

毛毛蟲變蝴蝶～移位遊戲的新發現

高小組數學科第二名

台北市石牌國民小學

作者：羅宇廷、林賢傑、詹彬、張家豪

指導教師：許文化、程悅君

一、研究動機

分組活動的科學遊戲裡，老師介紹我們玩一種毛毛蟲遊戲，方法是在一條毛毛蟲身上，從中間分為二邊，每邊各有等量斑點，透過簡單遊戲規則，要使兩邊的斑點互換。兩節課下來，我們大致上都完成了任務，但是老師說還有更長更多斑點的毛毛蟲等著我們，要我們去尋找一些資料並做一些思考和研究。有一位同學無意中說毛毛蟲不要再長長了，變成蝴蝶算了，突然讓我們想到如果把一條直線的毛毛蟲變成平面式的蝴蝶來玩，將會有些什麼變化呢？於是，我們找了幾位同學一起研究這個問題。

二、研究目的

經過我們尋找資料結果，發現這種毛毛蟲換斑點遊戲其實是一種「移位遊戲」，毛毛蟲是一種直線上的移位遊戲，至於蝴蝶則是一種平面上的移位遊戲，因此，我們訂定了如下研究目標：

- (一)了解一般直線式移位遊戲的規律性。
- (二)兩端不等長直線式移位遊戲有規律性嗎？
- (三)環型兩邊等長移位遊戲具有規律性嗎？
- (四)環型兩邊不等長移位遊戲有規律性嗎？
- (五)蝴蝶型「平面空間」移位遊戲有規律性嗎？

三、文獻探討

我們收集了有關毛毛蟲—移位遊戲資料如下：

- (一)全國24屆科展時，屏東市仁愛國小做了研究，並榮獲初小組全國第三名，題目為「有趣的移位遊戲」。
- (二)凡異出版社【數學遊戲】一書提到直線式移位遊戲，並附有解答。
- (三)地球出版社【益智遊戲】一書也提到直線式移位遊戲。

(四)凡異出版社【數學遊戲】一書曾略提及平面式移位遊戲，但只限於一邊8顆（正方形 3×3 ）去掉一顆中間空位，而且附了一個參考答案，此外就沒有任何說明及其他資料。

四、研究材料與工具

(一)材料：卡紙、棋子、彩色筆。

(二)工具：計算機。

五、研究過程

問題一：了解一般直線式移位遊戲的規律性。

我們先參考文獻探討中所有資料，做了一番詳細研究，確認了其中遊戲規則及最後結果。移位遊戲圖示如下：

原棋盤	1	2	3	4	5	6	7
	●	●	●	/	○	○	○

移位後	1	2	3	4	5	6	7
	○	○	○	/	●	●	●

移動規則：

(一)每次只能移動一顆棋子

(二)每一顆被移動的棋子，可以選擇下列二種方式進行：

1. 棋子旁邊有空格時，可移動棋子到空格中（例如：原棋盤中5移到4，或者3移到4）
2. 棋子可跳越緊鄰的一顆棋子（不管顏色如何）而到空格中（例如，原棋盤中2跳到4，或者6跳到4）

(三)將兩邊棋子互換完成，所需步數越少越好。最後我們可發現移動的最少步數是：

$$n = \frac{n}{2} \times (\frac{n}{2} + 2) \quad \frac{n}{2} \text{ 爲每邊的棋子數} \quad n \text{ 爲移動的最少步數}$$

問題二：兩端不等長直線式移位遊戲有規律性嗎？

方法一：例行性解法

說明：
 $\begin{matrix} 1 & - & 2 & 4 \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow \\ \text{左邊} & & \text{右邊} & \text{最少} \\ \text{棋子數} & & \text{棋子數} & \text{移動步數} \end{matrix}$

表二-1：直線型不等長移位遊戲最低移動步數表

等長型	差 1 型	差 2 型	差 3 型	差 4 型	差 5 型	差 6 型	差 7 型
1-1 3	1-2 4	1-3 7	1-4 8	1-5 11	1-6 12	1-7 15	1-8 16
2-2 8	2-3 6	2-4 12	2-5 13	2-6 16	2-7 17	2-8 20	2-9 21
3-3 15	3-4 16	3-5 19	3-6 20	3-7 23	3-8 24	3-9 27	3-10 28
4-4 24	4-5 25	4-6 28	4-7 29	4-8 32	4-9 33	4-10 36	4-11 37
5-5 35	5-6 36	5-7 39	5-8 40	5-9 43	5-10 44	5-11 47	5-12 48
6-6 48	6-7 49	6-8 52	6-9 53	6-10 56	6-11 57	6-12 60	6-13 61
7-7 63	7-8 64	7-9 67	7-10 68	7-11 71	7-12 72	7-13 75	7-14 76
8-8 80	8-9 81	8-10 84	8-11 85	8-12 88	8-13 89	8-14 92	8-15 93
9-9 99	9-10 100	9-11 103	9-12 104	9-13 107	9-14 108	9-15 111	9-16 112
10-10 120	10-11 121	10-12 124	10-13 125	10-14 128	10-15 129	10-16 132	10-17 133

由表二、1中的研究結果我們發現：

(1)就直行關係看，當左右各增一個棋子時，最少移動步數的增加量有一定的規律性，而且這個規律性和原來已有的「兩邊等長移位遊戲」規律性完全吻合：

也就是當左右兩邊各增加一個棋子時移動步數的增加量由5→7→9→11→13→19→21遞增，我們只做到差7型，預測往下做能符合這個規則。

(2)就橫列看，棋子數左邊不變，右邊逐漸增加一個棋子時，移動數的增加量是以1, 3, 1, 3, 1, 3……方式增加。

(3)我們從表一中更發現了不管左右棋子相等或不相等都可由統一的公式來計算出它最少的移動步數。它的最少移動步數公式應分為左右兩邊，差奇數（或兩邊總數奇數）和差偶數（或兩邊總數偶數）兩種公式。公式從略，請參考六研究結果。

方法二：非例行性的解法

以上是我們遵循例行性思考所得到極為完整的兩邊不等長（也可包含

等長) 毛毛蟲，最少移動步數結果。但是，當我們更深入研究時，卻發現到，有時候如果不是按照傳統式方式來思考，可能得到更好的結果，那就是我們仍然完全遵守移動規則，但在一些地方我們不硬著頭皮前進，反而往後退一步來製造順暢的通路，竟然有意想不到的效果。下面是一個例子：

兩邊不等長3-5型，原移動步數為19，即

$$3 \times 3 + 2 \times 5 - 1 = 19$$

經過了一段時間研究，我們得到與表二·1不同的結果，兩邊不等長毛毛蟲移位遊戲最少移動步數結果如表二·2：

說明：
 1 ↑ 左邊棋子數
 2 ↑ 右邊棋子數
 4 ↑ 最少移動步數

表二·2

等長型	差 1 型	差 2 型	差 3 型	差 4 型	差 5 型	差 6 型	差 7 型
1-1 3	1-2 4	1-3 7	1-4 8	1-5 11	1-6 12	1-7 15	1-8 16
2-2 8	2-3 9	2-4 10	2-5 13	2-6 14	2-7 17	2-8 18	2-9 21
3-3 15	3-4 16	3-5 16	3-6 18	3-7 20	3-8 22	3-9 24	3-10 26
4-4 24	4-5 22	4-6 22	4-7 23	4-8 25	4-9 27	4-10 29	4-11 31
5-5 35	5-6 31	5-7 29	5-8 29	5-9 30	5-10 32	5-11 34	5-12 36
6-6 48	6-7 40	6-8 40	6-9 36	6-10 36	6-11 37	6-12 39	6-13 41
7-7 63	7-8 51	7-9 47	7-10 47	7-11 43	7-12 43	7-13 44	7-14 46
8-8 80	8-9 62	8-10 57	8-11 55	8-12 54	8-13 50	8-14 50	8-15 51
9-9 99	9-10 76	9-11 66	9-12 63	9-13 62	9-14 61	9-15 57	9-16 57
10-10 120	10-11 88	10-12 76	10-13 72	10-14 72	10-15 69	10-16 58	10-17 64

由表二·2中，我們發現：

- 1.兩邊等長的毛毛蟲移位遊戲，沒有減少步數的機會。
- 2.兩邊不等長的毛毛蟲移位遊戲，其中一端為1，例如，1-2，1-3...1-8，沒有減少步數機會。
- 3.兩端棋子數越多，例如，9-10，10-15，9-16...，減少步數效果較明顯。

4.兩端棋子數差距越多，所需步數也越少。

5.當較少的一邊棋子數（左）乘以2減2等於多的一邊棋子數（右）時，例如4-6型毛毛蟲（ $4 \times 2 - 2 = 6$ ）很明顯有翻陣效果，造成移動步數達到最低點，下面是一個例子在表二·2中，第四橫列資料表

4-4(24) 4-5(22) 4-6(22) 4-7(23) 4-8(25) 4-9(27) 4-10(29)

4-6的22步顯然是最少步，它雖然比4-4多2顆棋子，移動步數卻少了2步，另外4-6比4-5多了一顆棋子，但同樣能22步完成，這是翻陣效果的明顯例子，也由於翻陣效果，而使表中數字呈現一個階梯現象（如表二·2以□示之）。它是所有橫列中最低步數點所組合而成的特殊結果。

6.由表二·2中，非例行性解法看不出有統一公式，卻出現一些規律性，如下表：

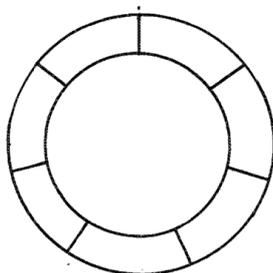
(1)翻陣之右上邊斜行差7，左下則不見規律性。

(2)以翻陣效果為中心，右上半向↗增加步數，左下半向↙增加。

問題三：環型兩邊等長移位遊戲具有規律性嗎？

(三)1.我們試作各種環型毛毛蟲，下面圖是3-3，環型毛毛蟲。

用傳統解法可以得到和直線式移位遊戲完全一樣的結果，它具有規律性，但沒有特殊之處。



2.我們試著在做移位時，最後一顆由奇數，偶數最大值（尾端）接點處倒轉，結果發現到可以減少步數，結果如左下表：

毛毛蟲型式	最後一顆尾端倒轉	差數
1-1	3	} 2
2-2	5	
3-3	9	} 4
4-4	15	
5-5	23	} 6
6-6	33	
7-7	45	} 8
8-8	59	
9-9	75	} 10
10-10	93	

3	1-1	→	$1 \times 1 - (-2)$
5	2-2	→	$2 \times 2 - (-1)$
9	3-3	→	$3 \times 3 - 0$
15	4-4	→	$4 \times 4 - 1$
23	5-5	→	$5 \times 5 - 2$
33	6-6	→	$6 \times 6 - 3$
45	7-7	→	$7 \times 7 - 4$
59	8-8	→	$8 \times 8 - 5$
75	9-9	→	$9 \times 9 - 6$
93	10-10	→	$10 \times 10 - 7$

由上表中我們得到下面一個規律性

我們可以公式表示：

$$n \times n - (n - 3) \quad n : \text{一邊棋子數}$$

這個結果比純用直線式走法減少很多步數。

3. 後來我們又發現，在適當位置倒轉，也就是大致在一邊棋子總數一半處就倒轉，更能減少步數—尤其在兩邊棋子數比較多，例如7-7，8-8，9-9……時。下面是兩個例子：

(1) 環型兩邊等長，6-6的移位遊戲

甲、傳統解法為48步，即 $6 \times 6 + 6 \times 2 = 48$ 。

乙、最後一顆倒轉解法為33步，即 $6 \times 6 - (6 - 3) = 33$ 。

丙、切一半倒轉解法為31步。

(2) 我們利用中央切半這個方法對所有兩邊等長的環型移位遊戲作了一番研究，得到如下結果：

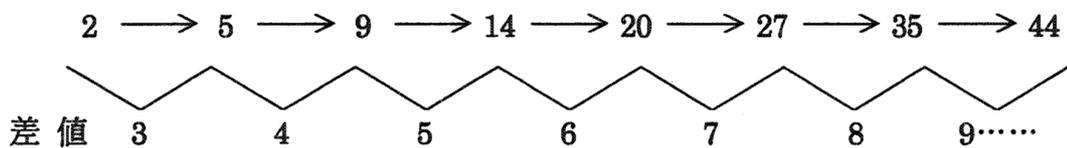
棋子數	例行性解法	最後一顆倒轉	中央切半
1-1	3	3	3
2-2	8	5	5
3-3	15	9	9
4-4	24	15	15
5-5	35	23	23
6-6	48	33	31
7-7	63	45	40
8-8	80	59	50
9-9	99	75	61
10-10	120	93	73

(3)中央切半的結果，我們得到的規則及公式：

①1-1、2-2、3-3、4-4不具規律性。

②5-5以後為（一邊棋子數）×（一邊棋子數）- \square

其中 \square 由2開始，差值為由3開始的連續整數（如下圖）



問題四：環型兩邊不等長移位遊戲有規律性嗎？

1.我們試做各種環型兩邊不等長移位遊戲，計有42類型。每一類型經多次試驗整理出最少移動步數，並和環型兩邊等長比較，列表如下：

表四·1環型兩邊不等長最低步數

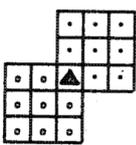
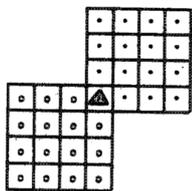
等長型	差 1 型	差 2 型	差 3 型	差 4 型	差 5 型	差 6 型	差 7 型
1-1 3	1-2 4	1-3 6	1-4 6	1-5 9	1-6 10	1-7 13	1-8 15
2-2 5	2-3 6	2-4 9	2-5 11	2-6 13	2-7 13	2-8 15	2-9 17
3-3 9	3-4 8	3-5 11	3-6 14	3-7 18	3-8 16	3-9 18	3-10 18
4-4 15	4-5 15	4-6 16	4-7 17	4-8 18	4-9 19	4-10 21	
5-5 23	5-6 22	5-7 18	5-8 21	5-9 22	5-10 23		
6-6 31	6-7 29	6-8 25	6-9 24	6-10 23			
7-7 40	7-8 33	7-9 31	7-10 26				
8-8 50	8-9 44	8-10 36					
9-9 61	9-10 54						
10-10 73							

2.走棋原則請參考研究結果。

3.在表四、1裡，差1型~差7型中還看不出如表二、1直線型兩邊不等長的關係式，我們繼續研究中。

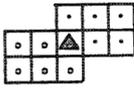
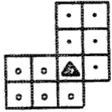
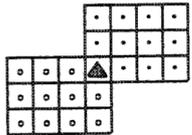
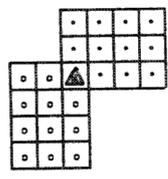
問題五：蝴蝶型（平面空間）移位遊戲有規律性嗎？

表5·1正方形蝴蝶

外觀形式	棋子形式	圖形及最低步數
2×2	3-3	 <p>15</p>
3×3	8-8	 <p>46</p>
4×4	15-15	 <p>120</p>

在蝴蝶型（平面空間）移位遊戲中，我們分別式做了正方形及長方形蝴蝶探討，圖形如表5·1、表5·2：

表5·2長方形蝴蝶·

外觀形式	棋子形式	圖形及最低步數
2×3	5-5	 26
3×3	5-5	 26
3×4	11-11	 76
3×4	11-11	 76

對蝴蝶型研究，我們得到如下結果：

1. 蝴蝶型移位遊戲中，和直線式兩端等長有一個共同現象，那就是會到達兩邊均為黑白相間的時候，就能達到最低步數。
2. 蝴蝶型能取樣的類型太少，不易看出規律性。
3. 以同樣多顆棋子和直線型、環型比較如下表：

型式	最低步數	棋子數	3-3	3-8	15-15
直線型			15	80	255
環型			9	50	148
蝴蝶型			15	46	120

六、研究結果

綜合我們的所有研究，得到研究結果如下：

(一)所有移位遊戲中，直線型兩邊等長移位遊戲很明顯具有規律性，它的最少移動步數規則為

$$\text{最低步數} = \text{ㄅ} \times (\text{ㄅ} + 2) \quad \text{ㄅ 為一邊棋子數}$$

(二)直線型兩邊不等長移位遊戲經過深入研究，發現它的最低步數也具有規律性，其規則為

1. 例行性解法

$$\text{最低移動步數} = \text{ㄅ} \times \text{ㄅ} + 2 \times \text{ㄆ} - 1 \quad (\text{棋數總合為奇數})$$

$$\text{最低移動步數} = \text{ㄅ} \times \text{ㄅ} + 2 \times \text{ㄆ} \quad (\text{棋數總合為偶數})$$

其中 ㄅ 為左方棋子數 (棋子較少一方)

ㄆ 為右方棋子數 (棋子較多一方) 當 ㄅ = ㄆ 即直線兩邊等長型

2. 非例行性解法

充分觀察棋子型式，運用帶路、翻陣等技巧，可以得到更低的移位步數。這個部分只具規則性，無法歸納出明確公式。

(三)環型兩邊等長移位遊戲可以歸納出最低步數規則為

1. 傳統式解法

$$\text{最低步數} = \text{ㄅ} \times (\text{ㄅ} + 2) \quad \text{一同直線式公式}$$

2. 最後一顆倒轉法 (成績比傳統式解法更好)

$$\text{最低步數} = \text{ㄅ} \times \text{ㄅ} - (\text{ㄅ} - 3)$$

3. 中央切半型解法 (可得最佳解法)

$$\text{最低步數} = \text{一邊棋子數} \times \text{一邊棋子數} - \square$$

其中 \square 是由 2 開始，差值為由 3 開始的連續整數

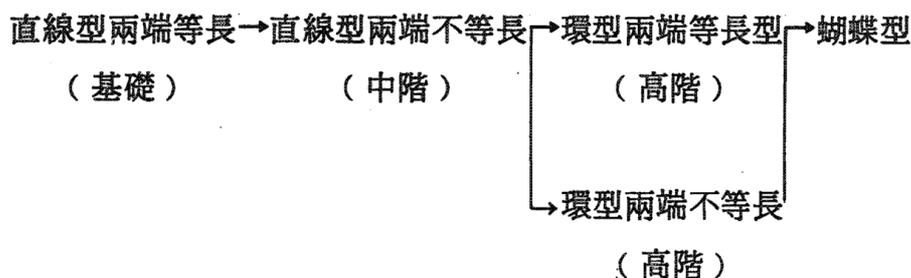
(四)環型兩邊不等長移位遊戲無法歸納出最低步數公式，但可以歸納出走法三步驟：佈局→環型連跳→收尾，依此原則可完成較低或最低的步數。

(五)蝴蝶型移位遊戲由於可取樣的型式太少，平行路線叉路又太多，不易歸納出明顯結果。

(六)所有移位遊戲中，最常見的是直線兩邊等長型，常出現於大部分有關益智遊戲或數學遊戲的書當中。但是，經過我們此番研究，並知道其規則後，就顯得太平淡且不具挑戰性及創意性。

(七)直線兩端不等長移位遊戲可以用例行性解法及非例行性解法來挑戰，其中例行性解法具明顯公式，而非例行性解法卻具有挑戰性，可有較大思考機會。

- (八)環型兩邊等長型解法最具變化性，可依傳統性解法。而最後一顆倒轉、中央切半等方式之思考，則各有不同結果。
- (九)環型兩邊不等長型像環型兩邊等長型一樣具高度變化性，可做為最佳思考訓練遊戲。但是到目前為止不易歸納出明顯公式，可能還有研究空間。
- (十)所有移位遊戲可做成一套完整進階式思考訓練材料，以最常見的直線兩邊等長型為基礎向上發展，如下圖：



七、未來發展

原來我們想要研究蝴蝶型移位遊戲，卻沒有想到在直線型兩端不等長、環型兩端等長、環型兩端不等長的研究中發現一大片新天地，直使人興奮。反而蝴蝶型的研究沒有很大的突破，這將是我們下一階段想挑戰的目標。

八、參考資料

- (一)全國科展作品專輯 國立科學館編
- (二)數學遊戲 凡異出版社
- (三)益智遊戲 故鄉出版社

評語

- 1.作品生動活潑並具有創意。
- 2.表達能力不錯研究結論亦完整。