

恢復係數的測定與探討

高中組物理科第三名

省立臺中女子高級中學

作者：丁敦儀、徐慶珊、莊儼郁、花怡慧

指導教師：李瑞華

一、研究動機

在「牛頓打棒球」一書中提及，球的儲存環境會影響球的彈性，進而影響球被擊出後飛行的距離，即溫度的差異會造成恢復係數的改變。故設計此實驗研究之。

二、研究目的

- (一)測定各種球類和不同材質的底板間碰撞時的恢復係數並比較之。
- (二)測定不同落下高度（即不同撞擊速度）對恢復係數的影響。
- (三)測定球的溫度對恢復係數的影響。
- (四)探討恢復係數和推廣其應用性。

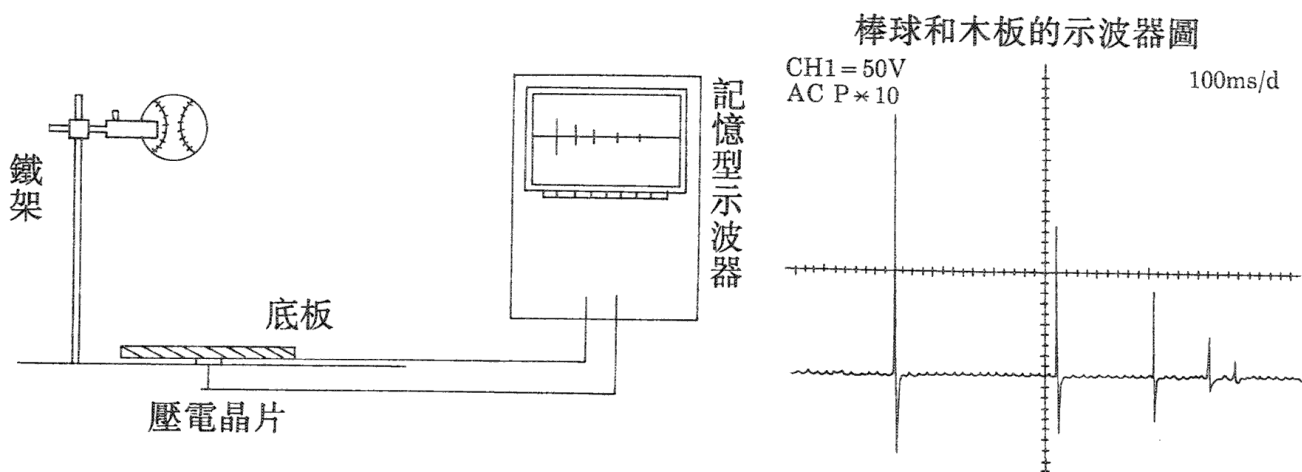
三、實驗器材和裝置

(一)實驗器材

- 1.記憶型示波器
- 2.壓電晶片
- 3.恆溫器
- 4.漆包線及電線數條
- 5.軟式棒球、網球、高爾夫球數個
- 6.木板、鋁板、玻璃板、瓷磚、鐵板各一
- 7.鐵架一組

(二)實驗裝置的設計

- 1.壓電晶片之效應可轉變力學的衝擊成為電壓變化，即當壓電晶片受到外來壓力，正負電荷分別移至晶片兩面，使晶片兩面產生電位差，此電壓變化約維持數毫秒，所以數位記憶型示波器可將之記錄下來。
- 2.實驗裝置圖：（如圖一）



圖一

四、實驗原理

(一)恢復係數為兩質點碰撞前後相對速度的比值，故兩質點碰撞後的相對速度等於碰撞前的相對速度和 e 的乘積。

(二)方法 I：

球自鐵架上釋放後於板上反跳數次，而每次反跳皆在螢光幕上出現一脈衝電壓，而脈衝電壓大小正比於球所受衝量。相鄰兩次電壓的比值即為恢復係數，因為：

$$\text{恢復係數 } e = -\frac{V_f}{V_i} \quad (V_i \text{ 為反跳前之速度，} V_f \text{ 為反跳後之速度})$$

又脈衝電壓大小正比於衝量大小，即：

$$\begin{aligned} \therefore \frac{V_2}{V_1} &= \frac{J_2}{J_1} = \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \frac{\text{第二次碰撞動量變化量}}{\text{第一次碰撞動量變化量}} = \frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} \\ &= \frac{V_{2f} - V_{2i}}{V_{1f} - V_{1i}} = \frac{V_{2f} + \frac{V_{2f}}{e}}{V_{1f} + \frac{V_{1f}}{e}} = \frac{V_{2f}}{V_{1f}} = -\frac{V_{2f}}{V_{2i}} = \text{恢復係數 } e \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{恢復係數 } e = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\text{第二次脈衝電壓高度}}{\text{第一次脈衝電壓高度}}$$

(三)方法Ⅱ：

恢復係數亦為相鄰兩次碰撞時間間隔的比值，因為：

$$\begin{aligned} \text{由(1)式得 } \frac{V_2}{V_1} &= \frac{J_2}{J_1} = \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \frac{V_{2f}}{V_{1f}} = \frac{\frac{2V_{2f}}{g}}{\frac{2V_{1f}}{g}} = \frac{\Delta t_{23}}{\Delta t_{12}} \\ &= \frac{\text{第三次和第二次的脈衝時間間隔}}{\text{第二次和第一次的脈衝時間間隔}} = \frac{-V_{2f}}{V_{2i}} = \text{恢復係數} e \quad \dots (2) \end{aligned}$$

五、實驗過程

(一)不同種類的球和不同材質的底板之間的恢復係數：

- 1.將電線及記憶型示波器裝置如圖一。
- 2.使用夾子和鐵架固定球落下的高度。
- 3.操作夾子使球自由落下，撞擊底板。並記錄示波器上每個連續脈衝電壓大小，及每個相鄰兩脈衝時間間隔，以求恢復係數。
- 4.改變不同材質的底板，重複步驟4。
- 5.改變不同種類的球，重複步驟4、5。

(二)恢復係數與落下高度的關係：

選用網球和瓷磚做恢復係數對高度的實驗，改變球落下的高度，重複步驟4。

(三)恢復係數與溫度的關係：

- 1.選用棒球和木板、鋁板、及高爾夫球和木板做溫度對恢復係數的影響實驗，利用恆溫器改變球的溫度，重複步驟4。
- 2.繪出恢復係數 e 和溫度 t 的關係座標圖，並以最小平方法求得 e 和 t 的關係式。

六、實驗結果

(一)不同種類的球和不同材質的底板之間的恢復係數（如表一～三）

1.棒球和不同底板間的恢復係數 e

（表一）

（高度35cm，溫度18°C）

材 質	脈衝電壓V(V.)			e	e	e	偏 差	恢復係數 e 總平均	時間t(ms)		e=(Δt_{23} / Δt_{12})	偏 差	恢復係數 e 總平均	恢復係數 e 全平均
	V ₁	V ₂	V ₃	(V ₂ /V ₁)	(V ₃ /V ₂)	平均值			Δt_{12}	Δt_{23}				
鋁 板	27.1	17.5	9.34	0.644	0.534	0.589	+0.004	0.585 ± 0.012	330	190	0.576	-0.023	0.599 ± 0.016	0.592 ± 0.014
	27.1	17.6	9.04	0.649	0.514	0.582	-0.003		331	199	0.601	+0.002		
	27.1	18.1	9.34	0.667	0.517	0.592	+0.007		331	193	0.583	-0.016		
	27.4	16.9	8.43	0.615	0.500	0.558	-0.027		319	199	0.624	+0.025		
	28.6	15.1	10.2	0.526	0.680	0.603	+0.018		325	199	0.612	+0.013		
木 板	26.0	12.3	5.66	0.472	0.461	0.467	-0.016	0.483 ± 0.042	300	167	0.557	+0.014	0.543 ± 0.042	0.513 ± 0.042
	24.9	12.2	6.51	0.490	0.532	0.511	+0.028		304	158	0.520	-0.023		
	25.7	11.5	3.92	0.448	0.340	0.394	-0.089		294	136	0.463	-0.080		
	23.1	13.9	5.96	0.603	0.429	0.516	+0.033		295	165	0.559	+0.016		
	22.8	12.7	6.33	0.557	0.498	0.528	+0.045		290	180	0.618	+0.075		
玻 璃 板	25.7	13.4	8.49	0.521	0.635	0.578	+0.041	0.537 ± 0.025	328	194	0.592	+0.003	0.589 ± 0.021	0.563 ± 0.023
	23.2	13.8	7.17	0.595	0.520	0.558	+0.021		307	177	0.576	-0.013		
	28.0	13.3	7.41	0.473	0.559	0.516	-0.021		327	180	0.550	-0.039		
	26.7	15.3	6.81	0.592	0.430	0.511	-0.026		324	200	0.617	+0.028		
	23.0	15.0	6.21	0.586	0.460	0.523	-0.014		325	199	0.611	+0.022		
瓷 磚	33.4	24.1	13.6	0.721	0.563	0.642	+0.048	0.594 ± 0.032	258	160	0.620	+0.013	0.607 ± 0.025	0.601 ± 0.029
	33.7	21.2	13.0	0.629	0.611	0.620	+0.026		265	165	0.623	+0.016		
	32.4	18.7	11.6	0.576	0.619	0.598	+0.004		273	175	0.641	+0.034		
	30.7	18.7	7.83	0.608	0.419	0.514	-0.080		268	150	0.560	-0.047		
	33.0	22.9	11.3	0.693	0.495	0.594	0		270	160	0.593	-0.040		
鐵 板	13.6	9.00	6.12	0.662	0.680	0.671	+0.027	0.644 ± 0.024	343	218	0.637	+0.018	0.619 ± 0.020	0.632 ± 0.022
	14.3	9.57	6.23	0.669	0.651	0.660	+0.016		331	206	0.622	+0.003		
	14.9	8.76	5.39	0.588	0.615	0.603	-0.041		272	155	0.569	-0.050		
	14.3	9.37	5.99	0.655	0.640	0.625	-0.019		316	198	0.626	+0.007		
	14.7	10.0	6.42	0.683	0.639	0.661	+0.017		340	218	0.641	+0.022		

2.高爾夫球和不同板間的恢復係數 e

(表二)

(高度35cm , 溫度18°C)

材 質	脈衝電壓V(V.)			e	e	e	偏 差	恢復係數 e 總平均	時間t(ms)		e=(Δt_{23} / Δt_{12})	偏 差	恢復係數 e 總平均	恢復係數 e 全平均
	V ₁	V ₂	V ₃	(V ₂ /V ₁)	(V ₃ /V ₂)	平均值			Δt_{12}	Δt_{23}				
鋁 板	25.3	13.9	6.51	0.548	0.470	0.509	-0.012	0.521 ±0.010	283	157	0.553	-0.008	0.561 ±0.020	0.541 ±0.015
	25.2	13.0	6.51	0.514	0.502	0.508	-0.013		293	169	0.576	+0.015		
	24.0	13.0	6.93	0.540	0.535	0.538	+0.017		289	169	0.583	+0.022		
	24.1	12.3	6.75	0.513	0.546	0.530	+0.009		289	151	0.521	-0.040		
	24.4	13.5	6.66	0.553	0.491	0.522	+0.001		283	163	0.574	+0.013		
木 板	31.8	16.3	7.17	0.513	0.439	0.476	+0.011	0.465 ±0.013	267	146	0.545	+0.001	0.544 ±0.021	0.505 ±0.017
	34.3	15.6	7.41	0.454	0.475	0.465	0		267	143	0.536	-0.008		
	32.8	14.1	6.39	0.430	0.453	0.442	-0.023		265	136	0.514	-0.030		
	32.5	15.8	7.77	0.486	0.492	0.489	+0.024		272	163	0.597	+0.053		
	33.1	14.7	6.87	0.444	0.467	0.456	-0.009		259	186	0.530	-0.014		
玻 璃 板	42.9	24.3	12.9	0.567	0.530	0.549	+0.040	0.509 ±0.033	316	184	0.584	+0.038	0.546 ±0.034	0.528 ±0.034
	38.4	17.8	8.92	0.464	0.500	0.482	-0.027		265	131	0.495	-0.051		
	41.0	17.8	8.55	0.435	0.480	0.458	-0.051		259	133	0.512	-0.034		
	41.7	22.5	10.6	0.540	0.471	0.566	-0.003		281	160	0.571	+0.025		
	43.9	27.1	13.1	0.618	0.484	0.551	+0.042		334	189	0.567	+0.021		
瓷 磚	37.3	20.8	11.9	0.556	0.574	0.565	+0.016	0.594 ±0.017	337	223	0.662	+0.021	0.641 ±0.017	0.595 ±0.017
	35.5	19.3	9.90	0.542	0.516	0.529	-0.020		337	205	0.608	-0.033		
	33.1	18.1	10.0	0.541	0.553	0.547	-0.002		331	211	0.637	-0.004		
	35.5	21.1	11.7	0.593	0.557	0.575	+0.026		337	223	0.662	+0.021		
	31.6	14.9	8.74	0.472	0.585	0.592	-0.020		323	205	0.635	-0.006		
鐵 板	18.9	12.3	6.02	0.653	0.488	0.571	-0.030	0.601 ±0.020	354	224	0.633	-0.028	0.661 ±0.025	0.631 ±0.023
	19.5	11.7	7.89	0.602	0.672	0.637	+0.036		357	246	0.689	+0.028		
	19.7	11.9	7.47	0.604	0.626	0.615	+0.014		383	266	0.965	+0.034		
	20.5	11.1	7.35	0.544	0.659	0.602	+0.001		373	243	0.652	-0.009		
	19.3	11.1	6.51	0.578	0.584	0.581	-0.020		383	243	0.635	-0.026		

3.網球和不同底板間的恢復係數e

(表三)

(高度35cm , 溫度18°C)

材質	脈衝電壓V(V.)			e	e	e	偏	恢復係數	時間t(ms)		e=(Δt_{23}	偏	恢復係數	恢復係數
	V ₁	V ₂	V ₃	(V ₂ /V ₁)	(V ₃ /V ₂)	平均值	差	e 總平均	Δt_{12}	Δt_{23}	/ Δt_{12})	差	e 總平均	e 全平均
鋁板	19.0	15.1	10.9	0.797	0.721	0.759	-0.039	0.798 ± 0.021	378	282	0.745	-0.015	0.760 ± 0.014	0.779 ± 0.018
	20.6	16.6	13.1	0.804	0.793	0.799	+0.001		378	298	0.787	+0.027		
	19.6	16.2	12.0	0.828	0.740	0.784	-0.014		380	292	0.768	+0.008		
	19.4	13.9	12.7	0.714	0.913	0.814	+0.016		380	284	0.749	-0.011		
	18.0	16.0	12.5	0.890	0.778	0.834	+0.036		380	286	0.752	-0.008		
木板	13.0	9.94	7.23	0.764	0.727	0.746	+0.011	0.735 ± 0.012	388	296	0.764	+0.007	0.757 ± 0.010	0.746 ± 0.011
	13.5	10.2	7.23	0.759	0.706	0.733	-0.002		386	299	0.775	+0.018		
	13.6	9.88	6.87	0.729	0.695	0.712	-0.023		388	287	0.739	-0.018		
	13.9	10.7	7.35	0.774	0.685	0.730	-0.005		390	295	0.756	-0.001		
	12.8	9.64	7.23	0.755	0.750	0.753	+0.018		389	292	0.749	-0.008		
玻璃板	13.6	10.5	8.13	0.778	0.771	0.775	+0.044	0.731 ± 0.046	398	307	0.771	+0.003	0.768 ± 0.005	0.750 ± 0.026
	14.3	12.3	8.44	0.861	0.683	0.772	+0.041		398	301	0.756	-0.012		
	14.6	11.7	8.43	0.806	0.718	0.762	+0.031		398	307	0.771	+0.003		
	15.1	10.8	7.83	0.720	0.722	0.721	-0.010		398	307	0.771	+0.003		
	15.7	12.3	5.72	0.788	0.463	0.626	-0.105		398	307	0.771	+0.003		
瓷磚	15.1	11.7	9.34	0.780	0.795	0.788	-0.012	0.800 ± 0.014	398	313	0.786	+0.002	0.784 ± 0.007	0.792 ± 0.011
	14.3	11.4	9.04	0.798	0.789	0.794	-0.006		404	313	0.775	-0.009		
	13.7	11.4	8.73	0.833	0.737	0.785	-0.015		398	313	0.786	+0.002		
	14.2	11.3	9.16	0.800	0.809	0.805	+0.005		404	313	0.775	-0.009		
	14.5	11.4	9.94	0.792	0.868	0.830	+0.030		392	313	0.798	+0.014		
鐵板	7.83	6.93	5.72	0.885	0.826	0.856	+0.053	0.803 ± 0.039	398	319	0.803	+0.009	0.794 ± 0.013	0.799 ± 0.026
	9.04	7.53	6.02	0.833	0.800	0.817	+0.014		404	319	0.791	-0.003		
	8.43	6.63	5.84	0.786	0.882	0.834	+0.031		416	337	0.812	+0.018		
	8.73	6.33	4.52	0.724	0.714	0.719	-0.084		416	319	0.768	-0.030		
	8.73	6.93	5.42	0.793	0.783	0.788	-0.015		416	331	0.797	+0.003		

(二)落下高度和恢復係數 e 的關係(如表四,圖五、六)

①恢復係數 e 和高度 h 的關係。

(表四)

(溫度 22°C)

高度 h (cm)	脈衝電壓V(V.)			e (V ₂ /V ₁)	e (V ₃ /V ₂)	e 平均值	偏 差	恢復係數 e 總平均	時間t(ms)		e=(Δt ₂₃ /Δt ₁₂)	偏 差	恢復係數 e 總平均	恢復係數 e 全平均
	V ₁	V ₂	V ₃						Δt ₁₂	Δt ₂₃				
15 cm	6.02	4.16	2.47	0.690	0.594	0.642	-0.010	0.652 ±0.026	113	83.1	0.735	-0.012	0.747 ±0.014	0.700 ±0.020
	5.72	4.22	2.35	0.743	0.557	0.650	-0.002		107	81.9	0.764	+0.017		
	6.27	4.28	2.65	0.683	0.620	0.652	0		110	79.5	0.725	-0.022		
	5.96	4.04	2.53	0.676	0.629	0.653	+0.001		110	83.1	0.758	+0.011		
	6.65	4.15	2.89	0.633	0.696	0.665	+0.013		113	85.5	0.755	+0.008		
20 cm	8.13	5.60	3.13	0.689	0.559	0.624	-0.008	0.650 ±0.042	139	102	0.739	-0.004	0.743 ±0.007	0.697 ±0.025
	7.23	5.36	3.98	0.742	0.742	0.742	+0.092		135	98.8	0.732	-0.011		
	7.71	5.18	2.71	0.672	0.523	0.598	-0.052		134	101	0.757	+0.014		
	8.07	5.36	3.25	0.664	0.606	0.635	-0.015		136	101	0.743	0		
25 cm	10.2	6.45	4.34	0.633	0.673	0.653	+0.012	0.641 ±0.026	153	114	0.748	-0.008	0.756 ±0.005	0.699 ±0.016
	9.10	5.90	3.55	0.649	0.602	0.626	-0.015		155	117	0.752	-0.004		
	10.5	6.93	3.61	0.661	0.522	0.592	-0.049		152	116	0.762	+0.006		
	9.40	6.81	4.40	0.724	0.646	0.685	+0.044		155	118	0.760	+0.004		
	9.88	6.39	4.16	0.646	0.651	0.649	+0.008		155	118	0.760	+0.004		
30 cm	10.5	6.63	4.22	0.631	0.637	0.634	-0.029	0.663 ±0.023	347	264	0.760	+0.007	0.753 ±0.005	0.708 ±0.014
	10.2	6.93	3.92	0.679	0.566	0.623	-0.040		349	265	0.759	+0.006		
	10.5	7.53	4.82	0.717	0.640	0.679	+0.016		358	267	0.746	-0.007		
	10.4	7.26	4.94	0.698	0.681	0.690	+0.027		354	265	0.749	-0.004		
	10.1	6.87	4.52	0.677	0.658	0.668	+0.005		353	265	0.751	-0.002		
35 cm	11.7	8.43	5.72	0.721	0.679	0.700	+0.045	0.655 ±0.061	373	289	0.774	-0.022	0.752 ±0.009	0.704 ±0.014
	11.7	6.93	3.61	0.592	0.521	0.557	-0.098		386	289	0.750	-0.002		
	12.3	8.73	4.52	0.709	0.518	0.614	-0.041		373	277	0.742	-0.010		
	11.4	9.04	6.62	0.793	0.732	0.763	+0.108		373	277	0.742	-0.010		
	11.7	7.23	4.82	0.618	0.667	0.643	-0.012		373	289	0.750	-0.002		

(三)恢復係數 e 和溫度 t 的關係(如表五~七,圖七~八)

1.球和板間恢復係數 e 和溫度 t 的關係

(1)棒球和木板:

(表五)

溫度 t ($^{\circ}\text{C}$)	脈衝電壓 $V(\text{V.})$			e			偏 差	恢復係數 e 總平均	時間 $t(\text{ms})$		$e=(\Delta t_{23} / \Delta t_{12})$	偏 差	恢復係數 e 總平均	恢復係數 e 全平均
	V_1	V_2	V_3	(V_2/V_1)	(V_3/V_2)	平均值			Δt_{12}	Δt_{23}				
0.0°C	32.9	17.6	5.30	0.535	0.301	0.418	+0.028	0.390 ± 0.023	233	107	0.461	-0.005	0.466 ± 0.032	0.428 ± 0.028
	31.6	11.9	4.65	0.375	0.391	0.383	-0.007		234	118	0.503	+0.037		
	28.3	10.8	3.93	0.380	0.364	0.372	-0.018		247	102	0.415	-0.051		
	27.1	10.1	3.45	0.374	0.342	0.358	-0.032		235	119	0.508	+0.042		
	24.1	10.2	4.22	0.425	0.412	0.419	+0.029		241	107	0.443	-0.023		
10.0°C	25.6	11.8	5.13	0.459	0.437	0.448	+0.040	0.408 ± 0.025	271	134	0.496	+0.008	0.488 ± 0.016	0.448 ± 0.021
	28.3	13.3	5.01	0.422	0.376	0.399	-0.009		235	113	0.479	-0.009		
	22.6	9.89	4.16	0.438	0.420	0.429	+0.021		259	131	0.504	+0.016		
	27.7	10.5	3.62	0.379	0.345	0.362	-0.046		259	118	0.454	-0.032		
	26.5	10.8	4.24	0.406	0.394	0.400	-0.008		259	131	0.504	+0.016		
20.0°C	13.0	4.77	2.05	0.367	0.429	0.398	-0.030	0.428 ± 0.013	270	146	0.540	+0.013	0.527 ± 0.010	0.478 ± 0.012
	11.7	5.10	2.19	0.436	0.414	0.425	-0.003		277	141	0.509	-0.018		
	16.9	6.05	3.03	0.358	0.500	0.429	+0.001		283	147	0.521	-0.006		
	18.1	7.23	3.61	0.400	0.500	0.450	+0.022		271	144	0.532	+0.005		
	14.5	6.10	3.01	0.421	0.455	0.438	+0.010		253	135	0.533	+0.006		
30.0°C	9.94	4.52	2.78	0.455	0.467	0.461	-0.005	0.466 ± 0.018	287	169	0.588	+0.022	0.566 ± 0.009	0.516 ± 0.014
	10.6	4.16	2.29	0.392	0.551	0.472	+0.006		284	160	0.564	-0.002		
	9.10	4.10	2.23	0.450	0.544	0.497	+0.031		282	155	0.551	-0.015		
	9.10	3.55	1.63	0.391	0.458	0.425	-0.041		282	158	0.560	-0.006		
	8.67	3.73	1.93	0.431	0.516	0.474	+0.008		272	154	0.566	0		
40.0°C	12.3	7.53	4.52	0.610	0.600	0.605	+0.053	0.552 ± 0.033	313	205	0.654	+0.007	0.647 ± 0.014	0.600 ± 0.024
	11.1	7.83	3.61	0.703	0.462	0.583	+0.031		313	211	0.673	+0.026		
	10.5	6.63	3.01	0.629	0.455	0.542	-0.010		319	199	0.623	-0.024		
	12.7	8.43	3.31	0.667	0.393	0.530	-0.022		325	211	0.648	+0.001		
	14.5	7.53	3.61	0.521	0.480	0.501	-0.051		331	211	0.636	-0.011		
50.0°C	14.5	10.5	7.09	0.721	0.679	0.700	+0.038	0.662 ± 0.026	343	253	0.737	+0.032	0.705 ± 0.026	0.684 ± 0.026
	17.5	11.9	7.71	0.678	0.650	0.664	+0.002		343	253	0.737	+0.032		
	12.7	8.53	5.87	0.672	0.688	0.680	+0.018		337	217	0.643	-0.062		
	12.7	8.47	5.35	0.667	0.631	0.649	-0.013		325	229	0.704	-0.001		
	14.5	8.59	5.48	0.593	0.637	0.615	-0.047		325	229	0.704	-0.001		

(2)棒球和鋁板間恢復係數 e 和溫度 t 的關係

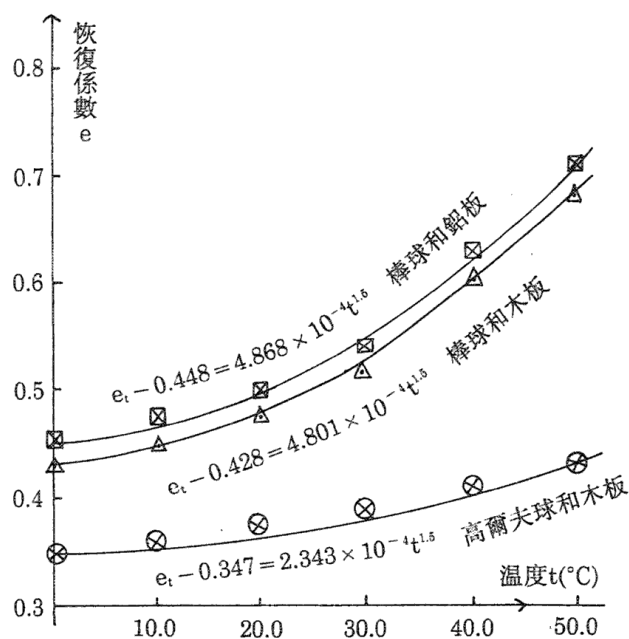
(表六)

(高度30cm)

溫度 t ($^{\circ}\text{C}$)	脈衝電壓 $V(\text{V.})$			e	e	e	偏	恢復係數	時間 $t(\text{ms})$		$e=(\Delta t_{23}$	偏	恢復係數	恢復係數
	V_1	V_2	V_3	(V_2/V_1)	(V_3/V_2)	平均值	差	e 總平均	Δt_{12}	Δt_{23}	$/\Delta t_{12})$	差	e 總平均	e 全平均
0.0 $^{\circ}\text{C}$	26.5	10.2	3.61	0.386	0.353	0.370	-0.039	0.409 ± 0.031	242	114	0.473	-0.013	0.486 ± 0.017	0.448 ± 0.024
	21.4	11.8	4.22	0.551	0.357	0.454	+0.045		246	112	0.458	-0.028		
	20.7	9.52	3.25	0.459	0.342	0.401	-0.008		235	114	0.487	+0.001		
	21.8	9.04	4.22	0.414	0.467	0.441	-0.032		235	122	0.518	+0.032		
	21.9	9.16	3.13	0.418	0.342	0.380	-0.029		248	123	0.495	+0.009		
20.0 $^{\circ}\text{C}$	14.2	7.17	2.95	0.504	0.411	0.458	+0.001	0.452 ± 0.044	288	161	0.561	+0.018	0.543 ± 0.044	0.495 ± 0.044
	13.7	7.77	3.43	0.568	0.441	0.505	+0.053		287	165	0.576	+0.033		
	15.4	6.99	3.85	0.453	0.551	0.502	+0.050		287	172	0.601	+0.058		
	14.8	6.49	2.59	0.439	0.398	0.419	-0.033		293	161	0.541	-0.002		
	12.4	3.59	1.66	0.290	0.462	0.376	-0.076		281	119	0.436	-0.107		
30.0 $^{\circ}\text{C}$	13.7	7.12	4.29	0.520	0.602	0.561	+0.087	0.474 ± 0.034	302	192	0.633	+0.050	0.583 ± 0.032	0.529 ± 0.033
	14.8	7.19	2.96	0.486	0.412	0.449	-0.025		284	160	0.564	-0.019		
	14.7	7.78	3.07	0.529	0.395	0.462	-0.012		286	160	0.561	-0.022		
	15.9	6.06	1.89	0.381	0.477	0.429	-0.045		290	158	0.544	-0.039		
	16.0	6.27	2.95	0.392	0.471	0.472	-0.002		288	176	0.611	+0.028		
40.0 $^{\circ}\text{C}$	14.2	10.4	5.78	0.732	0.558	0.645	+0.061	0.584 ± 0.030	336	225	0.670	-0.002	0.672 ± 0.011	0.628 ± 0.021
	15.0	8.19	4.33	0.546	0.528	0.537	-0.047		347	242	0.698	+0.026		
	15.4	8.67	4.76	0.562	0.549	0.556	-0.028		328	216	0.658	-0.014		
	15.8	9.88	5.48	0.626	0.555	0.591	+0.007		334	224	0.671	-0.001		
	14.6	8.01	5.06	0.549	0.632	0.591	+0.007		317	210	0.662	-0.010		
50.0 $^{\circ}\text{C}$	14.4	9.34	5.12	0.649	0.548	0.599	-0.067	0.066 ± 0.054	361	265	0.733	-0.019	0.752 ± 0.022	0.709 ± 0.038
	16.0	11.7	7.23	0.731	0.618	0.675	+0.009		361	265	0.733	-0.019		
	18.1	10.5	6.63	0.580	0.631	0.606	-0.060		349	265	0.759	+0.007		
	17.2	12.7	10.8	0.738	0.850	0.794	+0.128		361	289	0.800	+0.048		
	12.3	9.64	5.12	0.784	0.531	0.658	-0.008		361	265	0.733	-0.019		

2. 恢復係數 e 和溫度 t 的關係圖

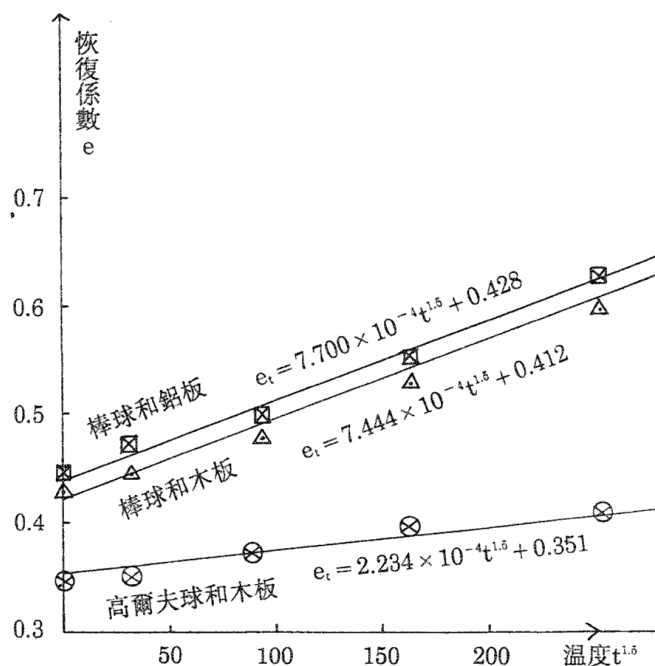
(如圖七)



圖七

3. 恢復係數 e 和溫度 $t^{1.5}$ 的關係圖

(如圖八)



圖八

七、討論與結論

(一) e 的值在0和1之間，大體上決定於它們的材料，由實驗得知， e 的大小順序為：

對棒球：鐵板>瓷磚>鋁板>玻璃板>木板

對高爾夫球：鐵板>瓷磚>鋁板>玻璃板>木板

對網球：鐵板>瓷磚>鋁板>玻璃板>木板

(二)對同一材質的底板而言，恢復係數 e 的大小順序為：

對鋁板：網球>棒球>高爾夫球

對木板：網球>棒球>高爾夫球

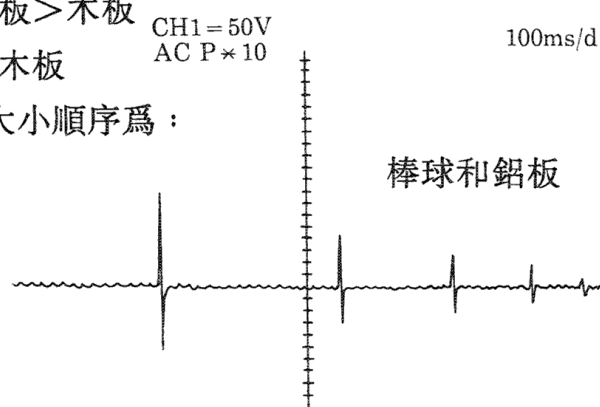
對玻璃板：網球>棒球>高爾夫球

對瓷磚：網球>棒球>高爾夫球

對鐵板：網球>棒球>高爾夫球

(三)由實驗得知： $e_{\text{鋁板和棒球}} (0.592) > e_{\text{木板和棒球}} (0.513)$ ，一般的棒球賽中，鋁棒被公認為較木棒有更廣的最佳打擊區域，因為鋁棒較木棒更具彈力而且在擊球時，因壓縮所儲存的能量會有效率地歸還到球上。

(四)球損失的動能部分轉化成熱能。



(五)在實驗中，高度不很大時，撞擊速度較小，而速度小時對恢復係數幾乎無任何影響，故落下高度與恢復係數的座標圖成一水平直線。即速度小時，恢復係數 e 和碰撞速度無關。

(六)由實驗得知，球溫度愈高，球的分子動能愈大，球與板間的恢復係數愈高，其關係式為：

$$\text{棒球：} e_t = e_0 + 4.8 \times 10^{-4} \times t^{1.5}$$

$$\text{高爾夫球：} e_t = e_0 + 2.34 \times 10^{-4} \times t^{1.5}$$

(其中 e_t 和 e_0 分別為 $t^\circ\text{C}$ 和 0°C 時的恢復係數)

即 $t^\circ\text{C}$ 和 0°C 時的恢復係數的差($e_t - e_0$)和攝氏溫度 t 的1.5次方成正比，故棒球賽前球的儲存環境溫度愈高，球反跳後的速度愈大，則更易擊出全壘打。

(七)氣溫的差異變化會影響球的彈性而改變球的飛行距離。

(八)衝量和脈衝電壓的轉換常數“ K ”：例如在高爾夫球於 10°C ，30cm高落下撞擊木板時：

$$\text{用方法 I 時，得 } K = \frac{J_1}{V_1} = 4.06 \times 10^{-3} (\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \text{V})$$

$$\text{用方法 II 時，得 } K = \frac{J_2}{V_2} = \frac{mg(\Delta t_{23} - \Delta t_{12})}{2V_2} = 3.50 \times 10^{-3} (\text{kg} \cdot \text{m/s} \cdot \text{V})$$

轉換常數 K 約相同。

(九)若球自 h 高處落下，從恢復係數可求出球靜止前運動的總距離， $\Sigma h = \frac{1+e^2}{1-e^2}$

$$H, \text{ 亦可求出球靜止前運動的總時間, } \Sigma t = \frac{1+e}{1-e} \sqrt{\frac{2H}{g}}。$$

(十)體彈性係數愈大的材質的底板，形變愈小，恢復係數愈大。

如：體彈性係數的大小順序為：

$$\text{鐵} (1.0 \times 10^{11} \text{N/m}^2) > \text{鋁} (0.70 \times 10^{11} \text{N/m}^2)$$

$$> \text{玻璃} (0.37 \times 10^{11} \text{N/m}^2)$$

恢復係數的大小順序為：

$$\text{鐵} > \text{鋁} > \text{玻璃}$$

(十一)用此實驗方法，以壓電晶片及示波器測恢復係數簡捷而正確，可推廣至測定任何兩物間的恢復係數。

八、參考資料

(一)牛頓打棒球—看棒球學物理 The Physics of Baseball

Robert K. Adair 原著 / 李靜宜譯 牛頓出版公司

(二)應用力學 Aldor C. Peterson原著 / 張海山等譯 中央圖書出版社

(三)應用力學—動力學 Vector Mechanics for Engineers

Beert Johnson原著 / 李德福等譯 高立圖書有限公司

(四)新材料力學 Mechanics and Materials for Design

Nathan H. Cook原著 / 黃少谷等譯 乾泰圖書公司

(五)大不列顛百科全書 廖瑞銘主編 丹青圖書公司

(六)應用力學 劉上聰編著 全華科技圖書公司

評 語

利用壓電晶體測力的方式測量彈性恢復係數，實驗設計周詳嚴密，亦有新意。又探討恢復係數與溫度、彈力間之關係的問題，亦頗新穎。