

數字方塊

初小組數學科第一名

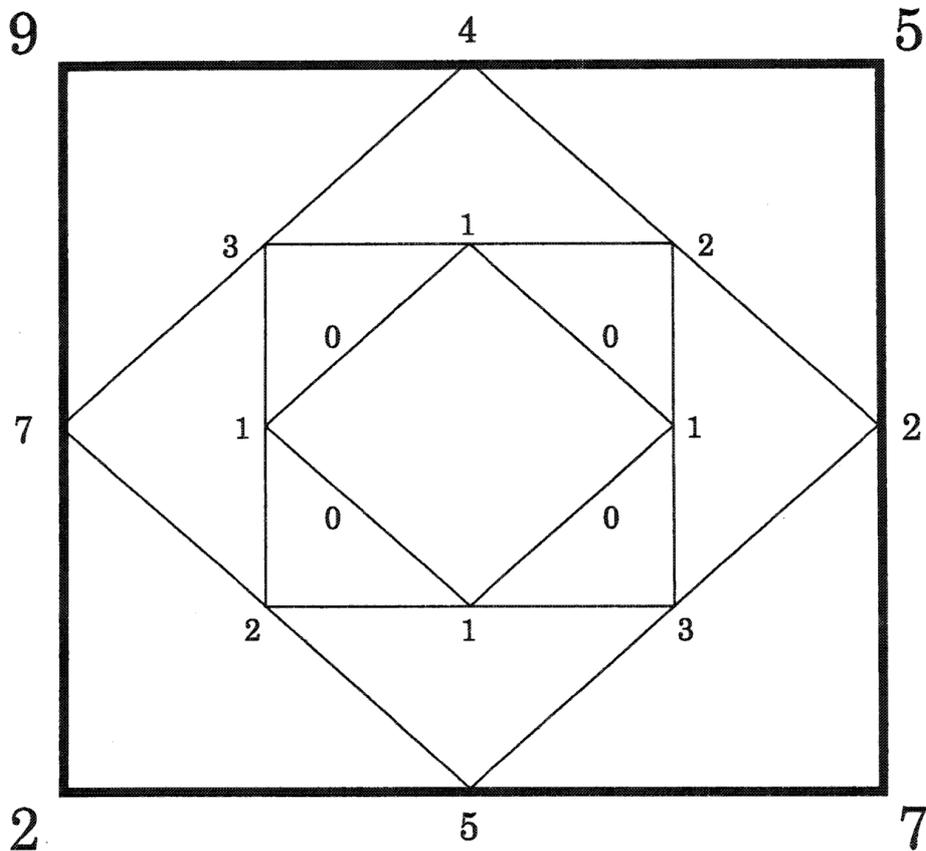
台北市立師院附設實驗國民小學

作者：賴緯綸、林昀緯、方柏翔

指導教師：蔡淑英、吳慎芬

一、研究動機

學校在一次科學教育活動中，邀請蔡老師透過錄影帶教學，把中國時報登載的一個數學遊戲介紹給全校小朋友，問題是這樣的：〔首先在一個方塊的四角寫下一個正數，算出相鄰兩角數字的差，寫在四條邊線的中點，再以四個中點畫一個方塊，繼續重複這個程序，最後會有一個方塊的四個中點都是0。〕（如下圖）我覺得這個問題很有趣，又有一點兒不相信，我們20多位小朋友每人任意在方塊的四角寫下大大小小不同的四個數來研究這個問題，結果有的人寫的數畫2個小方塊後就結束，有的人寫的數必須畫很多個方塊後才會結束。真奇怪，這〔數字方塊〕裡到底隱藏著多少祕密？



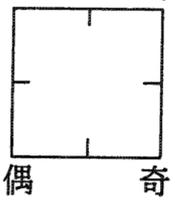
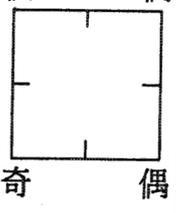
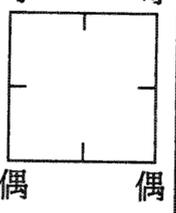
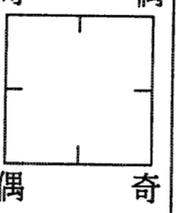
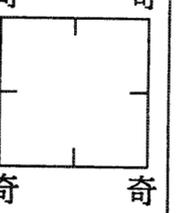
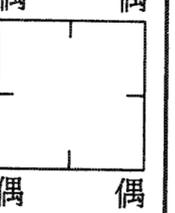
二、研究目的

探討〔數字方塊〕在運算的過程中所隱藏的一些數學規則。

三、研究方法

(一)觀察數字方塊四個角數字的奇偶變化：

依據〔數字方塊〕四個角數字的奇數、偶數分佈情形，將它分為下面六種類型，並觀察各類型在實際運算過程中的變化。

類 型 一	類 型 二	類 型 三	類 型 四	類 型 五	類 型 六
問 題 層	問 題 層	問 題 層	問 題 層	問 題 層	問 題 層
奇 奇 偶 奇	偶 偶 奇 偶	奇 奇 偶 偶	奇 偶 偶 奇	奇 奇 奇 奇	偶 偶 偶 偶
					

(二)觀察數字方塊四個角數字間的和差關係。

(三)觀察數字方塊結束運算以前的第一個小正方形特徵。

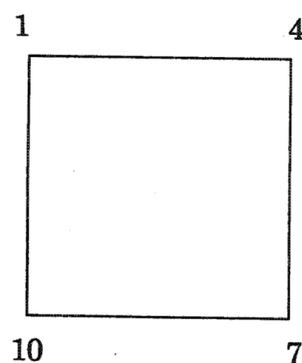
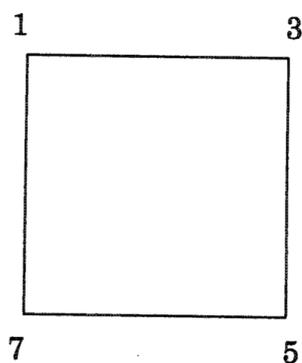
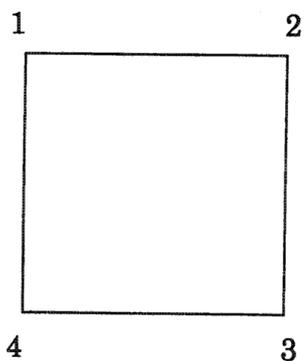
(四)觀察數字方塊四個角數字間，出現相同數以後的變化情形。

(五)把差相等的四個不相同數,由小到大用順時針的方向排在〔數字方塊〕的四個角上，觀察在實際運算過程中的變化情形

(+1的數)

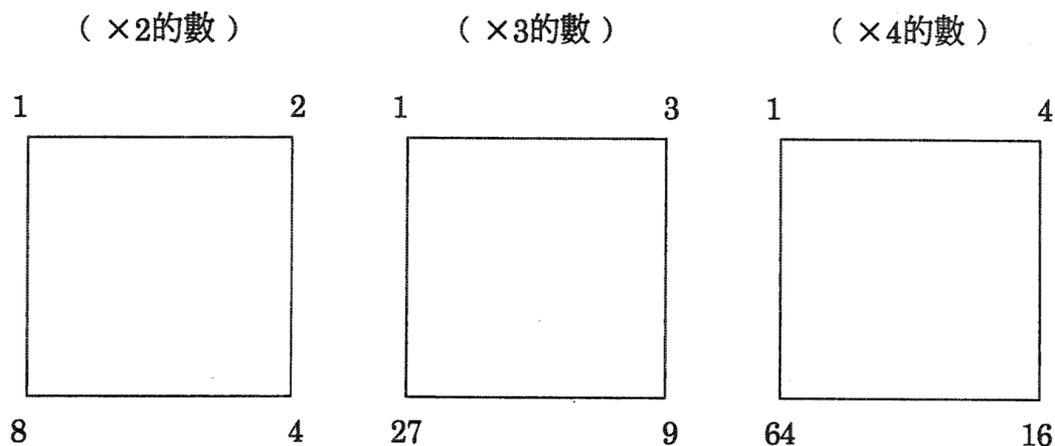
(+2的數)

(+3的數)



(六)把具倍數關係的四個數，由小到大用順時針的方向排在〔數字方塊〕的四個角

上，觀察在實際運算過程中的變化情形。



四、研究結果

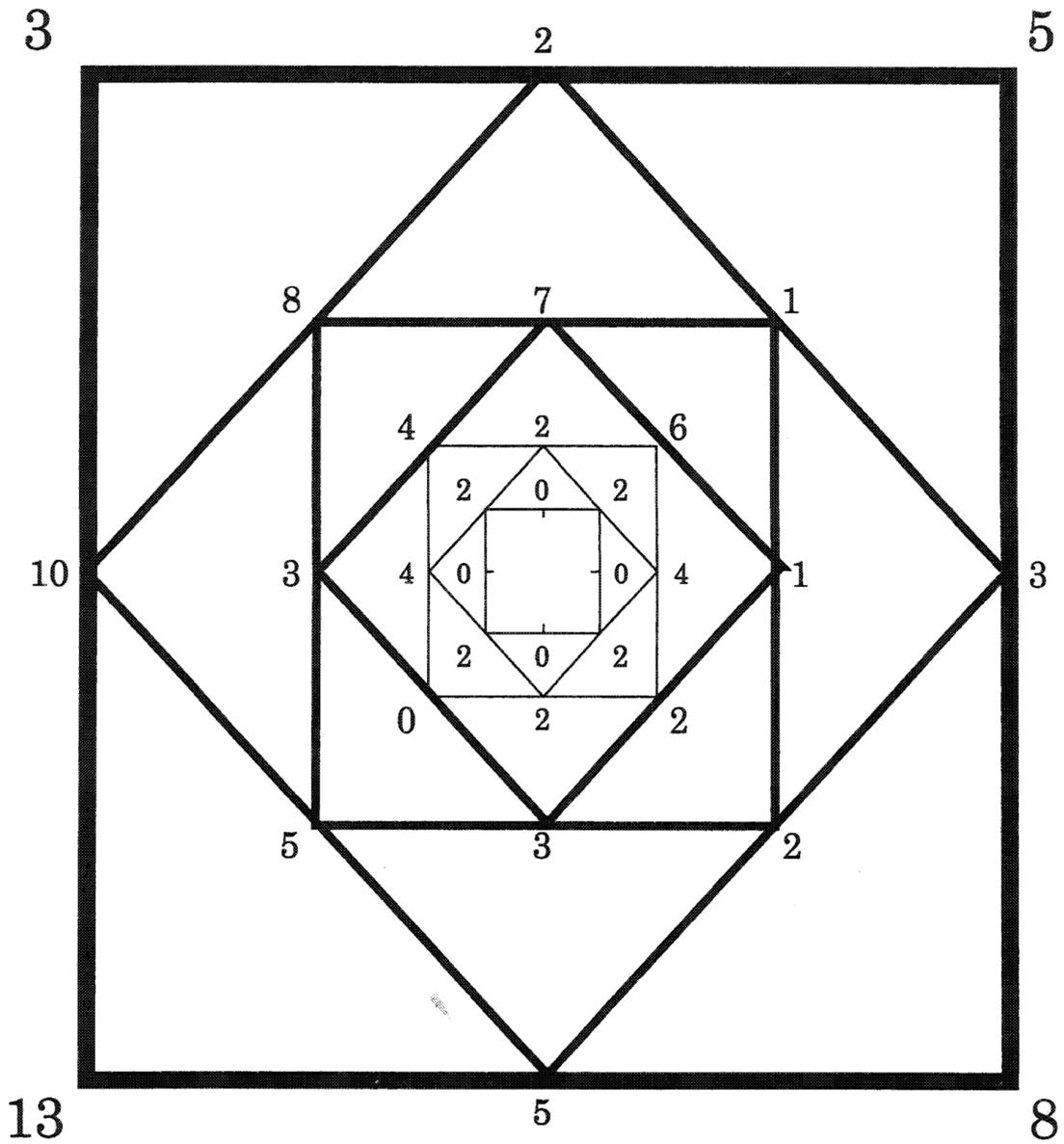
(一)數字方塊各運算層四個角數字奇偶變化的規則：

- 1.數字方塊的四個角，無論寫下0、1、2、3…任何數字，我們一共做了300多個數字方塊的問題，在計算到最後都會出現中點都是0的方塊，也就是說：在運算結束那一層，四角數字都相等。因此必為四個奇數或是四個偶數。
- 2.在運算過程中，數字方塊由問題開始到運算結束，各運算層四個角數字奇偶變化一定遵循著下列次序：
三奇一偶或三偶一奇→奇奇偶偶→奇偶奇偶→四奇→四偶→四偶→四偶→…
……。

(二)數字方塊四個角數字間的和差關係：

數字方塊除原始問題以外，在各運算層中，數字方塊四個角數字間的和差關係，存在下列三種情形中的1種或2種。

- 1.最大數等於其他三個數的總和。
- 2.對角數字的和相等。
- 3.對角數字的差相等。

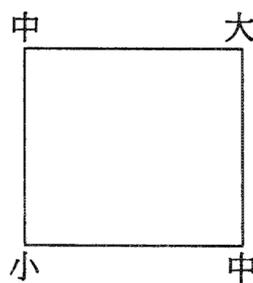
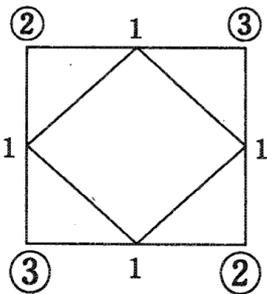
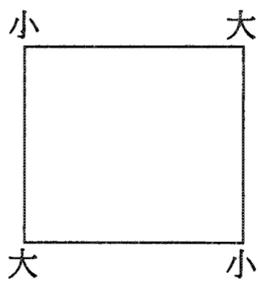


(三)觀察數字方塊結束運算以前的第一個小正方形特徵。

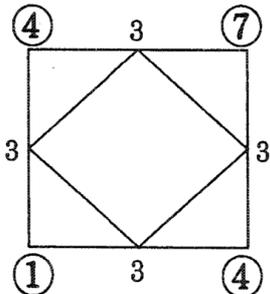
1.二數型(四個角的數,只有大、小不同的數)

2.三數型(有大、中、小三個數)且大+小=中+中。

例如:



例如:



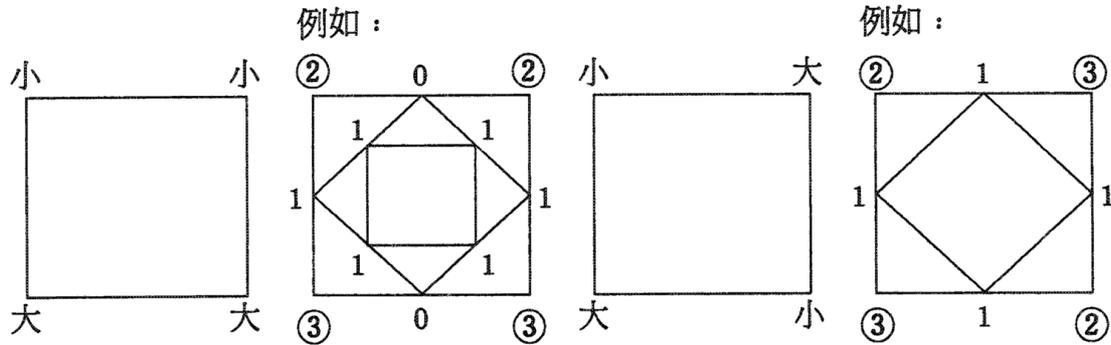
(四數字方塊四個角數字出現相同數的變化情形：

1. 二數型 (四個角的數只有大、小不同的兩個數時)

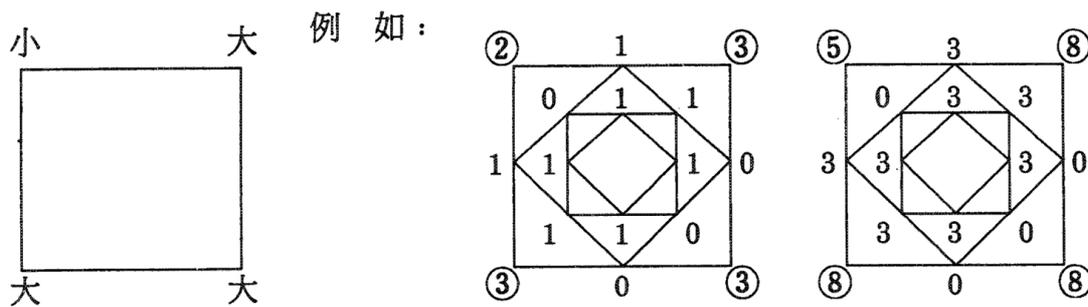
(1) 二大二小

A 相鄰型：畫2個方塊就結束。

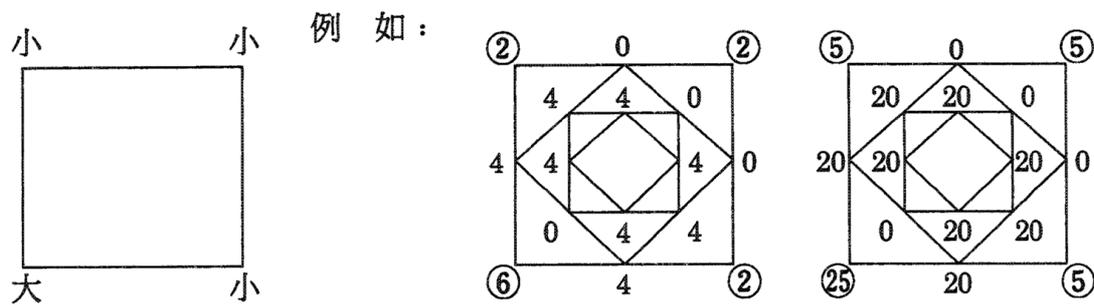
B 對角型：畫1個方塊就結束



(2) 三大一小：畫3個小方塊才會結束。(運算層不會出現)

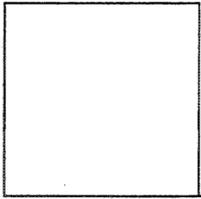
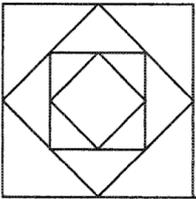
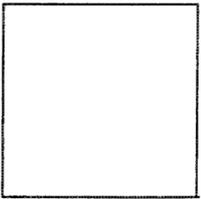
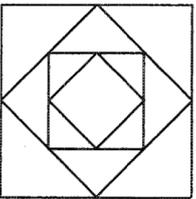
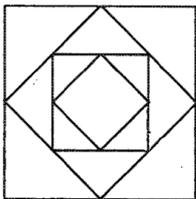
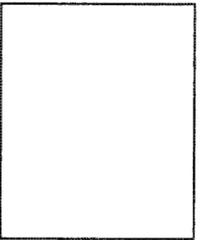
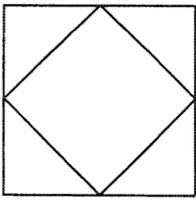
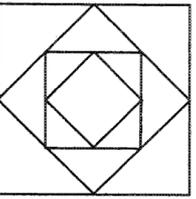
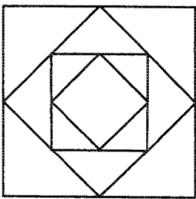


(3) 三小一大：畫3個小方塊才會結束。

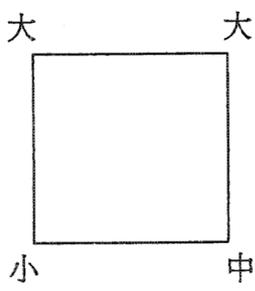
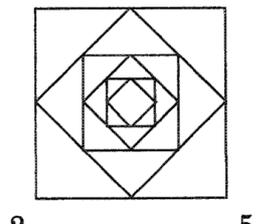
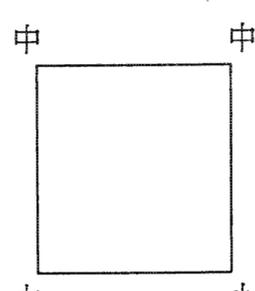
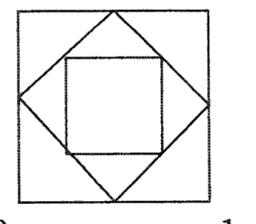
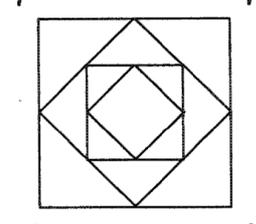
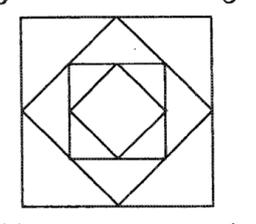
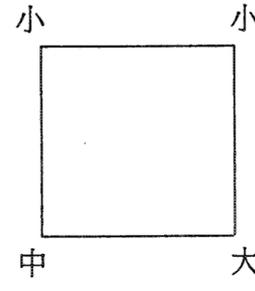
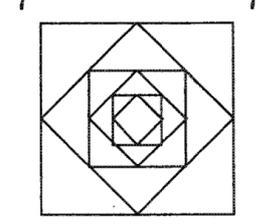
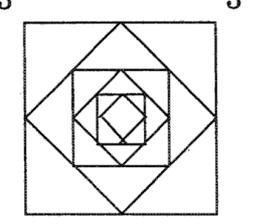


2. 三數型 (四個角的數有大、中、小三個不同的數時)

(1)相同數對角型

類	型	數字方塊層次		畫?個小方塊,才 會結束		
		問題層	運算層			
	<p>大 中</p>  <p>小 大</p>	<p>5 4</p>  <p>1 5</p>		×	3 個	
	<p>小 中</p>  <p>大 小</p>	<p>4 6</p>  <p>8 4</p>	<p>1 6</p>  <p>8 1</p>			3 個
	<p>中 大</p>  <p>小 中</p>	<p>大+小=中+中</p> <p>○</p>	<p>大+小=中+中</p> <p>5 7</p> 			1 個
	<p>小 中</p>	<p>大+小≠中+中</p> <p>5 9</p>  <p>2 5</p>	<p>大+小≠中+中</p> <p>3 8</p>  <p>2 3</p>			3 個

(2).相同數相鄰型

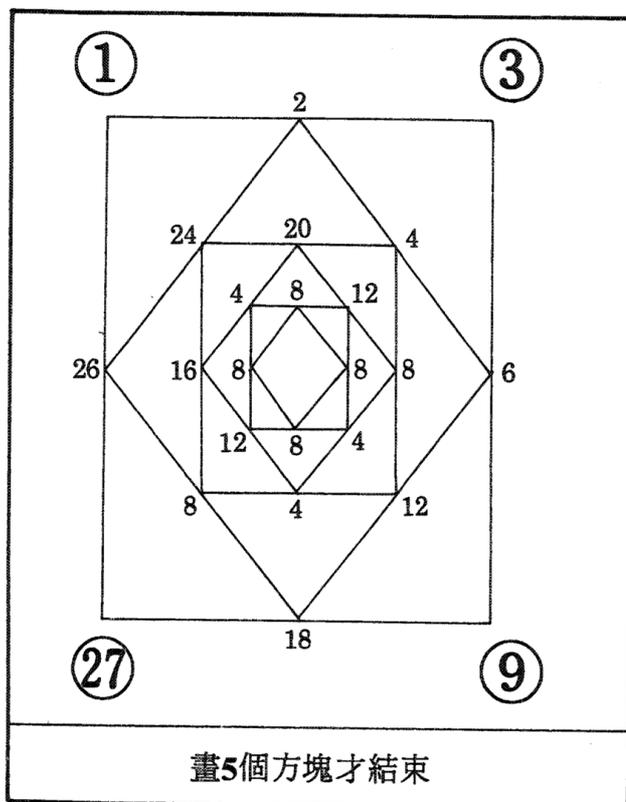
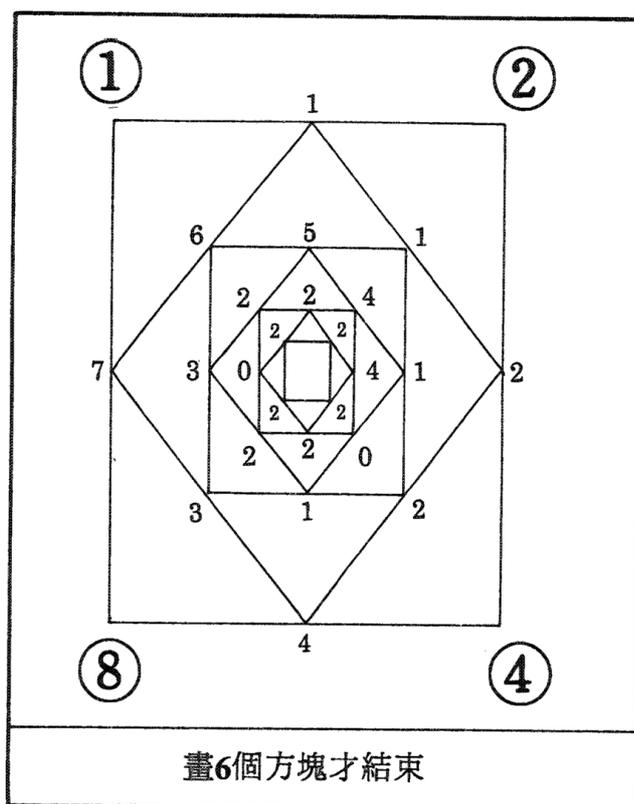
類	型	數字方塊層次		畫?個小方塊,才會結束
		問題層	運算層	
	大+小<中+中			3 個
	大+小<中+中 7 7  2 5		×	5 個
	大+小=中+中		大+小=中+中 5 5  9 1	2 個
	大+小≅中+中 7 7  10 3	大+小≅中+中 5 5  11 1	3 個	
	大+小≤中+中		大+小≤中+中	3 個
	大+小>中+中 7 7  11 8	大+小>中+中 3 3  4 10	5 個	

(五)把差相等的四個不相同的數，由小到大用順時針的方向排在〔數字方塊〕的四個角上，觀察在實際的過程中變化情形。我們發現這類型的數字方塊，一定要運算四次才可結束。且經由第一次運算之後都會出現三小一大的方塊。

(六)把具倍數關係的四個數，由小到大用順時針的方向排在〔數字方塊〕的四個角上，我們發現， $\times 2$ 的數要畫6個小方塊才可結束； $\times 3$ 的數， $\times 4$ 的數， $\times 5$ 的數， $\times 6$ 的數， $\times \blacktriangle$ 的數，都只要畫5個小方塊就可結束。

例如： $\times 2$ 的數：

例如： $\times 3$ 的數



五、推 廣

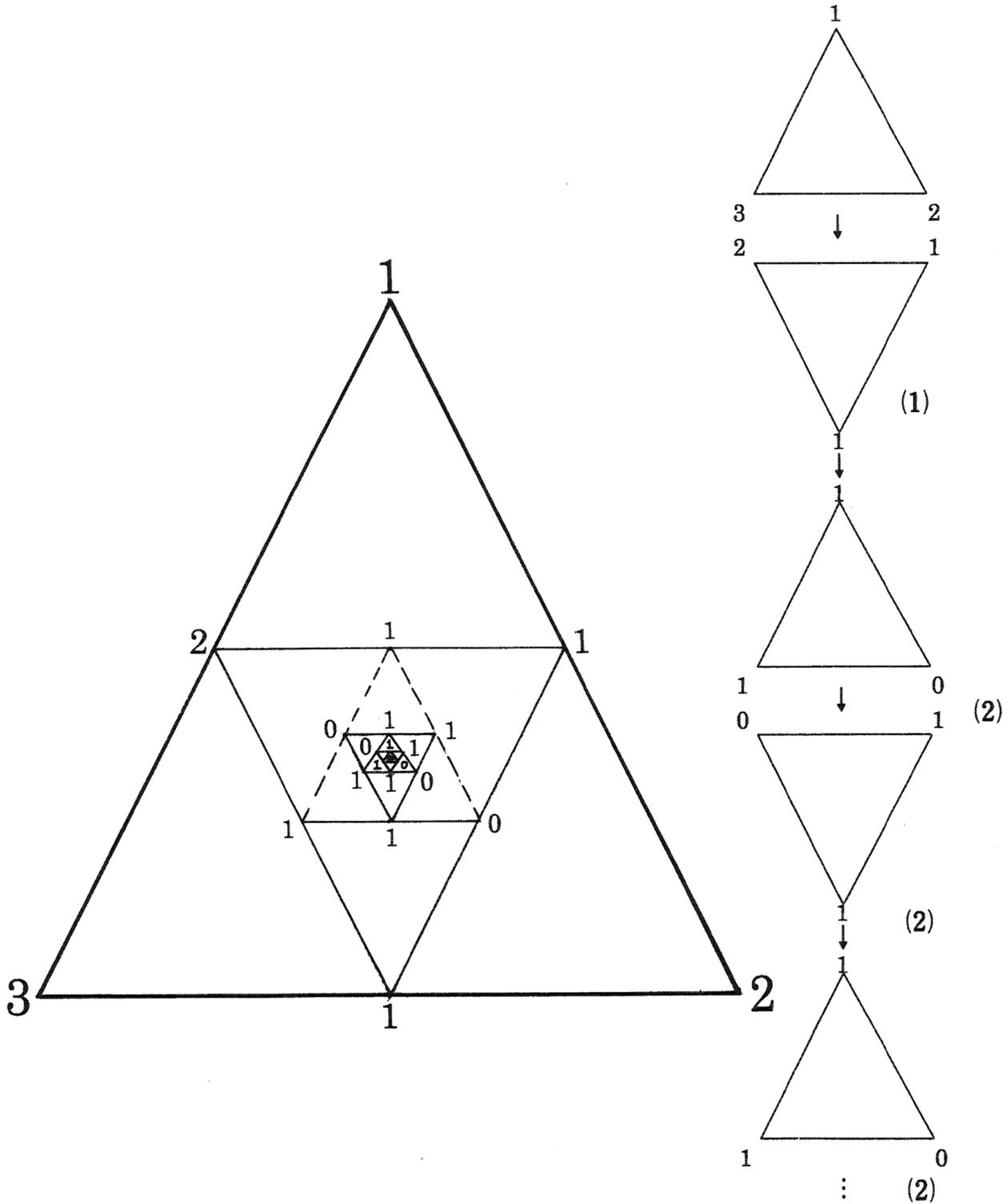
探討〔數字方塊〕的運算方法，在其他正三角形、正五邊形、正六邊形、正七邊形……正多邊形上，是不是也一樣在計算到最後都會出現中點都是0的正多邊形。

(一)研究方法：

把1、2、3、4、5、6……，由小到大用順時針的方向排在正三角形、正五邊形、正六邊形、……正三十二邊形的角上，用〔數字方塊〕的運算方法分別加以計算，觀察哪些正多邊形在計算到最後會出現中點都是0的正多邊形。

(二)研究結果：

1.正三角形：



2. 正多邊形	3	4	5	6	7	8	9	10	...	12	...	14	...	16	24	32
是否結束	×	0	×	×	×	0	×	×		×		×		0			×		0

(三)研究發現：

- 1.正奇數邊形，用〔數字方塊〕的運算方法分別加以計算，最後都不會出現中點都是0的正奇數邊形。
- 2.正偶數邊形，用〔數字方塊〕的運算方法分別加以計算，我發現當邊數是4，6，8，10，12，14，16時，只有邊數是4，8，16的正偶數邊，在計算到最後才會出現中點都是0的正偶數邊形。
- 3.正4，8，16邊形，用〔數字方塊〕的運算方法分別加以計算，最後會出現中點都是0的正多邊形。而正24，32邊形，經由我們實際計算，發現只有正32邊形計算到最後才會結束。

(四)推論：

〔數字方塊〕的運算方法，除了正方形以外，還可以運用在其它的正多邊形，當邊數 >2 時，且邊數 $=2$ 的連乘積時。

例如：正4邊形，正8邊形，正16邊形，正32邊形，正64邊形，正128邊形，正256邊形，正512邊形，.....

六、進一步想研究的問題

研究如何設計必須經過很多次運算之後，才會結束的〔數字方塊〕問題。

七、參考資料

奇數和偶數 漢聲精選世界兒童數學叢書第2冊。

評語

由一簡單且有趣的數學問題出發，探討其中所具有的一些性質，歸納且整理，而發現其規則，學生不但能了解到數字之奇偶變化，並能學到一些收斂的概念。對初小學生而言，是一頗難得的作品。