亂點鴛鴦譜——“三角直線牽”公式的推理和研究

初小組數學科第二名

台北市龍山國民小學　　　　作　　者：翁子恆、林姿呤、車宗冀、柯秉妤

指導教師：翁進勳、鄭慧美

一、研究動機

下課時，同學們最喜歡玩連直線搶三角形的遊戲了，開始是由小朋友們在白紙上面，隨意的用筆點上幾點，再以長尺每兩點連成一直線，三點則連成一個三角形，看誰連的直線及三角形的數量最多；誰就贏！（但必須遵守遊戲規則，直線和三角形不得交叉或重覆計算。）

二、研究問題

(一)點數位置不變，改變連線的途徑是否影響直線三角形的數量？

(二)總點數相同，但排列的方式不同，連出來的直線和三角形的數量是否相同？

(三)控制內、外圈的點數不變，逐漸增加其外、內圈的點數，二者的直線和三角形的數量增加多少？有否公式？

三、研究器材

(一)圓規、長尺、鉛筆、紅藍原子筆。

(二)方格紙、活頁紙。

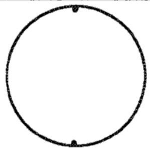
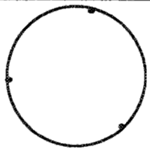
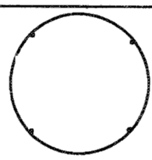
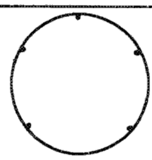
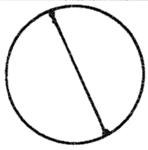
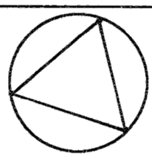
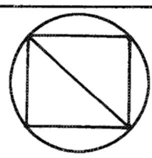
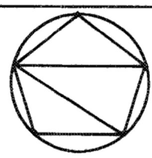
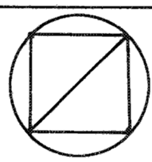
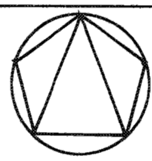
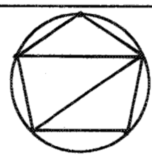
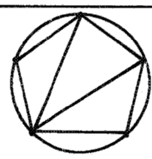
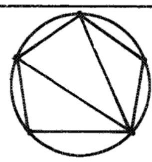
四、研究過程

(一)點數位置不變，改變連線的途徑是否影響直線和三角形的數量呢？

1.方法：

在空白的計算紙上面，以圓規畫出半徑 2 公分的圓形四個，分別在圓周線上，隨意點上 2 至 5 個點，用直尺和鉛筆每兩點連成一直線，三點則連成三角形，實際操作並觀測連出來的圖形和數量是否一樣？（如下圖）

2.設計圖：

點數／觀測項目	二　點	三　點	四　點	五　點
圖　樣				
圖形變化				
				
				
				
				
型　式	1個	1個	2個	5個
直線數量	1	3	5	7
三角形數量	0	1	2	3

3.發現：

(1)我們發現直線和三角形的數量以及圖形的變化隨著點數增加成正比。

(2)直線數量隨著點數增加，成1、3、5、7、9…奇數的順序排列。

(3)三角形的數量則隨著點數增加，成1、2、3、4、5…連續數的排列。

4.推理與討論：

(1)由發現2：我們發現二點連成一直線，以後每增加一點，便增加二條直線，增加二點便增加四條直線…依此類推，我們很高興的理出頭緒，找到一條快速的公式2×（點數－2）＋1＝直線的數量。

(2)由發現 3 ：我們發現三點構成一個三角形，以後每增加一點，便增加一個三角形，增加二點便增加二個三角形…依此類推，我們也得到了一條快速的公式 1 ×（點數－ 3 ）＋ 1 ＝三角形的數量。

(3)由以上觀測的結果，我們可以證明只要點數及方位不變，改變連線的途徑是不會影響直線和三角形的數量，而且也找出了二條便捷的計算公式：

甲、求直線數量公式＝（點數－ 2 ）× 2 ＋ 1 ＝點數× 2 － 3

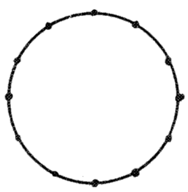
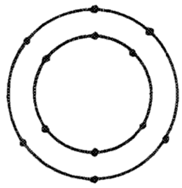
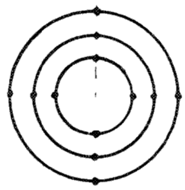
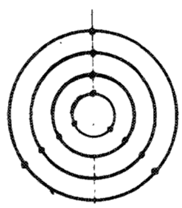
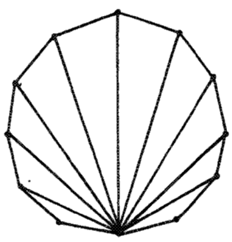
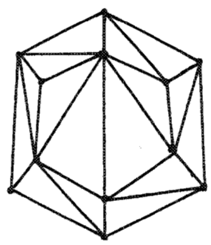
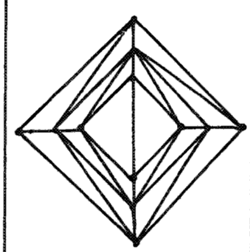
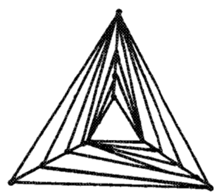
乙、求三角形數量公式＝（點數－ 3 ）＋ 1 ＝點數－ 2

(二)點數相同，但排列的方式不同，連出來的直線和三角形的數量是否相同？

1.方法：

把12點分別布置在單層、雙層、叄層、肆層的圓圈上，單層一個圓圈布置12點，雙層每層各布置 6 點計12點，叄層每層布置 4 點計12點、肆層每層布置 3 點計12點，在總點數12點都相同的情況下，觀測畫出來的直線及三角形的數量是否都相同？

2.設計圖（甲）

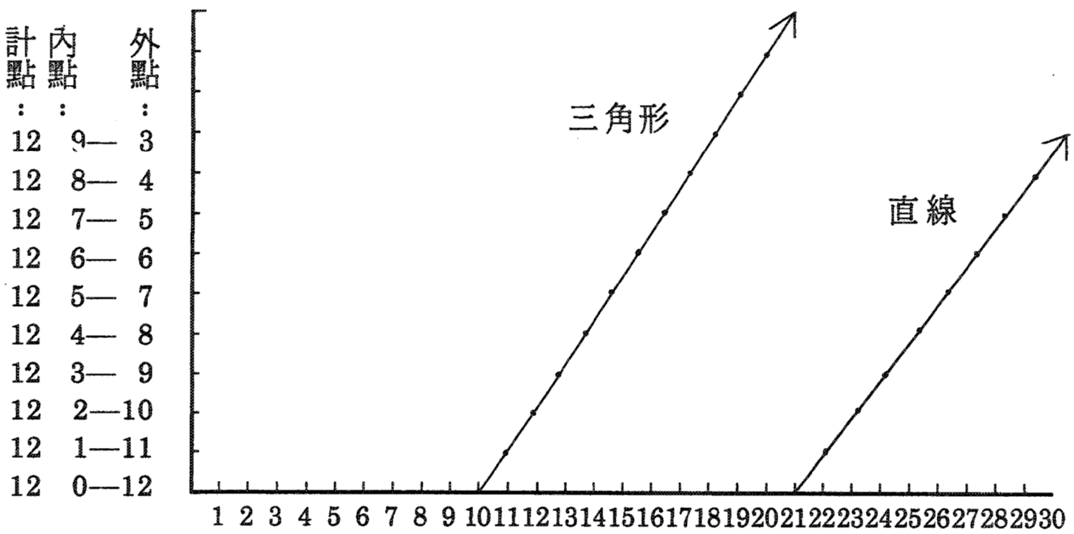
點數 ＼ 觀測項目	單　層	雙　層	參　層	肆　層
	12×1＝12 0＋12＝12	6×2＝12 6＋6＝12	4×3＝12 4＋4＋4＝12	3×4＝12 3＋3＋3＋3＝12
點數分布位置圖				
點數連線圖				
直線數量	21	27	29	30
三角形數量	10	16	18	19

3.結果：

⑴我們由設計圖的觀測，發現了重大的秘密，當我們把同樣12點的單、雙、叁、肆層◯、◎、◎、◎。）歸納爲只有內外之分的兩圈，即圈內和圈外（含線）兩個領域，我們很興奮的找到了他們彼此之間的關係。

⑵我們由上述的歸納圖中，把（內－外）點作出曲線圖：

曲線圖（分三角形數量和直線數量）



4.發現：

⑴由單層中，我們發現外圈點數原本12點，其中一點跑到內圈中（即內１－外11），所得到的直線及三角形的數量，則相對的各增加一個，內圈如增爲二點（２－10）則各增加二條直線二個三角形……依此類推，在點數相同的情況下，內圈增加一點（即外圈少一點），直線及三角形的數量則成正比各增加一個。

⑵貳、叁、肆層的操作觀測，我們發現跟單層的道理一樣，內圈如增加一點，直線和三角形的數量則各增加爲一個，反之則相反。

⑶當外圈的點數如果少於３點時（＜３），就破壞了圈內和圈外的結構，換句話說：沒有裡外之分，因爲外圈＜３點時，無法構成一個大外三角形（形成一個外圈）。

⑷我們在操作觀測中，發現單、貳、叁、肆層各圓周線上的點，並不一定要有規則的排列，只要有內外圈之分，外圈最少三點以上，內圈的點可隨意的排列，即成亂數排列，在點數相同的情況下，所求出來的直線及三角形的數量是不變的。

5.推理與討論：

(1)我們根據12點與 6 點的歸納圖和曲線圖，很明顯的可以看出，在內外圈點數相同的情況下，不管是否有規則的排列，所連出來的直線和三角形的數量是相同的，但外圈的點數不得少於三點。

(2)在點數不變的情況下，增加內圈的點數，可以使直線和三角形的數量跟著增加，亦即每增加內圈一點，相對的可以增加一條直線和一個三角形。

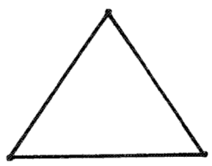
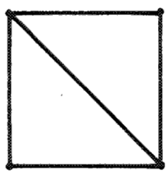
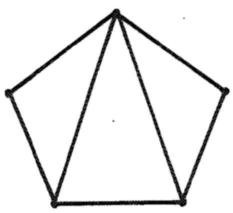
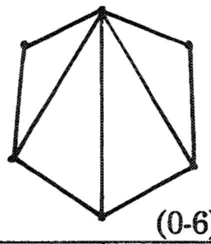
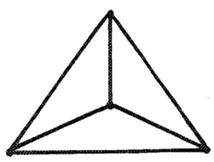
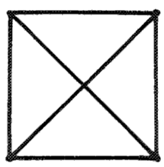
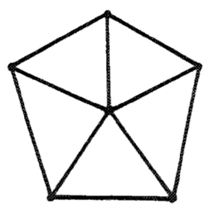
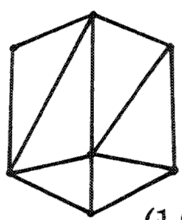
(3)由問題一、二的討論中，我們知道內外圈增加點數都會使直線及三角形的數量增加，那麼在外圈的點數相同的情況下，逐漸增加內圈的點數，是否可以改變直線及三角形的數量呢？

㈢控制內外圈的點數不變，逐漸增加其內外圈的點數，二者的直線和三角形的數量增加多少？有否公式？

1.方法：

在空白的計算紙上面，以圓規畫出半徑 2 公分的圓形四個，分別在圓周線上點 3 至 6 點（作爲外圈線上的點數），圈內則分別點上 1 至 4 點，實際操作並觀測連出來的直線及三角形數量有否不同。

2.設計圖：（外圈點數不變、內圈點數增加）

外圈點數		三點		四點		五點		六點	
外圈增加點		0		1		2		3	
圖樣	內圈增加點	 (0-3)		 (0-4)		 (0-5)		 (0-6)	
數量	0	直線	三角形	直線	三角形	直線	三角形	直線	三角形
		3	1	5	2	7	3	9	4
圖樣	內圈增加點	 (1-3)		 (1-4)		 (1-5)		 (1-6)	
數量	1	直線	三角形	直線	三角形	直線	三角形	直線	三角形
		6	3	8	4	10	5	12	6

3.發現：

(1)我們由設計圖及曲線圖中，發現了兩項事實

a.外圈點數控制不變的情況下，內圈點數每增加一點則增加三條直線及二個三角形。

3 －（直線）× 1（點）＝ 3 －

2 △（三角形）× 1（點）＝ 2 △

b.內圈點數控制不變的情況下，外圈線上每增加一點則增加二條直線及一個三角形。公式如下

2 －（直線）× 1（點）＝ 2 －

1 △（三角形）× 1（點）＝ 1 △

(2)由研究問題一所得到的公式：（依外圈之點求直線及三角形數量的公式）

a.（外圈）$\begin{cases} \text{求直線（－）數量公式＝點數× 2 － 3} \\ \text{求三角形（△）數量公式＝點數－ 2} \end{cases}$

b.（內圈）$\begin{cases} \text{求直線（－）數量公式＝ 3 －（直線）× 1（點）＝ 3 －} \\ \text{求三角形（△）數量公式＝ 2 △（三角形）× 1（點）＝ 2 △} \end{cases}$

c.由外圈和內圈的公式，我們把他合併起來，我們就可以寫成下列的公式：

求直線數量的公式＝（外點× 2 － 3）＋（3 ×內點）
（外圈公式）（內圈公式）

求三角形數量的公式＝（外點－ 2）＋（2 ×內點）
（外圈公式）（內圈公式）
＝外點－ 2 × 1 ＋ 2 ×內點
＝外點＋ 2 ×內點－ 2 × 1
＝外點＋ 2 ×（內點－ 1）

d.我們由上述所得到的公式，用在任何有規則的層數或是不規則的亂數點中，只要我們把要計算的點歸納爲圈內和圈外兩大部分，就可以輕易算出直線及三角形的數量。

五、心得與討論

㈠由問題一的研究，我們證明點數及方位不變的話，雖然連線的途徑不盡相同，但決不會影響直線及三角形的數量。同時我們以推理的方式得到一條計算的公式：例如由點數所構成的多邊形其直線及三角形數量如何求法？

1.求直線數量的公式＝（點數－２）×２＋１＝點數×２－３

2.求三角形數量的公式＝（點數－３）＋１＝點數－２

㈡由問題二的研究：我們證明了排列的方式只要最外圍的點數不小於３時，不管是有規則的層層排列，或則亂數排列，都可以歸納爲內外圈兩個部份，並且觀測得知：在內外兩圈加起來的總點數相同時，凡內圈增加一點（即外圈減少一點），則各增加一條直線及一個三角形，反之則相反。

㈢由問題三的研究：我們觀測得知並以推理的方式得到三條計算的公式：

1.外圈點數控制不變的情況下，內圈點數每增加一點則增加三條直線及二個三角形。

2.內圈點數控制不變的情況下，外圈線上點數每增加一點則增加二條直線及一個三角形。

3.求（內－外）點的公式：例如（１－３）

⑴求直線數量的公式＝（外點×２－３）＋（３×內點）

⑵求三角形數量的公式＝外點＋２×（內點－１）

六、參考資料

㈠本校數學研習營自編資料。

㈡作者群三個月的創意結晶。

評　語

本件作品非常清楚是由學生做遊戲所引起的動機，而以小學中低年級之學生能如此清楚地將點、線、三角形之關係分析清楚實在難得，值得鼓勵。