

火車快飛

(數學之旅—魔陣秘笈之尋覓：學以致用篇)

初小組數學科第三名

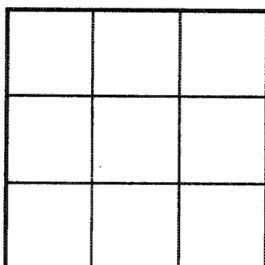
高雄市大同國民小學

作 者：馬靖威、吳思穎、陳盈竹、楊順貞

指導教師：高欽蓮、邱秀枝

一、研究動機

在去年的科學園遊會上，有同學拿回乙份數學方面的問題，題目為「用1至9的數字，填入下圖的方格中，使田字的4個方格數字，加起來的和等於(1)16(2)20(3)24。」



當試題落到我們學校去年科展數學研究小組的手上時，學兄學姊都異口同聲說：「啊！哈！只不過又一次“線——交點法”的應用而已。」因此，引起我們研究的興趣。由於他們的研究正如火如荼，就決定派一位學姊抽空指導我們，向這擂台挑戰。經驗豐富的學姊保證，一定會一樣讓我們找到所有的答案，並知道「為什麼？」，而非僅有一種嘗試成功的短暫喜悅而已。總而言之，也是一趟令人著迷的數學之旅。

二、研究目的

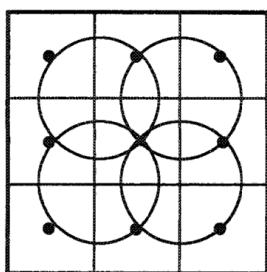
- (一)找出所有答案到底有那些？並知道「為什麼？」。
- (二)找出數學的趣味性、規律性、對稱性。依循歸納、演繹原理，熟用系統性、條理性的分析推理，尋求具體教學等事實或定律。
- (三)培養創造思考能力，追根究底精神和正確的科學研究態度。
- (四)能夠學以致用。

三、研究設備

直尺、鉛筆、彩色筆、計算紙、九格方形章、印色台、撲克牌、九格白板。

四、研究過程

(一)使用線——交點法處理(並非線段——交點法，因為田字的4個方格中數字連接接起來為一圓圈，好像火車快飛的軌道。)



見圖可發現中心格子被通過四次，角落的格子被通過一次，邊上的中間格子被通過二次，所以我們仍然可將九個格子區分為三類

ㄣ：表通過四次，只有一格，位在中央。

爻：表通過一次，只有四格，位在角落。

匚：表通過二次，只有四格，位在邊上的中間。

如圖

爻	匚	爻
匚	ㄣ	匚
爻	匚	爻

心得：學姊說，這和線段——交點法處理魔陣所得，是完全一樣的漂亮對稱圖

。

(二)我們先處理四個數字連加和為16的情形(教師要我們先猜猜有多少個式子能成立？自然我們是對著老師哇哇叫，因為要連加四數就已夠麻煩，何況式子一定不少，苦也！)

1.老師指導我們以有條理、有系統的方法，找出不同四個數字和為16的情形，其過程如下：

(每人手中先發1至9，九種數字牌，並規定能成立的式子，一律由數學小的排列到大的方式書寫。)

甲、先將手中最小數拿出當被加數。 例：甲： $1 + \square + \square + \square = 16$
乙、再將次最小數拿出來做第一加數。 乙： $1 + 2 + \square + \square = 16$
丙、手中剩餘牌子，以配對方式找出 丙： $1 + 2 + 4 + 9 = 16$
能完成式子的數對。 $1 + 2 + 5 + 8 = 16$

$$1 + 2 + 6 + 7 = 16$$

丁、將第一加數丟棄，以手中現有1、3、4、 丁：甲 $1 + \square + \square + \square = 16$
5、6、7、8、9八張牌子，重覆過程甲至丙 乙 $1 + 3 + \square + \square = 16$
丙 $1 + 3 + 4 + 8 = 16$
 $1 + 3 + 5 + 7 = 16$

戊、將手中牌子重覆丁→甲→乙→丙過程，即可找出最小數做被加數能成立的所有式子。

己、丟棄此被加數，其餘數重覆甲至戊的過程，可陸續找出各數做被加數，能成立的式子。

2.我們尋找結果，共有八個式子成立如后：

$$1 + 2 + 4 + 9 = 16$$

$$1 + 2 + 5 + 8 = 16$$

$$1 + 2 + 6 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 4 + 8 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 4 + 5 + 6 = 16$$

$$2 + 3 + 4 + 7 = 16$$

$$2 + 3 + 5 + 6 = 16$$

(此時老師告訴我們每一式中的每個數字都可做被加數，若三個加數順序依照規定，則有 $4 \times 8 = 32$ 個式子成立。乖乖隆的冬！幸虧老師指導有方，不然光是處理這一部分的資料，我們就會加得灰殺殺！啊！老師，您真不錯喔！
)

3.接著分析每個數字當做被加數時，它與其他三個加數和為16的式子成立次數，如下：

被加數：1 2 3 4 5 6 7 8 9

成立次數：六五四四四三三二一 總計三十二次

心得：1.沒有像魔陣分析所得對稱性。

2.成立次數一次的數字9，一定要填入四個角落中的一個。

3.因為9做為被加數的圓為 $9 + 1 + 2 + 4 = 16$ ，其三個加數1.2.4，成立次數

分別為六、五、四次。所以中央「九」格位所填數字可以有1.2.4三個選擇。

4. 最後要來完成答案圖囉！先討論「九」位格填1，其過程：

① 將9先填入左上角

①

9		

② 中央「九」位格填入1

②

9		
	1	

③ 完成此圖（因2.4可互調，即有二種情況任選一個）

③

9	2	
4	1	

④ 和9相對之角落格子可填之數，顯然為不能和1+2或1+4完成圓圈的數字。

甲、尚未填入格中數為3.5.6.7.8。

乙、今1+2之圓尚有

$$1 + 2 + 5 + 8 = 16$$

$$1 + 2 + 6 + 7 = 16 \text{ ④}$$

1+4之圓尚有

$$1 + 4 + 3 + 8 = 16$$

$$1 + 4 + 5 + 6 = 16$$

9	2	
4	1	
		5

丙、由於此1+2與1+4能成立的兩個圓上，未確定格位的數應為四個不相同的數字，所以此兩圓可分析出只有下兩式可成立

$$1 + 2 + 6 + 7 = 16$$

$$1 + 4 + 3 + 8 = 16$$

四個不相同數字為3.6.7.8

丁、即9相對角落格位填入5，此圓為 $1+5+3+7=16$ ，其3.7尚未填入格中。

⑤由 $1+5+3+7=16$

$$1+2+6+7=16$$

所以7填入格位可先確定 ⑤

9	2	
4	1	7
		5

3.6接著確定

9	2	6
4	1	7
	3	5

⑥最後一格位可確定為8，答案找到囉！

⑥

9	2	6
4	1	7
8	3	5

5.學姊告訴我們，以此為樣本圖，使用互換法、旋轉法可得中央「」位格為1之全部答案八個。大家不禁問道：為什麼可以將樣本圖，經互換法、旋轉法而得所有八個答案呢？學姊回答說：這也是他們去年研究魔陣的心得，而在這裡也能使用這些方法，就是因為前面採用線——交點法，將格位分類所得完全與魔陣的一樣。

→ 樣本圖

9	2	6
4	1	7
8	3	5

8	4	9
3	1	2
5	7	6

5	3	8
7	1	4
6	2	9

6	7	5
2	1	3
9	4	8

← 左右互換

6	2	9
7	1	4
5	3	8

5	7	6
3	1	2
8	4	9

8	3	5
4	1	7
9	2	6

9	4	8
2	1	3
6	7	5

6. 同樣的方法，可以尋得「位格填入2」之樣本圖為

9	1	8
4	2	5
7	3	6

7. 「位格填入4」的尋找過程如下：

① 完成此圓圈

①

9	1	
2	4	

② $4 + 1 + 3 + 8 = 16$

②

9	1	
2	4	
		8

$$4 + 1 + 5 + 6 = 16$$

$$4 + 2 + 3 + 7 = 16$$

尚未填入格中數為3.5.6.7.8。能成立的兩圓為

$$4 + 1 + 5 + 6 = 16$$

$$4 + 2 + 3 + 7 = 16$$

尚未填入格中數為3.5.6.7。

即9相對角落格位填入8，但由4+8所成立圓，其尚未確定的兩個加數，無法由3.5.6.7中獲得，即無答案。

結論：全部的答案為兩個樣本圖，亦即有十六個答案圖。

心得：1. 有系統、有條理的研究，果然數學美且易，“答案漏不了”，「為什麼？」都知道。

2. 線——交點法 → 各被加數式子成立次數 → 樣本圖 → 互換法 → 旋轉法 → 全部答案。學姊說這些和他們“尋求魔陣秘笈”所得之方法一模一樣。老師說：基本觀念就是這樣互通的，求學要學會如何吃魚？也要學

會如何釣魚？而基本觀念就是釣魚之門道。

(三)完成了常數16的研究，令我們非常高興，大家都迫不及待想看看另外兩個常數會是怎樣的一趟數學之旅？完全一樣？類似？或另有一番景象呢？老師說：先拜訪常數24的好了，贏了常數最小的，接著挑戰常數最大的，才公平。各位認為有理沒？我們心中可是大嘆不妙，常數愈大，成立的式子想必會愈多，狀況愈複雜。

接下來就是我們的研究過程：

①數字由小到大，四個數連加和為24的情形

$$1+6+8+9=24 \quad 2+5+8+9=24$$

$$2+6+7+9=24 \quad 3+4+8+9=24$$

$$3+5+7+9=24 \quad 3+6+7+8=24$$

$$4+5+6+9=24 \quad 4+5+7+8=24$$

共有八個式子（怪了！怎麼與常數16的一樣，我們以為會更多，顯然錯了。）

②被加數：123456789

成立次數：一二三三四四五五六 總計三十二次

心得：1.學姊馬上就發現成立次數與常數16的情形相似，只不過對應的被加數字，一為由小到大，一為由大到小。

2.而同一成立次數所對應的兩個被加數，其和均為10。見後表：

成立次數	一二三三四四五五六
常數24被加數	123456789
常數16被加數	987654321

③我們馬上跑去找老師，老師一看連說：太妙了！太妙了！答案全在眼前。並指導我們找出常數為24的答案，完成過程如下：

甲、先將常數16的答案樣本圖列出

9	2	6
4	1	7
8	3	5

9	1	8
4	2	5
7	3	6

乙、將樣本圖上每個格位數字，更換上與原填數字和為10的數，這就是常數為24的答案樣本圖。

1	8	4
6	9	3
2	7	5

1	9	2
6	8	5
3	7	4

(我們在旁趕快將四個圓加了加，真的耶！和都是24，真是太不可思議了，那麼快，就完成了研究。)

④各位同學，你們是否很好奇，為什麼會這樣？我們也是。老師告訴我們原因是

甲、我們使用線——交點法分析方格時，其內容就是各個格位所填數字，由其做被加數使式子能成立的次數來決定。

乙、今常數16和24時，各被加數數字依序能成立的次數分佈狀況完全一樣，所以對應同一成立次數所填入之格位相同。我們稱它為對應法則，常數16和24互為對應對，它們的樣本圖上對應格位數字和為10，而 $(16 + 24) \div 4 = 10$ 。

⑤當我們大家還在那品味這趟旅程迄今的美與易時，老師告訴我們一個好消息；常數20的旅程，我們留給有興趣的同學先去遊覽，並希望大家旅遊完畢，將旅程見聞寫下來，寄到高雄市大同國小二年七班馬靖威同學收，我們現在去慶功，如何？哇！當然非常贊成，同學們，等你們的來信。祝你們旅程愉快！

五、討 論

1. 數學的趣味，不應只有嘗試誤法嘗試成功時的短暫喜悅而已，有系統、條理性的正確科學研究推理法，才會讓我們從知道「什麼？」，到知道「為什麼？」。
2. 求學要學會如何吃魚？也要學會如何釣魚？基本觀念應盡心盡力的求得，深植心中。
3. 為何常數16與常數24有如此奇妙的互相呼應的關係呢？它應該也有一番道理，而我們顯然還未發掘尋覓到，這趟路程還有得瞧，是不？
4. 常數20的旅程，我們決定暫停前行，但也不禁極端好奇，它是否也有一奇妙的互相對應的關係存在？

- 5.常數20的旅程，它的基本觀念是否仍然一樣？我們認為應該是，但我們絕對不敢說確定是，畢竟我們還未去過，學姊一再告訴我們這是科學的精神，正確的科學態度。
- 6.各被加數成立次數的分析，因為是四個數連加，所以和魔陣三個數連加大異其趣，但系統條理地處理，仍為一趟美與易的旅程。
- 7.所有答案的找出，應該也是解答問題的層次，同時也是不難追求到的層次，而目前我們的教育，似乎不講求，這是否也算弊病？
- 8.大概魔陣八線段的魅力太強，學姊習慣性的加了加，赫然發現常數16的兩斜向三數和常數24的兩斜向三數和，均是一為15，一為17，而其與橫、直向線段就各不相同了，這有什麼玄機在？真令人好奇吶！
- 9.找到樣本圖後，使用互換法時，通過中央格位的四根線段，任選其一做固定線段均可以成立。

六、結論

- 1.問題的處理模式與魔陣完全一樣，為線——交點法→各被加數成立次數→樣本圖→互換法→旋轉法→全部答案。
- 2.常數16的樣本圖為

9	2	6
4	1	7
8	3	5

9	1	8
4	2	5
7	3	6

- 3.常數24的樣本圖為

1	8	4
6	9	3
2	7	5

1	9	2
6	8	5
3	7	4

- 4.就對應法則來看，常數16與24為對應對，它們樣本圖上的各對應格位兩數字和為10。

七、參考資料

數學之旅——魔陣秘笈之尋覓(一)、(二)。

評 語

研究方格中之數字等和問題符合初小學生程度，學生在研究過程中對於數字之互換、旋轉了解的很透徹，對數字之性質亦能得到充分的了解。