2)]=\frac{1}{4c}(b_2-b_1)(b_1-b_3)(b_3-b_2)$,

$$\alpha z_2z_3+\beta z_1z_3+\gamma z_1z_2=\frac{1}{4}(b_2-b_1)(b_1-b_3)(b_3-b_2),$$

所以$g(t)=\frac{1}{4c}\alpha\beta\gamma(t-c)$的零位恰爲拋物線焦點。

另一方面，若$\alpha>0;\beta,\gamma<0;\alpha+\beta,\alpha+\gamma>0;\alpha+\beta+\gamma=0$，設一次多項式$g(t)=\alpha(t-z_2)(t-z_3)+\beta(t-z_1)(t-z_3)+\gamma(t-z_1)(t-z_2)$的零位爲c，則$\alpha(c-z_2)(c-z_3)+\beta(c$

$-z_1)(c-z_3)+\gamma(c-z_1)(c-z_2)=0$，由於$(\beta+\gamma)\xi_1=\gamma z_2+\beta z_3$，$(\alpha+\gamma)\xi_2=\gamma z_1+\alpha z_3$，因此$(\beta+\gamma)(\xi_1-c)=\beta(z_3-c)+\gamma(z_2-c)$，$(\alpha+\gamma)(\xi_2-c)=\alpha(z_3-c)+\gamma(z_1-c)$，兩式相乘化簡得$(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)(\xi_1-c)(\xi_2-c)=\alpha\beta(z_3-c)^2$，因$\alpha\beta<0,(\beta+\gamma)(\alpha+\gamma)<0\Rightarrow$ $\dfrac{(\xi_1-c)(\xi_2-c)}{(z_3-c)^2}$為正實數，故$\angle\ \xi_1Fz_3=\angle\ \xi_2Fz_3$，同理$\angle\ \xi_1Fz_2=\angle\ \xi_3Fz_2$，$\angle\ \xi_2Fz_1=\angle\ \xi_3Fz_1$。因此，以F(c,0)為焦點之一拋物線傍切三角形，且切點滿足前述比例關係。

換言之，在「主要定理」中只需設α,β,γ為非零實數，且任兩數之和不為零即可得到一個二次錐線分別與三角形之三邊或其延長線相切。

四、研究結論

我們找出橢圓Γ的外切三角形頂點與Γ的焦點間的關係，然後證明了

<u>定理</u> 存在一個橢圓Γ內切△ABC的三邊BC,AC,AB於點D,E,F的充分且必要條件是AD,BE,CF交於（三角形內）一點。

換言之，我們找出了一個三角形的所有內切橢圓和這些橢圓的作法。

我們也發覺：當D,E,F其中二點在邊之延長線上時，AD,BE,CF交於三角形外一點的充分且必要條件是存在一個二次錐線（橢圓、雙曲線或拋物線）傍切三角形ABC於D,E,F。

五、參考資料

1.數學傳播：第18卷3期p.55－p.65。

2.高中數學充實教材第二輯第4單元。

評　語

本件作品數學味道相當濃厚，算得上是一件學術作品，作者在發現一定理之後，想盡辦法將它的逆敘述證明出來，並將所有情形討論得非常完備，這種方法及精神實在不可多得而且所得結果亦很有價值，實在是一件不可多得之作品。